

## Ток увлечения при ионизации примеси электромагнитной волной в полупроводниковой сверхрешетке

© М.В. Вязовский, Г.А. Сыродоев

Волгоградский государственный педагогический университет,  
400013 Волгоград, Россия

(Получена 14 сентября 1998 г. Принята к печати 26 апреля 1999 г.)

Найден ток увлечения при ионизации мелкой примеси сильной электромагнитной волной в полупроводниковой сверхрешетке. Показано, что при низких температурах, когда можно пренебречь равновесной плотностью носителей, ток увлечения зависит нелинейно от интенсивности электромагнитной волны и осциллирует с ростом напряженности электромагнитного поля. Эти осцилляции являются следствием многофотонного характера поглощения электромагнитной волны примесями, а также — непараболичности спектра энергии сверхрешетки. Проведено сравнение вкладов в ток увлечения от анизотропной части вероятности ионизации примеси и от ее изотропной части с учетом изменения электромагнитной волновой функции распределения. Найден, что при  $\hbar\omega \ll \Delta$  ( $\Delta$  — ширина минизоны проводимости) основной вклад в ток увлечения дает изотропная часть вероятности ионизации.

Ток увлечения электронов проводимости в полупроводниковых сверхрешетках (СР) электромагнитными волнами (ЭМВ) (как монохроматическими, так и уединенными) рассматривался в целом ряде работ [1–4]. В работах [5–7] найден ток увлечения в однородном полупроводнике при двух- и трехфотонном межзонном поглощении света. Ионизация же примеси в СР и их вклад в ток увлечения изучены менее детально. В работе [8] найден ток увлечения электромагнитными солитонами в СР при учете только анизотропного характера вероятности ионизации примеси при однофотонном поглощении. Как мы покажем далее, при выполнении условий:  $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ ,  $\frac{eEd}{\hbar\omega} \geq 1$ ,  $\frac{\hbar\omega}{\Delta} \ll 1$  ( $a$  — боровский радиус примеси,  $\lambda$  — длина ЭМВ,  $E$  — электрическое поле ЭМВ,  $\omega$  — частота ЭМВ,  $\Delta$  — ширина минизоны проводимости,  $e$  — заряд электрона) можно не учитывать анизотропную часть вероятности ионизации примеси, а учитывать изменение функции распределения электронов  $f(\mathbf{p}, t)$  полем ЭМВ. При выполнении условий  $eEd \ll \Delta$ ,  $\frac{\hbar}{\tau_p} \ll \Delta$  ( $\tau_p$  — среднее время релаксации электронов) можно решать задачу в квазиклассическом и одноминизонном приближении.

Кинетическое уравнение для функции распределения запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau_p} + N_0 G(\mathbf{p}) - \frac{f}{\tau_r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ ,  $f_0(\mathbf{p})$  — равновесная функция распределения,  $N_0$  — концентрация примеси,  $\tau_r$  — среднее время рекомбинации электрона и дырки.

$$G(\mathbf{p}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{d}{dT} \left| \int_{-\infty}^T \langle \mathbf{k} | \hat{H}' | n \rangle e^{-i\omega_{\mathbf{k},n} t} dt \right|^2 \quad (2)$$

— вероятность перехода (ионизации) в единицу времени,

$$\hat{H} = \varepsilon \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \right) - \varepsilon(\hat{\mathbf{p}}) \quad (3)$$

— эффективный гамильтониан взаимодействия ЭМВ с электроном в минизоне проводимости,

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p_{\perp}^2}{2m} + \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{p_z d}{\hbar} \right) \right) \quad (4)$$

— энергия электрона в этой зоне,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  — квазиимпульс,  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ ,  $\mathbf{A}(t)$  — вектор-потенциал ЭМВ,  $\hbar\omega_{\mathbf{k},n} = \varepsilon(\mathbf{p}) + I_n$ ,  $I_n$  — энергия ионизации  $n$ -го уровня примеси,  $|\mathbf{k}\rangle$  и  $|n\rangle$  — волновые функции электрона в минизоне проводимости и в связанном состоянии на примеси.

