

Транспорт и разогрев электронов в полупроводниках с одномерной сверхрешеткой

© Ю.А. Романов, Е.В. Демидов

Институт физики микроструктур Российской академии наук,
603600 Нижний Новгород, Россия

E-mail: demidov@ipm.sci-nnov.ru

(Поступила в окончательном виде 23 февраля 1999 г.)

На основе уравнения Больцмана с новым модельным интегралом столкновений, учитывающим перераспределение энергии и импульса между всеми степенями свободы электрона, построена и исследована трехмерная модель электронного транспорта в одномерных полупроводниковых сверхрешетках (СР). Найдены ВАХ, средние энергии и эффективные температуры электронов при вертикальном и продольном транспорте. В отличие от одномерных моделей развитый в работе подход позволяет учесть и описать не только продольный, но и поперечный относительно направления тока разогрев электронов. При вертикальном транспорте поперечный разогрев существенно меняет положение, величину и ширину максимума тока. При продольном — возникает неквадратичный по полю разогрев электронов вдоль оси СР даже в приближении линейной ВАХ. Проанализирована возможность описания электронного транспорта в СР смещенным фермиевским распределением в анизотропной температурой.

Уникальные электрические свойства полупроводниковых сверхрешеток (СР) (отрицательная дифференциальная проводимость (ОДП) [1–3], абсолютная отрицательная проводимость [4,5], индуцированная [5] и самоиндуцированная [4] прозрачности и др.) обусловлены особенностями динамики электронов в узких мини-зонах (блоховскими осцилляциями), межминизонными переходами и релаксационными процессами, приводящими к разогреву электронного газа. Если динамика электрона в мини-зонах как в постоянном, так и гармоническом электрических полях исследована довольно хорошо, то релаксационные процессы электронов и их роль в свойствах СР изучены недостаточно. Полный неучет их приводит порой даже к качественно неверным результатам. В частности, по этой причине в [6] делается ошибочное утверждение об отсутствии эффекта самоиндуцированной прозрачности в бездиссипативной СР. Даже очень слабые столкновения качественно меняют спектр плазменных колебаний [7], динамику солитонов [8] и т.д.

Столь важная роль даже слабых столкновений в СР связана с возможностью проявления когерентности нелинейных блоховских осцилляций как в постоянном, так и в переменном электрических полях, описываемых бесстолкновительной динамикой одного электрона. Столкновения за время $\Delta t \geq \tau$ (τ — характерное время релаксации распределения электронов) разрушают эту когерентность, и соответствующие когерентные эффекты (например, колебания тока с блоховской частотой) исчезают. Эффект самоиндуцированной прозрачности содержит в себе эффект самовоздействия и генерацию гармоник. Известно [3], что полный неучет столкновений при рассмотрении эффекта самовоздействия даже в полупроводниках с малой непараболичностью приводит к результату, в 3 раза отличающемуся от правильного результата, полученного в пределе $\omega\tau \rightarrow \infty$ (ω — частота поля). Математически это означает, что переход к пределу $\omega\tau \rightarrow \infty$ в СР необходимо делать не в начале, а

в конце вычислений, так как в промежуточных формулах возникают неопределенности, отражающие зависимость результата от начальных условий и момента включения поля, т.е. от его начальной фазы.

При исследовании электрических свойств СР обычно используется классическое уравнение Больцмана с одним постоянным временем релаксации τ в интеграле столкновений (так называемое τ -приближение). В этом приближении движение электронов вдоль и поперек оси СР (при отсутствии поперечного магнитного поля) независимы. Поэтому, например, в параллельном оси СР электрическом поле (вертикальный транспорт) оно дает нулевой поперечный разогрев электронного газа. Некоторым лишь количественным уточнением τ -приближения является использование уравнения Больцмана с двумя постоянными временами релаксации — для симметричной и антисимметричной частей одномерной функции распределения [9] или соответствующих уравнений для дрейфовой скорости и средней продольной энергии электрона [4]. Все это варианты одномерной модели СР, в которых столкновения не перераспределяют между степенями свободы электрона энергию и импульс, полученные им от электрического поля. Однако при реальных столкновениях меняются и перемешиваются состояния электрона во всех трех направлениях. Поэтому происходит перераспределение энергии и импульса между его степенями свободы. Это, в частности, и приводит к разогреву электронного газа не только вдоль, но и поперек электрического тока, что естественно сказывается на ВАХ СР.

С целью выхода за рамки одномерных моделей в работах [10,11] развивается метод балансных уравнений, базирующихся на сдвинутой по импульсу трехмерной фермиевской функции распределения электронов с изотропной эффективной температурой T_e . Этот метод также является неудовлетворительным для описания транспортных и релаксационных процессов в СР.

В частности, он дает непрерывный рост T_e с ростом электрического поля \mathbf{E} , т.е. сильно завышенный поперечный разогрев, что противоречит расчетам по методу Монте-Карло [12] и простым физическим представлениям. Это является прямым следствием некорректной замены истинного распределения электронов сдвинутом фермиевским распределением. Действительно, если при $\mathbf{E} \rightarrow \infty$ $T_e \rightarrow \text{const}$ (точнее, средняя энергия электрона остается конечной величиной, а функция распределения стремится к некоторой предельной функции, что в действительности и имеет место в СР с узкими мини-зонами при вертикальном транспорте из-за быстрых блоховских осцилляций и случайного характера столкновений), то скорость передачи энергии, получаемой электронами от поля, решетке $\mathbf{jE} \rightarrow \text{const}$ (\mathbf{j} — плотность электрического тока). Следовательно, $\mathbf{j} \rightarrow 0$ при $\mathbf{E} \rightarrow \infty$. Для смещенной фермиевской функции распределения с изотропной температурой это возможно лишь при $T_e \rightarrow \infty$ (мы исключаем нереальное смещение на границу мини-зоны). В этом случае существует также вариант $\mathbf{j} \rightarrow \text{const}$, $T_e \rightarrow \infty$ при $\mathbf{E} \rightarrow \infty$. Утверждение о том, что электрон-электронные столкновения обеспечивают справедливость смещенного фермиевского распределения в СР, ошибочно [10]. Известно, что в кристаллах с узкими зонами Бриллюэна и (или) при наличии в них значительной доли открытых изоэнергетических поверхностей, что имеет место в СР, электрон-электронные столкновения сопровождаются, как правило, перебросами Пайерлса. Такие столкновения приводят к релаксации среднего импульса и дрейфовой скорости электронов (дополнительному сопротивлению образца) и, следовательно, к установлению "изотропной" (не сдвинутой по импульсу!) функции распределения. Этот результат хорошо известен в теории металлов с открытыми поверхностями Ферми [13]. С целью обоснования результатов работ [10,11] в [14] проанализирована роль перебросов Пайерлса при столкновениях электронов с примесями и фононами. Однако в качестве функции распределения электронов по-прежнему взята смещенная Ферми-функция с изотропной температурой. Поэтому уточнения являются только количественными и некорректность описания разогрева остается прежней.

Такое состояние теории затрудняет интерпретацию и понимание экспериментальных результатов по СР. Например, использование одномерной модели с двумя временами релаксации — скорости (ν_p^{-1}) и энергии (ν_ε^{-1}) — при обработке экспериментальных ВАХ в случае $\nu_p/\nu_\varepsilon = 10$ дает для ν_ε в 4 раза завышенное значение.

В настоящей работе изучены ВАХ и разогрев электронов в полупроводнике с одномерной СР с учетом всех трех степеней свободы электрона на основе уравнения Больцмана с трехмерным модельным интегралом столкновений, предложенным в [15]. Этот интеграл учитывает перераспределение полученных от поля энергии и импульса между всеми степенями свободы электрона и поэтому описывает как продольный, так и поперечный относительно тока разогрев электронного газа.

1. Основные соотношения

Будем исходить из следующей трехэтапной физической картины релаксационных процессов в электронном газе СР. На первом этапе, получив от электрического поля дополнительные энергию и импульс, электроны под действием квазиупругих столкновений (рассеяние на примесях, фононах, упругие межэлектронные столкновения, особенно с перебросами Пайерлса) равномерно распределяются по соответствующим изоэнергетическим поверхностям. При этом теряются направленный импульс и дрейфовая скорость электронного газа, но энергия каждого электрона сохраняется. Затем (или одновременно) путем нормальных и с перебросами Пайерлса неупругих межэлектронных столкновений происходит перераспределение энергии между электронами и дальнейшая релаксация их суммарного импульса. В результате функция распределения электронов релаксирует к несмещенному фермиевскому распределению с эффективной температурой T_e . Наконец на третьем этапе через неупругие столкновения (в основном с оптическими фононами) электроны передают энергию решетке и их распределение релаксирует к равновесному — фермиевской функции с температурой решетки. В соответствии со сказанным, уравнение Больцмана с модельным интегралом столкновений имеет вид

$$\frac{\partial f(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \frac{\partial f(\mathbf{k}, t)}{\partial \mathbf{k}} = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} = \frac{f(\mathbf{k}, t) - f_s(\varepsilon, t)}{\tau_1(\mathbf{k})} + \frac{f(\mathbf{k}, t) - f_0(\varepsilon, T_e)}{\tau_{ee}(\mathbf{k})} + \frac{f(\mathbf{k}, t) - f_0(\varepsilon, T_0)}{\tau_\varepsilon(\mathbf{k})}, \quad (2)$$

$$f_s(\varepsilon, t) = \int_{S_\varepsilon} f(\mathbf{k}, t) \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon|} / \int_{S_\varepsilon} \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon|}, \quad (3)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon \rangle_s = \langle \varepsilon \rangle_e, \quad (4)$$

где \mathbf{k} и ε — волновой вектор и энергия электрона, t — время, $f(\mathbf{k}, t)$, $f_s(\varepsilon, t)$, $f_0(\varepsilon, T_e)$ и $f_0(\varepsilon, T_0)$ — возмущенная полем, усредненная по эквипотенциальным поверхностям S_ε и равновесная фермиевские функции распределения электронов с эффективной температурой T_e и температурой решетки T_0 соответственно, $\langle \rangle$, $\langle \rangle_s$, $\langle \rangle_e$, $\langle \rangle_0$ — средние значения по этим функциям распределения, $\tau_1(\mathbf{k})$ — характерное время установления равномерного распределения электронов на изоэнергетических поверхностях под действием упругих столкновений, $\tau_{ee}(\mathbf{k})$ — обратная частота неупругих электрон-электронных столкновений, $\tau_\varepsilon(\mathbf{k})$ — время релаксации энергии электрона, e — заряд электрона, \mathbf{E} — электрическое поле, \hbar — постоянная Планка. Температура T_e определяется условием (4) — равенством средних энергий электрона по распределениям $f(\mathbf{k}, t)$ и $f_0(\varepsilon, T_e)$.

Интеграл столкновений (2) имеет две принципиальные особенности: первое и второе слагаемые описывают

перераспределение энергии и импульса между степенями свободы электронов, что отсутствует в одномерных моделях; из-за отмеченной выше существенной роли перебросов Пайерлса в интеграле электрон-электронных столкновений в отличие от [10,11] стоит не смещенная по импульсу, а обычная фермиевская функция распределения. Важно отметить, что $f_s(\varepsilon, t)$ есть "изотопная", а не симметричная часть функции распределения $f(\mathbf{k}, t)$, т.е. $f_s(\varepsilon, t) \neq [f(\mathbf{k}, t) + f(-\mathbf{k}, t)]/2$. Такое отождествление означало бы отсутствие при столкновениях перераспределения энергии и импульса электрона между его степенями свободы и соответствовало бы одномерной модели СР [4,9].

Для исследования электрических характеристик СР вместо кинетического уравнения иногда целесообразно использовать балансные уравнения — уравнения для тока (или средней скорости) и средней энергии электрона. Найдем эти уравнения стандартным путем из кинетического уравнения (1).