В кинетическом уравнении опущен член с пространственной производной, так как средняя скорость электронов значительно меньше скорости ЭМВ, а длина свободного пробега значительно меньше длины ЭМВ. Решение уравнения (1) находим методом характеристик [9]

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\tau_p} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_p}} f_0(\mathbf{p}'(t'), \mathbf{p}, t) dt' + N_0 \int_{-\infty}^t G(\mathbf{p}'(t'); \mathbf{p}, t) e^{-\frac{t-t'}{\tau_p}} dt', \quad (5)$$

где  $\tau = \frac{\tau_p \tau_r}{\tau_p + \tau_r}$ , а  $\mathbf{p}'$  находится из решения уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \mathbf{F}(\mathbf{v}', t') \quad (6)$$

с начальным условием  $t' = t$ ,  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ . Пусть монохроматическая ЭМВ распространяется перпендикулярно оси СР:  $A_z = A_0 \cos(\omega t - kx)$ ,  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Решая

уравнение движения (6) и учитывая, что  $\frac{v}{c} \ll 1$ , находим

$$p'_z = p_z - \frac{e}{c}(A_z(t') - A_z(t)),$$

$$p'_x = p_x - \frac{\Delta\sqrt{\varkappa}}{2c} \left[ 2 \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{ed}{\hbar c} (A_z(t') - A_z(t)) \right\} \right. \\ \left. \times \cos \frac{p'_z d}{\hbar} - \sin \left\{ \frac{ed}{\hbar c} (A_z(t') - A_z(t)) \right\} \sin \frac{p'_z d}{\hbar} \right] \quad (7)$$

( $\varkappa$  — высокочастотная диэлектрическая проницаемость).

Для  $G(\mathbf{p})$  в дипольном приближении в случае водородоподобной примеси (в основном состоянии  $|0\rangle$ ) получим следующее выражение:

$$G(\mathbf{p}) = \frac{32\pi^2 a^3 \Delta^2}{V(1 + a^2 \mathbf{k}^2)^4 \hbar^2} \\ \times \left[ \cos^2 \frac{p_z d}{\hbar} \sum_{s=1}^{\infty} J_{2s}^2(b) \delta(\omega_{\mathbf{k},0} - 2s\omega) \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{p_z d}{\hbar} \sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1}^2(b) \delta(\omega_{\mathbf{k},0} - (2s+1)\omega) \right]. \quad (8)$$

Здесь  $J_s(b)$  — функция Бесселя  $s$ -го порядка,  $b = \frac{ed}{\hbar c} A_0 = \frac{eE_0 d}{\hbar \omega}$ ,  $V$  — объем кристалла. Из этого выражения видно, что члены сумм соответствуют вкладам от многофотонной ионизации.<sup>1</sup> При точном вычислении вероятности перехода (не в дипольном приближении) в знаменатель первого сомножителя войдут члены порядка  $\frac{a}{\lambda}$ , которыми можно пренебречь при  $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ . Ток увлечения

$$j_x = -\frac{e}{m} \int f(\mathbf{p}, t) p_x d^3 p, \quad (9)$$

где  $m$  — эффективная масса вдоль оси  $x$ . Подставляя в (9) функцию распределения (5), меняя порядок интегрирования и переходя к новым переменным в соответствии с (7), усредняя затем полученное выражение по периоду ЭМВ, находим постоянную составляющую тока увлечения:

$$\bar{j}_x = \left( 1 - J_0^2(b) - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_s^2(b)}{1 + (s\omega\tau)^2} \right) \\ \times \left( j_0^{(1)} + j_0^{(2)} \Phi_1(b) \right), \quad (10)$$

<sup>1</sup> Интегрируя  $G(\mathbf{p})$  по всем остальным состояниям непрерывного спектра, получим полную вероятность перехода  $G$ . Численное интегрирование показывает, что  $G$ , осциллируя, уменьшается с ростом  $E$ , стремясь к некоторому предельному значению (это явление при фотоионизации атомов называют стабилизацией атомов в поле лазерного излучения [10,11]).