Закон дисперсии электронов СР в приближении сильной связи имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(k_3, \mathbf{k}_\perp) &= \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_\alpha(k_\alpha) \\ &= \frac{\Delta}{2} [1 - \cos(k_3 d)] + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\perp^2}{2m}, \quad \mathbf{k}_\perp(k_1, k_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где d — период СР, $\hbar k_3$, $\hbar \mathbf{k}_\perp$ — компоненты квазиимпульса электрона вдоль и поперек оси СР соответственно, Δ — ширина мини-зоны, ось x_3 направлена вдоль оси СР, оси x_1 , x_2 — вдоль слоев, m — эффективная поперечная масса электрона. Для простоты будем считать τ_1 , τ_{ee} , τ_ε , не зависящими от импульса электрона. В этом случае из (1)–(4) получим следующие уравнения для интересующих нас тока и средних энергий электрона:

$$\frac{d j_\alpha}{dt} - n e^2 \langle m_\alpha^{-1}(\varepsilon) \rangle E_\alpha = -\frac{j_\alpha}{\tau_p}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varepsilon_\alpha \rangle - \frac{1}{n} E_\alpha j_\alpha &= -\frac{\langle \varepsilon_\alpha \rangle - \langle \varepsilon_\alpha \rangle_s}{\tau_1} - \frac{\langle \varepsilon_\alpha \rangle - \langle \varepsilon_\alpha \rangle_e}{\tau_{ee}} \\ &\quad - \frac{\langle \varepsilon_\alpha \rangle - \langle \varepsilon_\alpha \rangle_0}{\tau_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \langle \varepsilon \rangle_s = \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon \rangle_e, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon \rangle - \frac{1}{n} (E j) = -\frac{\langle \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon \rangle_0}{\tau_\varepsilon}, \quad (9)$$

где

$$\langle m_3^{-1} \rangle = \left(\frac{\Delta}{2} - \langle \varepsilon_3 \rangle \right) \frac{d^2}{\hbar^2}, \quad (10)$$

$m_1 = m_2 = m$, n — концентрация электронов, $\tau_p^{-1} = \tau_1^{-1} + \tau_{ee}^{-1} + \tau_\varepsilon^{-1}$ — обратное время релаксации скорости. Линейная зависимость (10) $\langle m_3^{-1} \rangle$ от средней

продольной энергии является специфической особенностью закона дисперсии (5) и существенно упрощает решение задачи. Уравнение (9) является, очевидно, следствием уравнений (7) и приводится для удобства.

Можно показать, что для закона дисперсии (5) усредненная по изоэнергетической поверхности продольная энергия электрона

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_3^s(\varepsilon) &= \frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\varepsilon(\Delta - \varepsilon)}}{\arccos(1 - 2\varepsilon/\Delta)} \theta(\Delta - \varepsilon) \\ &= \begin{cases} \varepsilon/3, & \varepsilon \ll \Delta \\ \Delta/2, & \varepsilon > \Delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует, что для любых f_s всегда $\langle \varepsilon_3 \rangle_s < \Delta/2$. Это неравенство, конечно, справедливо и для равновесных распределений.

В отличие от интегро-дифференциальных уравнений (1)–(4) система уравнений (6)–(10) незамкнута. Для ее замыкания необходимо либо написать уравнения для высших моментов функции распределения, либо задать вид "изотропного" распределения $f_s(\varepsilon, T)$. Пусть концентрация электронов такова, что выполняется условие

$$\tau_{ee} \ll \tau_\varepsilon. \quad (12)$$

В этом случае межэлектронные столкновения почти полностью формируют распределение электронов по энергии. Поэтому учитывая, что по определению $f_s(\varepsilon, t)$ есть "изотропная" часть $f(\mathbf{k}, t)$, имеем

$$f_s(\varepsilon, t) \simeq f_0(\varepsilon, T_e). \quad (13)$$

Для простоты будем пользоваться равенством (13) при произвольном соотношении между временами релаксации. Тем самым объединяются упругие и неупругие электрон-электронные столкновения. Это приближение хотя и не всегда справедливо, но не страдает принципиальным недостатком смещенного по импульсу фермиевского распределения. В этом приближении для максвелловской статистики

$$\langle \varepsilon_\perp \rangle_s = \langle \varepsilon_\perp \rangle_e = k T_e,$$

$$\langle \varepsilon_3 \rangle_s = \langle \varepsilon_3 \rangle_e = \frac{\Delta}{2} \left[1 - \frac{I_1(\Delta/2T_e)}{I_0(\Delta/2T_e)} \right], \quad (14)$$

где $I_n(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. Теперь система уравнений (6)–(10), (14) является замкнутой и в том числе определяет эффективную температуру T_e . Заметим, что в некоторых случаях (см. далее) квазиупругие и межэлектронные с перебросами Пайерлса столкновения объединяются в один механизм без использования соотношения (13).

Для более точного рассмотрения транспорта в СР время релаксации τ_p следует считать тензором, а вместо τ_ε ввести разные времена релаксации энергии для каждой степени свободы электрона. Такой путь может быть реализован, но из-за большого числа параметров и отсутствия детальных исследований механизмов рассеяния в СР в настоящее время нецелесообразен.

2. Вертикальный транспорт

Пусть в СР существует только продольное поле: $E_3 = E$, $E_{\perp} = 0$. В этом случае, согласно (6)–(10), (14), электрический ток, средние энергии и эффективная температура электронов определяются соотношениями

$$\frac{j}{j_0} = \frac{E/E_*}{1 + (E/E_*)^2} \left[1 + \frac{\delta\langle\varepsilon_{\perp}\rangle}{\Delta/2 - \langle\varepsilon_3\rangle_0} \right], \quad (15)$$

$$\delta\langle\varepsilon_{\perp}\rangle \equiv \langle\varepsilon_{\perp}\rangle - \langle\varepsilon_{\perp}\rangle_0 = \left(1 - \frac{\nu_{\varepsilon}}{\nu_p} \right) \delta T, \quad (16)$$

$$\langle\varepsilon_3\rangle = \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta/2 + \langle\varepsilon_{\perp}\rangle - \langle\varepsilon\rangle_0}{1 + (E/E_*)^2}, \quad (17)$$

$$\left[1 + (E/E_*)^2 \right] \frac{I_1(x_e)}{I_0(x_e)} - \frac{I_1(x_0)}{I_0(x_0)} = \left[1 + \frac{\nu_{\varepsilon}}{\varepsilon_p} \left(\frac{E}{E_*} \right)^2 \right] \frac{2\delta T}{\Delta}, \quad (18)$$

где $j_0 = \sigma_0 E_* \sim \sqrt{\nu_{\varepsilon}/\nu_p}$, $E_* = \sqrt{\nu_{\varepsilon}\nu_p}\hbar/ed$ — эффективное поле, характеризующее нелинейность ВАХ СР,

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 d^2 \tau_p}{\hbar^2} \left(\frac{\Delta}{2} - \langle\varepsilon_3\rangle_0 \right) \quad (19)$$

— линейная проводимость СР, $\delta T \equiv T_e - T_0$, $\nu_{\varepsilon,p} = \tau_{\varepsilon,p}^{-1}$, $x_{0,e} = \Delta/2T_{0,e}$.

В отсутствии поперечного разогрева (одномерная модель) $\delta\langle\varepsilon_{\perp}\rangle = 0$ и безразмерный ток j/j_0 является универсальной функцией безразмерного поля E/E_* (множитель перед квадратной скобкой в (15)) и не зависит от ν_{ε}/ν_p и вида равновесной функции распределения. Второе слагаемое в квадратной скобке (15) дает поправку к результату одномерной модели [1,4], обусловленную поперечным разогревом электронного газа. Как показывают численные расчеты (см. далее), эта поправка может быть большой и даже превышать "основную" величину. Она приводит к значительным сглаживанию, росту и сдвигу j_{\max} в сторону больших полей на ВАХ СР. При больших значениях ν_p/ν_{ε} поперечный разогрев большой и может приводить к исчезновению ОДП СР. В пределе $\nu_p/\nu_{\varepsilon} \rightarrow \infty$ из (15)–(18) имеем

$$\frac{j}{j_0} \simeq \frac{E/E_*}{1 + (E/E_*)^2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}(1 - 2\langle\varepsilon_3\rangle_0/\Delta)} \times \sqrt{\frac{1 + (E/E_*)^2}{1 + (\nu_{\varepsilon}/\nu_p)(E/E_*)^2}} \right]. \quad (20)$$

Легко показать, что для любых полей

$$\langle\varepsilon_{\perp}\rangle < T_e, \quad \langle\varepsilon_3\rangle < \Delta/2, \quad \delta T < \frac{\Delta}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu_p}{\nu_{\varepsilon}}}. \quad (21)$$

При $E \rightarrow \infty$ и $\nu_p \gg \nu_{\varepsilon}$ из (18) имеем

$$T_e \simeq \frac{1}{2} \left(T_0 + \sqrt{T_0^2 + \Delta^2 \nu_p / 2\nu_{\varepsilon}} \right), \quad \langle\varepsilon_3\rangle = \frac{\Delta}{2}, \quad (22)$$

т.е. при $\nu_p/\nu_{\varepsilon} < 10$ поперечный разогрев не может превышать ширину мини-зоны Δ , что расходится с результатами работ [10,11,14], указывающими на неограниченный рост T_e с ростом поля. Если ввести продольную (T_{\parallel}) и поперечную (T_{\perp}) электронные температуры через соответствующие фермиевские распределения, то всегда $T_{\parallel} > T_{\perp}$, а в сильных полях $T_{\parallel} \gg T_{\perp}$, т.е. разогрев становится существенно анизотропным. При желании транспорт в СР можно описать смещенным фермиевским распределением, но с анизотропной температурой (см. далее).

Зависимости $j(E)$ и $T_e(E)$ для нескольких значений ν_p/ν_{ε} и $2T_0/\Delta$ приведены на рис. 1 и 2. В выбранных переменных кривые 3, 3' соответствуют одномерной мо-

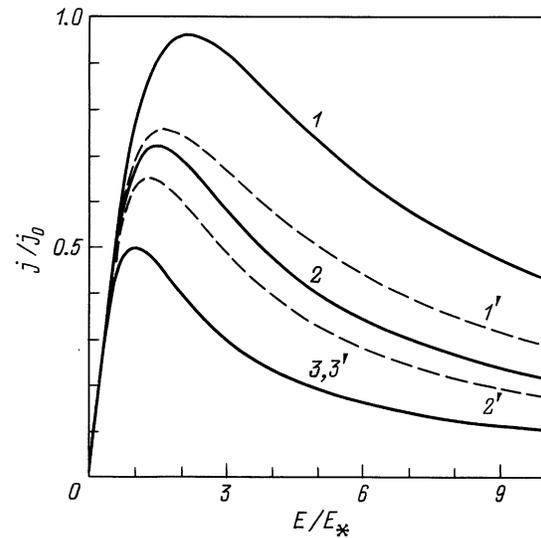


Рис. 1. Вольт-амперные характеристики СР при различных значениях T_0 и ν_p/ν_{ε} . $2T_0/\Delta = 1$ — сплошные линии, $2T_0/\Delta = 0.1$ — штриховые. ν_p/ν_{ε} : 1, 1' — 10; 2, 2' — 3; 3, 3' — 1.

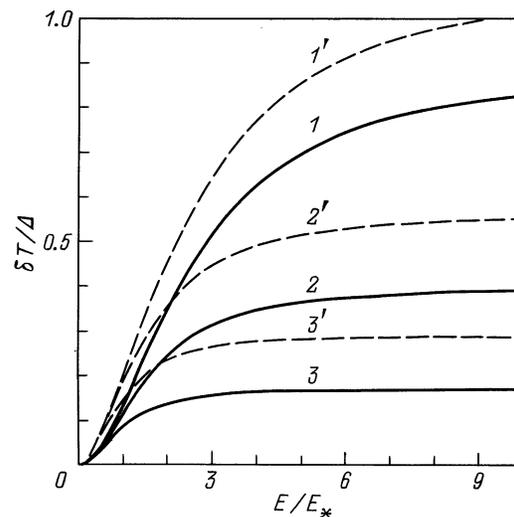


Рис. 2. Зависимость разогрева электронного газа в СР от электрического поля. Обозначения как на рис. 1.

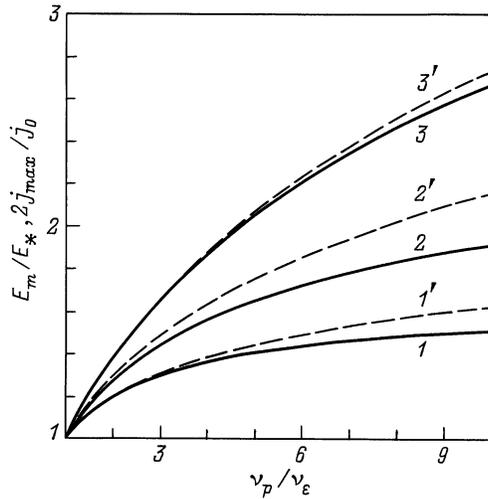


Рис. 3. Зависимость положения E_m/E_* (штриховые линии) и величины максимума тока $2j_{\max}/j_0$ (сплошные линии) в СР от ν_p/ν_ϵ при различных значениях $2T_0/\Delta$. $2T_0/\Delta$: 1, 1' — 0.1; 2, 2' — 1; 3, 3' — 3.