где

$$\Phi_1(b) = \left( \sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1}(b) \Theta(\eta_s) \right. \\ \times \int_{-x_s}^{x_s} \frac{\sin^2 x \cos x \, dx}{\left[ 1 + \left( \frac{2ma^2}{\hbar^2} \right) \left( (2s+1)\hbar\omega - \frac{\Delta}{2}(1 - \cos x) - I \right) + \frac{a^2}{d^2} x^2 \right]^4} \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} J_{2s}^2(b) \Theta(\eta'_s) \right. \\ \left. \times \int_{-x'_s}^{x'_s} \frac{\cos^3 x \, dx}{\left[ 1 + \left( \frac{2ma^2}{\hbar^2} \right) \left( 2s\hbar\omega - \frac{\Delta}{2}(1 - \cos x) - I \right) + \frac{a^2}{d^2} x^2 \right]^4} \right), \quad (11)$$

где  $x_s = 2 \arcsin \sqrt{\xi_s} \Theta(1 - \xi_s) + \pi \Theta(\xi_s - 1)$ ,  $x'_s = 2 \arcsin \sqrt{\xi'_s} \Theta(1 - \xi'_s) + \pi \Theta(\xi'_s - 1)$ ,  $\xi_s = \frac{(2s+1)\hbar\omega - I}{\Delta}$ ,  $\xi'_s = \frac{2s\hbar\omega - I}{\Delta}$ ,  $\eta_s = \left\{ \frac{(2s+1)\hbar\omega}{I} \right\} - 1$ ,  $\eta'_s = \left\{ \frac{2s\hbar\omega}{I} \right\} - 1$ , скобки  $\{ \}$  обозначают целую часть числа,  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция ( $\Theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ ,  $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ),  $I$  — энергия ионизации основного уровня,

$$j_0^{(1)} = -en_0 \frac{\Delta\sqrt{\varkappa}}{2mc} \frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} \frac{\tau}{\tau_p}, \quad (12)$$

$\beta = \frac{\Delta}{k_0 T}$ ,  $n_0$  — концентрация электронов в минизоне проводимости в состоянии равновесия,  $I_n(\beta)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка от мнимого аргумента.

$$j_0^{(2)} = -\frac{4\pi^2 e N_0 \Delta^3 a^3 \tau \sqrt{\varkappa}}{cd\hbar^3}. \quad (13)$$

В предельном случае  $b \rightarrow 0$  находим

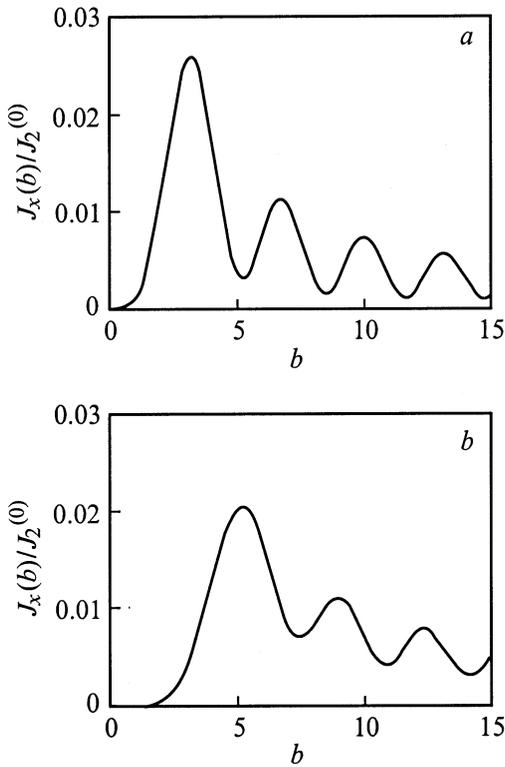
$$\bar{j}_x = \left[ j_0^{(1)} + j_0^{(2)} \frac{I}{\Delta} \left( \frac{eE_0 d}{\hbar \omega} \right)^2 \sqrt{\frac{\hbar\omega - I}{\Delta}} \right] \\ \times \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \left( \frac{eE_0 d}{\hbar \omega} \right)^2. \quad (14)$$

При выполнении неравенства

$$j_0^{(1)} \gg j_0^{(2)} \frac{I}{\Delta} \sqrt{\frac{\hbar\omega - I}{\Delta}} \left( \frac{eE_0 d}{\hbar \omega} \right)^2 \quad (15)$$

ток увлечения  $\bar{j}_x \sim E_0^2$  (ток увлечения линейно зависит от интенсивности ЭМВ). Это известный результат линейной теории светоэлектрического эффекта<sup>2</sup> [12]. Неравенство (15) выполняется при таких температурах, при которых примеси практически полностью ионизованы (для мелких примесей эта температура порядка 100 К).