дели СР, не учитывающий поперечный разогрев электронного газа, при любых значениях ν_ϵ/ν_p . Отличие (значительное) от них кривых 1, 2 и 1', 2' целиком обусловлено поперечным разогревом электронов. На рис. 3 приведены изменения положения и величины j_{\max} от ν_p/ν_ϵ , обусловленные поперечным разогревом электронов (отличаем квадратной скобки в (15) от единицы). Эти изменения значительные и при обработке экспериментальных результатов их необходимо учитывать. Как уже указывалось выше, их неучет может привести к существенной ошибке при определении времен релаксации электронов из экспериментальных ВАХ. Например, отношение времен релаксации энергии, получаемых при обработке экспериментальных ВАХ, по формулам трехмерной и одномерной моделей $\tau_\epsilon^{(3)}/\tau_\epsilon^{(1)} = (E_m/E_*)^2$. В реальных ситуациях эта величина (см. рис. 1, 3) может достигать до 10. На рис. 4 приведены средние энергии $\langle \epsilon_3 \rangle$ и $\langle \epsilon_\perp \rangle$ в зависимости от поля. На рис. 5 — электронная температура T_e в максимуме тока. Заметим, что при $4T_0/\Delta < 1$ положение и значение j_{\max} (в безразмерных величинах) и $T_e(j_{\max})$ стремятся к постоянным значениям с ростом ν_p/ν_ϵ . При $4T_0/\Delta > 1$ эти величины (кроме тока) стремятся к ∞ . В обоих случаях размерный ток $j_{\max} \rightarrow 0$.

Приведем теперь решение уравнения (1) для функции распределения в статическом поле

$$f(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\hbar^2 nd}{m} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu_\epsilon I_\mu \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)}{T_0 I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2mT_0} \right) + \frac{(\nu_p - \nu_\epsilon) I_\mu \left(\frac{\Delta}{2T_e} \right)}{T_e I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_e} \right)} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2mT_e} \right) \right] \times \frac{\nu_p \cos(\mu k_3 d) + \mu \Omega \sin(\mu k_3 d)}{\nu_p^2 + (\mu \Omega)^2}, \quad (23)$$

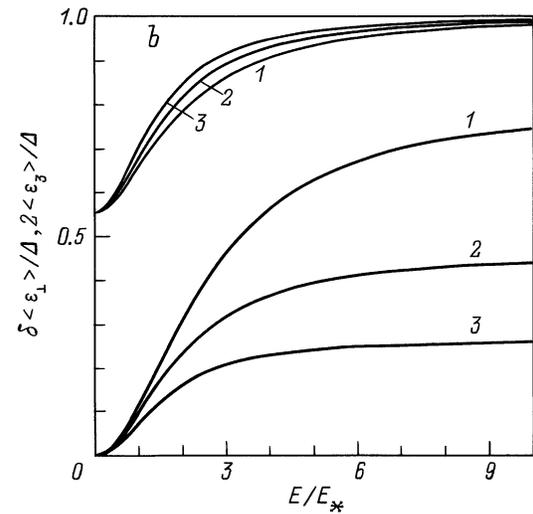
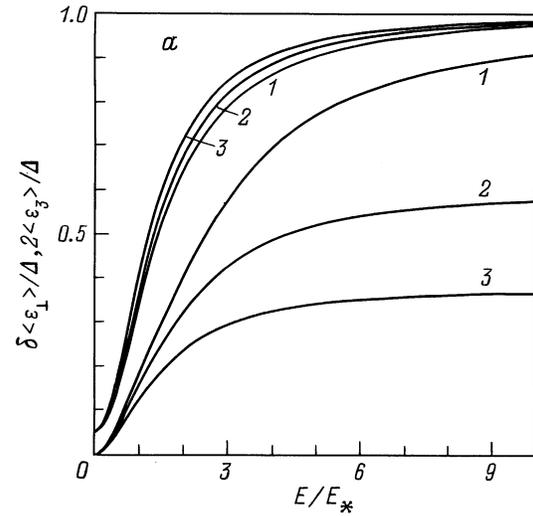


Рис. 4. Средние энергии электрона: $\langle \epsilon_3 \rangle / \Delta$ — верхняя и $\delta \langle \epsilon_\perp \rangle / \Delta$ — нижняя группа кривых в зависимости от поля при разных ν_p/ν_ϵ , $2T_0/\Delta = 0.1$ (а), $2T_0/\Delta = 1$ (б). Нумерация кривых как на рис. 1.

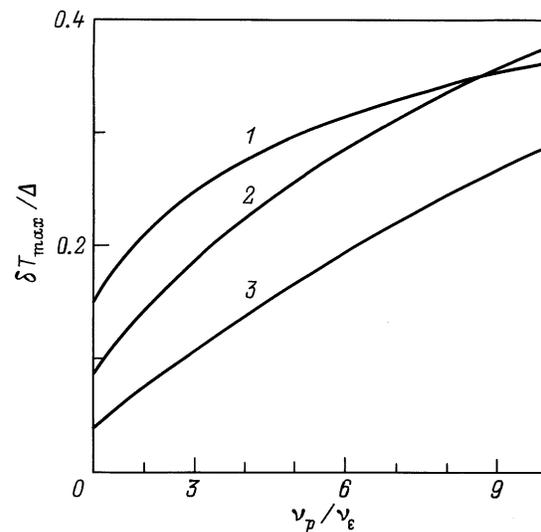


Рис. 5. Зависимость эффективной электронной температуры в максимуме тока от ν_p/ν_ϵ . Нумерация кривых как на рис. 1.

$$\langle k_3 \rangle = \frac{2\Omega}{d} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\nu_{\varepsilon} \frac{I_{\mu} \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)}{I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)} + (\nu_p - \nu_{\varepsilon}) \frac{I_{\mu} \left(\frac{\Delta}{2T_e} \right)}{I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_e} \right)} \right] \times \frac{(-1)^{\mu+1}}{\nu_p^2 + (\mu\Omega)^2}, \quad \Omega = eEd/\hbar. \quad (24)$$

Для простоты полагая в (23) $f_0(k_3) = n\delta(k_3)$ и $\tau_p = \tau_{\varepsilon} = \tau$, получим

$$f(k_3) = \frac{2\pi\hbar n}{eE\tau} \exp\left(-\frac{\hbar k_3}{eE\tau}\right) \times \begin{cases} [1 - \exp(-\frac{2\pi\hbar}{eEd\tau})]^{-1}, & k > 0 \\ [\exp(\frac{2\pi\hbar}{eEd\tau}) - 1]^{-1}, & k < 0 \end{cases} - \pi/d \leq k_3 < \pi/d. \quad (25)$$

Функция (25) даже отдаленно не похожа на сдвинутую максвелловскую при любых полях. Ее максимумы всегда находятся при $k_3 = 0$ и π/d .

Попытаемся аппроксимировать функцию (23) смещенным по импульсу на величину $\hbar k_0$ максвелловским распределением с анизотропной температурой

$$f(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\hbar nd}{mT_{\perp} I_0(\Delta/2T_3)} \times \exp\left\{-\frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2mT_{\perp}} + \frac{\Delta}{2T_3} \cos[(k_3 - k_0)d]\right\}, \quad (26)$$

где $T_{3,\perp}$ — эффективные температуры, характеризующие движение электронов вдоль оси и слоев СР соответственно. Функция (26) содержит три параметра: k_0 , T_3 , T_{\perp} , которые определяются средними скоростью (током), продольной $\langle \varepsilon_3 \rangle$ и поперечной $\langle \varepsilon_{\perp} \rangle$ энергиями электрона

$$\langle v_3 \rangle = v_m \left(1 - \frac{2\langle \varepsilon_3 \rangle T_3}{\Delta}\right) \sin(k_0 d) = v_m \frac{I_1(\Delta/2T_3)}{I_0(\Delta/2T_3)} \sin(k_0 d), \quad (27)$$

$$\langle \varepsilon_3 \rangle = \langle \varepsilon_3 \rangle_{T_3} \cos(k_0 d) + \varepsilon_3(k_0) = \frac{\Delta}{2} \left[1 - \frac{I_1(\Delta/2T_3)}{I_0(\Delta/2T_3)} \cos(k_0 d)\right], \quad (28)$$

$$\langle \varepsilon_{\perp} \rangle = T_{\perp}, \quad v_m = \Delta d/2\hbar. \quad (29)$$

Можно найти также средний квазиимпульс электрона (из-за переброгов Пайерлса он является плохой характеристикой системы)

$$\bar{k}_3 = \frac{2}{I_0(\Delta/2T_3)d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nk_0 d)}{n} I_n \left(\frac{\Delta}{2T_3} \right). \quad (30)$$

В отличие от параболического закона дисперсии

$$\bar{k}_3 \neq k_0, \quad v_3(k_0) \neq \langle v_3 \rangle \neq v_3(\bar{k}_3), \quad \langle \varepsilon_3 \rangle \neq \langle \varepsilon_3 \rangle_{T_3} + \varepsilon_3(k_0). \quad (31)$$

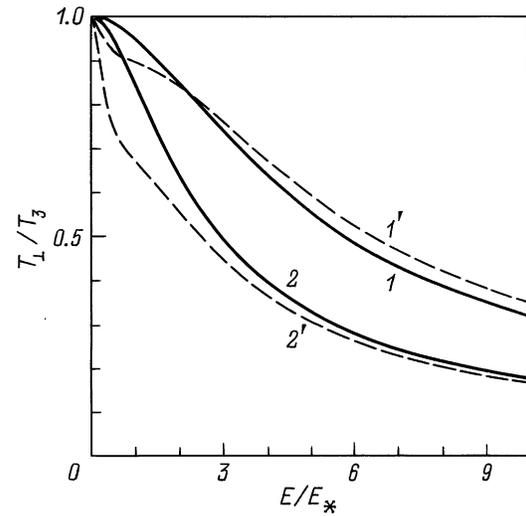


Рис. 6. Зависимость отношения электронных температур T_{\perp}/T_3 от поля. Обозначения как на рис. 1.

Только в слабых полях ($k_0 d \ll 1$) и низких температурах ($\Delta \gg T$) $\bar{k}_3 \simeq k_0$. В общем случае k_0 характеризует лишь положение максимума функции распределения.

Сравнивая (27)–(29) с (13), (14), получим соотношения, определяющие параметры k_0 , T_3 , T_{\perp} через поле,

$$\text{tg}(k_0 d) = \Omega \tau_p, \quad \Omega = eEd/\hbar, \quad k_0 d < \pi/2, \quad (32)$$

$$T_{\perp} = T_0 + \left(1 - \frac{\nu_{\varepsilon}}{\nu_p}\right) (T_e - T_0), \quad (33)$$

$$\frac{I_1 \left(\frac{\Delta}{2T_3} \right)}{I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_3} \right)} = \left[\frac{I_1 \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)}{I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)} + \left(1 - \frac{\nu_{\varepsilon}}{\nu_p}\right) \frac{2(T_e - T_0)}{\Delta} \right] \times \frac{\sqrt{1 + (\Omega \tau_p)^2}}{1 + \Omega^2 \tau_p \tau_{\varepsilon}}. \quad (34)$$

Температура T_e определяется уравнением (18). Для фермиевской статистики в (33) и (34) нужно сделать замену

$$\frac{I_1 \left(\frac{\Delta}{2T_{\alpha}} \right)}{I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_{\alpha}} \right)} \rightarrow 1 - \frac{2\langle \varepsilon_3 \rangle_{T_{\alpha}}}{\Delta},$$

$$T_{\alpha} \rightarrow \langle \varepsilon_{\perp} \rangle_{T_{\alpha}}, \quad \alpha = 0, e, \perp, 3. \quad (35)$$

Из (32)–(35), (15) следует, что при $E \rightarrow \infty$, $k_0 d \rightarrow \pi/2$, $\langle \varepsilon_3 \rangle \rightarrow \Delta/2$, $T_e \rightarrow \text{const}$, $T_{\perp} \rightarrow \text{const}$, $T_3 \rightarrow \infty$, что подтверждает корректность обсуждения разогрева электронов по Введению. На рис. 6 приведено отношение температур T_{\perp}/T_3 в зависимости от поля при $2T_0/\Delta = 0.1, 1$, $\nu_p/\nu_{\varepsilon} = 3, 10$. В сильных полях температура становится существенно анизотропной, и поэтому транспорт в СР нельзя описать смещенным фермиевским распределением с изотропной температурой, как это делается в [10,11,14].