<sup>2</sup> В случае однородного полупроводника  $\beta = \frac{\Delta}{k_0 T} \gg 1$ ,  $\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} = 1$ .



Зависимость тока увлечения  $j_x J_0^{(2)}$  от  $b = eE_0d/\hbar\omega$  при  $a - \hbar\omega = I = 0.01$  эВ и  $b - \hbar\omega = 0.5I = 0.005$  эВ.

При выполнении неравенств

$$J_0^{(1)} \ll J_0^{(2)} \frac{I}{\Delta} \sqrt{\frac{\hbar\omega - I}{\Delta}} \left( \frac{eE_0d}{\hbar\omega} \right)^2 \quad (16)$$

ток увлечения  $\bar{j}_x \sim E_0^4$ , т.е. ток увлечения пропорционален квадрату интенсивности ЭМВ. Это объясняется двухступенчатым характером возникновения тока: ионизацией примеси и последующим увлечением носителей ЭМВ. Как видно из (10), первый множитель этого выражения осциллирует с ростом  $b$ , множитель при  $J_0^{(2)}$  также имеет осциллирующий характер. При  $b \leq 1$ ,  $\omega\tau \gg 1$  и  $\hbar\omega > I$ ,  $\hbar\omega - I \ll \Delta$  можно дать следующую оценку тока увлечения:

$$\bar{j}_x \approx \frac{2}{3} J_0^{(2)} (1 - J_0^2(b)) \frac{J_1^2(b)}{[\omega\tau]^2} \frac{I}{\Delta} \varphi(b), \quad (17)$$

где  $\varphi(b) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_s^2(b)}{s^2} = \frac{1}{\omega\tau^2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t^2 J_0(2b \cos t) dt - \frac{\pi}{12} \times J_0^2(b) \right)$  [11], из которой видно, что ток вначале растет, а затем уменьшается с ростом  $b$ , обращаясь в нуль при  $b = b_1$ , где  $b_1$  — первая точка нуля функции  $J_1(b)$ . Такой характер поведения тока увлечения объясняется тем, что электрон под действием электрического поля ЭМВ проходит всю минизону проводимости и его скорость вблизи потолка минизоны обращается в нуль (соответственно обращается в нуль и магнитная составляющая

силы Лоренца). В случае  $b \geq 1$ , когда возрастает вклад многофотонных переходов, ток увлечения может быть найден численным интегрированием. На рисунке приведены два графика изменения  $\bar{j}_x/J_0^{(2)}$  от  $b = \frac{eE_0d}{\hbar\omega}$  при  $\omega\tau = 10$  и  $\frac{a}{d} = 1$ ,  $a = 10^{-7}$  см,  $\Delta = 10^{-1}$  эВ,  $I = 10^{-2}$  эВ,  $\hbar\omega = (1 \div 0.5) \cdot 10^{-2}$  эВ, построенные с привлечением методов численного интегрирования. Из приведенных графиков тока увлечения видно, что ток осциллирует с ростом  $b$ . Такое поведение тока увлечения объясняется прежде всего многофотонным характером ионизации примеси ЭМВ [13,14]. Многофотонный характер поглощения при этих условиях нужно учитывать для интенсивности  $J \geq 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>. Но кроме многофотонного поглощения в ток увлечения вносит вклад и первый множитель в (10), который так же осциллирует и при  $b \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к единице. Эти осцилляции вызваны непараболическим характером спектра энергии электронов СР (у потолка минизоны скорость электронов уменьшается). Таким образом осцилляции тока увлечения вызваны как многофотонным поглощением ЭМВ, так и непараболическим характером спектра энергии электронов СР. Уменьшение амплитуды осцилляций тока увлечения с ростом поля ЭМВ представляет, на наш взгляд, явление, связанное с отмеченной выше стабилизацией атома в поле лазерного излучения [8]. Для сравнения вкладов в ток увлечения от анизотропной части вероятности ионизации и от ее изотропной части (с последующим изменением электромагнитной волной функции распределения) находим анизотропную часть вероятности ионизации  $G_k^a$  и ток увлечения

$$\bar{j}_x^a = eN_0\tau \frac{V}{(2\pi)^3} \int G_k^a v_x d^3k = -\frac{8eN_0\tau \Delta^2 a q}{mld} \Phi_2(b),$$