3. Продольный транспорт

Пусть в СР существует только поперечное поле, $E_2 = E$, $E_1 = E_3 = 0$. В этом случае электрический ток, средняя энергия и эффективная температура электронов определяются, согласно (6)–(10), (12), соотношениями

$$j = \sigma E, \quad \sigma = \frac{ne^2}{m\nu_p}, \quad (36)$$

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_1 \rangle_0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \right) \delta T, \quad (37)$$

$$\langle \varepsilon_2 \rangle = \langle \varepsilon_2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \right) \delta T + \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \delta \varepsilon, \quad (38)$$

$$\langle \varepsilon_3 \rangle = \langle \varepsilon_3 \rangle_0 + \left(1 - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \right) (\delta \varepsilon - \delta T), \quad (39)$$

$$\frac{2\delta T}{\Delta} + \frac{I_1(\Delta/2T_0)}{I_0(\Delta/2T_0)} - \frac{I_1(\Delta/2T_e)}{I_0(\Delta/2T_e)} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^2, \quad (40)$$

где

$$\delta \varepsilon \equiv \langle \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon \rangle_0 = \frac{e^2 E^2}{m\nu_p \nu_\varepsilon} = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \quad (41)$$

— изменение полной энергии электрона в электрическом поле E , $E_0 = \sqrt{m\nu_p \nu_\varepsilon \Delta / 2e^2}$ — электрическое поле, в котором средняя энергия электрона увеличивается на $\Delta/2$. Оно того же порядка, что и эффективное поле E_* в СР при вертикальном транспорте и получается из него заменой $m_3(k_3 = 0) \rightarrow m$.

Линейность ВАХ СР в продольном поле (см. (36)) обусловлена приближением $\tau_p = \text{const}$. Грубость этого приближения и в этом случае не мешает качественно правильно описывать разогрев электронного газа и перераспределение его по степеням свободы. При необходимости можно заменить $\nu_{\varepsilon,p}$ на экспериментальные зависимости $\nu_{\varepsilon,p}(E)$ объемного материала.

На рис. 7 приведена функция

$$F \left(\frac{T_0}{\Delta}, \frac{E}{E_0} \right) \equiv \frac{\delta \langle \varepsilon \rangle - \delta T}{\Delta/2 - \langle \varepsilon_3 \rangle_0} = 1 - \frac{I_1 \left(\frac{\Delta}{2T_e} \right) I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right)}{I_1 \left(\frac{\Delta}{2T_0} \right) I_0 \left(\frac{\Delta}{2T_e} \right)}, \quad (42)$$

определяющая T_e и средние энергии электрона

$$T_e = T_0 + \frac{e^2 E^2}{m\nu_\varepsilon \nu_p} - \left(\frac{\Delta}{2} - \langle \varepsilon_3 \rangle_0 \right) F(T_0, E), \quad (43)$$

$$\langle \varepsilon_3 \rangle = \langle \varepsilon_3 \rangle_0 + \left(1 - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \right) \left(\frac{\Delta}{2} - \langle \varepsilon_3 \rangle_0 \right) F(T_0, E). \quad (44)$$

Средние энергии $\langle \varepsilon_{1,2} \rangle$ определяются равенствами (37), (38), (42)–(44). В пределе $E \rightarrow \infty$

$$\langle \varepsilon_3 \rangle \rightarrow \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \langle \varepsilon_3 \rangle_0 + \left(1 - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \right) \frac{\Delta}{2} < \frac{\Delta}{2}, \quad (45)$$

$$\frac{\delta \langle \varepsilon_1 \rangle}{\delta \langle \varepsilon_2 \rangle} = \frac{\nu_p - \nu_\varepsilon}{\nu_p + \nu_\varepsilon}. \quad (46)$$

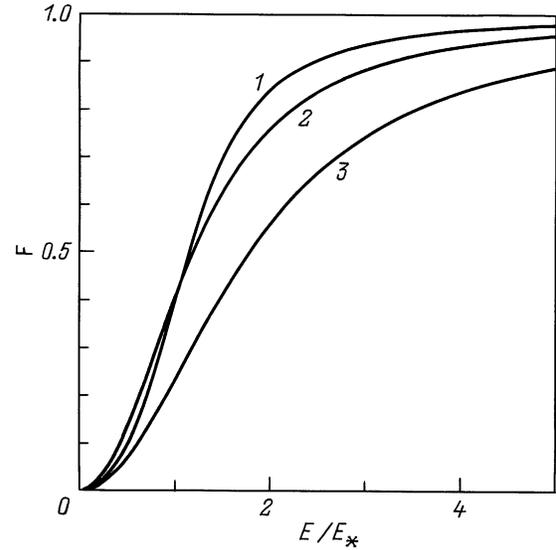


Рис. 7. Зависимость функции F от электрического поля. Нумерация кривых как на рис. 3.

Приведенные соотношения показывают, что из-за хаотизации направления импульса и при продольном транспорте возникает значительный разогрев электронного газа поперек тока, т.е. в данном случае вдоль оси СР. Это может быть использовано для параметрического взаимодействия волн с ортогональными поляризациями и нахождения отношения ν_ε/ν_p .

Приближенно продольный транспорт можно описать смещенным фермиевским распределением с анизотропной температурой

$$T_1 = T_e - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} (T_e - T_0), \quad T_2 = T_1 + \frac{e^2 E^2}{m\nu_p^2}, \quad (47)$$

температура T_3 определяется уравнением

$$\frac{I_1(\Delta/2T_3)}{I_0(\Delta/2T_3)} = \frac{I_1(\Delta/2T_0)}{I_0(\Delta/2T_0)} \left[1 - \left(1 - \frac{\nu_\varepsilon}{\nu_p} \right) F(T_0, E) \right],$$

$$T_3 < T_1. \quad (48)$$

При $E \rightarrow \infty$, $T_{1,2} \rightarrow \infty$, $T_3 \rightarrow \text{const}$, так как $\langle \varepsilon_3 \rangle < \Delta/2$, т.е. ситуация аналогична вертикальному транспорту.

4. Электронный транспорт в μ -мерных СР

Для выяснения роли влияния поперечного разогрева электронного газа на транспортные свойства одномерных СР в трехмерных кристаллах полезно провести сравнительный анализ транспорта в одномерных, двумерных

и трехмерных кристаллах с законом дисперсии

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\Delta}{2} \sum_{\alpha=1}^{\mu} [1 - \cos(k_{\alpha}d)], \quad (49)$$

где μ — размерность кристалла. Такой анализ важен, так как позволяет решить задачу без аппроксимации функции $f_s(\varepsilon, t)$ и тем самым оценить точность сделанных нами приближений. Случай $\mu = 1$ соответствует одномерной модели СР, случай $\mu = 2$ — двумерной СР, подробно исследованной в [15]. Принципиальным отличием (49) от закона дисперсии (5) для одномерной СР в трехмерном кристалле является ограниченность энергий электрона во всех направлениях. Поэтому в сильных полях для закона дисперсии (49) следует ожидать более слабого разогрева, чем для (5). В этих случаях в силу симметрии закона дисперсии (49) вместо (3,6,7) имеем

$$\langle \varepsilon_{\alpha} \rangle_s = \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle_e = \frac{1}{\mu} \langle \varepsilon \rangle, \quad (50)$$

$$\langle m_{\alpha\beta}^{-1} \rangle = \left(\frac{\Delta}{2} - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle \right) \frac{d^2}{\hbar^2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (51)$$

Благодаря соотношению (50) система уравнений (6)-(10), (50) становится замкнутой без какой-либо аппроксимации функции $f_s(\varepsilon, T)$, а эффективная температура T_e может быть найдена в конце вычислений из формул (14) и (28). Это важное обстоятельство, так как в какой-то мере позволяет оценить корректность приближения (13).