где

$$\Phi_2(b) = \left( \sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1}(b) \Theta(\eta_s) \times \int_{-x_s}^{x_s} \frac{(2s+1) \left( (2s+1) \frac{\hbar\omega}{I} - 1 - \frac{\Delta}{I} \sin^2 \frac{x}{2} \right) \sin^2 x dx}{\left[ 1 + \left( \frac{2ma^2}{\hbar^2} \right) \left( (2s+1) \hbar\omega - \frac{\Delta}{2} (1 - \cos x) - I \right) + \frac{a^2}{d^2} x^2 \right]^5} + \sum_{s=1}^{\infty} J_{2s}^2(b) \Theta(\eta'_s) \times \int_{-x'_s}^{x'_s} \frac{2s \left( 2s \frac{\hbar\omega}{I} - 1 - \frac{\Delta}{I} \sin^2 \frac{x}{2} \right) \cos^2 x dx}{\left[ 1 + \left( \frac{2ma^2}{\hbar^2} \right) \left( 2s \hbar\omega - \frac{\Delta}{2} (1 - \cos x) - I \right) + \frac{a^2}{d^2} x^2 \right]^5} \right).$$

Отношение токов  $\frac{\bar{j}_x^a}{\bar{j}_x} = \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\hbar\omega}{\Delta} \right) \frac{\Phi_2(b)}{\Phi_1(b)}$  (при этом мы учли, что  $\frac{\hbar^2}{2ma^2} = I$ ). Мы видим, что при  $\hbar\omega \ll \Delta$  это отношение может стать значительно меньше единицы. Численное интегрирование при  $b = 1$  (5) и  $\hbar\omega = I$  и приведенных выше значениях остальных параметров

дает  $\frac{\Phi_2(b)}{\Phi_1(b)} = 2.3(4.1)$ , а при  $\hbar\omega = 0.5I$  и тех же значениях параметра  $b$   $\frac{\Phi_2(b)}{\Phi_1(b)} = 3(4.4)$ . Таким образом, в этом случае основной вклад в ток увлечения дает изотропная часть вероятности ионизации и последующее увлечение электронов полем ЭМВ.

## Список литературы

- [1] А.А. Игнатов. ФТТ, **22**(11), 3319 (1980).
- [2] Э.М. Эпштейн. ФТП, **14**(12), 2422 (1980).
- [3] Э.М. Эпштейн. Изв. вузов. Радиофизика, **24**(4), 514 (1981).
- [4] Э.М. Эпштейн. ФТП, **16**(12), 2231 (1982).
- [5] Н.А. Брынский, С.А. Сагдуллаева. ФТП, **12**(4), 798 (1978).
- [6] С.Д. Ганичев, С.А. Емельянов, Е.Л. Ивченко, Е.Ю. Перлин, Я.В. Терентьев, А.В. Федоров, И.Д. Ярошенко. ЖЭТФ, **91**(4), 1233 (1986).
- [7] Р.Я. Расулов. ФТП, **22**(11), 2077 (1988).
- [8] С.В. Крючков. ФТП, **25**(4), 740 (1991).
- [9] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками* (М., Наука, 1989).
- [10] Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов. УФН, **165**(11), 1295 (1995);
- [11] М.В. Федоров. УФН, **169**(1), 66 (1999).
- [12] К. Зеегер. *Физика полупроводников* (М., Наука, 1977).
- [13] Л.В. Келдыш. ЖЭТФ, **47**(5), 1945 (1964).
- [14] М.В. Федоров. *Электрон в сильном световом поле* (М., Наука, 1991).

Редактор В.В. Чалдышев

## Drag current at ionization of impurities by an electromagnetic wave in semiconductor superlattice

M.V. Vyazovskii, G.A. Syrodoev

Volgograd State Pedagogical University,  
400013 Volgograd, Russia