В статическом поле \mathbf{E} для тока и средних энергий имеем

$$j_{\alpha} = \sigma_0 \frac{\Delta/2 - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle}{\Delta/2 - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle_0} E_{\alpha}, \quad (52)$$

$$\frac{\Delta/2 - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle_0}{\Delta/2 - \langle \varepsilon_{\alpha} \rangle} = \left[1 + \left(\frac{E_{\alpha}}{E_0} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_p} - 1 \right) \times \sum_{i=1}^{\mu} \frac{(E_i/E_0)^2}{1 + (E_i/E_0)^2} \right], \quad (53)$$

где $E_0 = \hbar/ed\tau_p$, линейная проводимость σ_0 по-прежнему определяется соотношением (19).

Если электрическое поле направлено вдоль кристаллографической оси x ($E_x = E$), то ток и относительный разогрев электронов

$$j = \frac{\sigma_0 E}{1 + (E/E_*^{(\mu)})^2}, \quad (54)$$

$$\frac{\delta \langle \varepsilon_i \rangle}{\delta \langle \varepsilon_x \rangle} = \frac{\tau_{\varepsilon} - \tau_p}{\tau_{\varepsilon} + (\mu - 1)\tau_p}, \quad i \neq x, \quad (55)$$

где $D_*^{(\mu)} = E_0 / \sqrt{1 + (\tau_{\varepsilon}/\tau_p - 1)/\mu}$ — эффективное поле кристалла размерности μ , при котором ток имеет максимальное значение. В явном виде температура решетки входит только в σ_0 . Из-за одинаковой ограниченности энергий электронов во всех направлениях кристалла их

поперечный разогрев всегда меньше продольного, хотя и значителен. Отношение

$$\frac{E_*^{(\mu)}}{E_*^{(1)}} = \left[\frac{\tau_p}{\tau_{\varepsilon}} + \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_{\varepsilon}} \right) \right]^{-1/2} \quad (56)$$

описывает изменение положения и величины j_{\max} на ВАХ кристалла, обусловленное поперечным разогревом электронов. Эти изменения довольно велики. Например, для $\mu = 3$ и $\tau_p/\tau_{\varepsilon} = 10$ поперечный разогрев увеличивает эффективное поле (по сравнению с одномерной моделью) в 1.6 раза. Во столько же раз увеличивается j_{\max} , но максимум становится более размытым. Эти результаты находятся в качественном согласии с вышеприведенными результатами для одномерных СР в трехмерных кристаллах, что позволяет рассчитывать на достаточную корректность приближения (13).

Если поле направлено вдоль диагонали СР, то

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{1 + (\nu_p/\nu_{\varepsilon\mu})(\mathbf{E}/E_0)^2}. \quad (57)$$

Это токовое состояние является неустойчивым относительно поперечных возмущений [15].

В недавно появившейся работе [16] проведен сравнительный анализ различных методов описания электронного транспорта в СР. К сожалению, он проведен в предположении независимости электронной температуры от поля. Поэтому [16] не дает ответа на вопросы, рассматриваемые в настоящей работе.

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1) Поперечный разогрев электронного газа существенно меняет ВАХ СР.

2) Разогрев электронов в СР значительный и анизотропный. Поэтому электронный транспорт в них нельзя описывать ни в рамках одномерных моделей (даже с двумя временами релаксации), в которых полностью отсутствует поперечный разогрев, ни смещенным обычным фермиевским распределением, в котором разогрев изотропный.

3) Удовлетворительным и полезным для численных расчетов может быть смещенное по импульсу фермиевское распределение с анизотропной эффективной температурой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-02-19271) и INTAS-RFBR (грант № 96-615).

Список литературы

- [1] L. Esaki, R. Tsu. IBM J. Res. Dev. **14**, 61 (1970).
- [2] Р.Ф. Казаринов, Р.А. Сурис. ФТП **6**, 148 (1972); **7**, 488 (1973).
- [3] Ю.А. Романов. ФТП **5**, 1434 (1971); Оптика и спектроскопия **33**, 917 (1972); Многослойные полупроводниковые структуры и сверхрешетки / Под ред. А.М. Белянцева, Ю.А. Романова. ИПФ АН СССР, Горький (1984). 210 с.

- [4] А.А. Игнатов, Ю.А. Романов. ФТТ **17**, 3388 (1975); Phys. Stat. Sol. (b), **73**, 327 (1976); Изв. вузов. Радиофизика **21**, 132 (1978).
- [5] Ю.А. Романов, Л.К. Орлов. ФТТ **19** 726 (1977); ФТП **12**, 1665 (1978).
- [6] M. Holthaus. Phys. Rev. **B47**, 6499 (1993).
- [7] Ю.А. Романов. ФТТ **21**, 877 (1979).
- [8] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. Высоочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. Наука, М. (1989). 286 с.
- [9] С.А. Ктиторов, Г.С. Симин, В.Я. Синдаловский. ФТТ **13**, 2230 (1970).
- [10] X.L. Lei, N.J.M. Horing, H.L. Cui. Phys Rev. Lett. **66**, 3277 (1991); J. Phys. Condens. Matter. **4**, 9375 (1992).
- [11] X.L. Lei, X.F. Wang. J.Appl. Phys. **73**, 3867 (1973); X.L. Lei, N.J.M. Horing, H.L. Cui, K.K. Thomber. Phys. Rev. **B48**, 5366 (1993); Solid State Commun. **86**, 231 (1993); Appl. Phys. Lett. **65**, 2964 (1994).
- [12] P.J. Price. IBM J. Res. Dev. **17**, 39 (1973).
- [13] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. Наука, М. (1997). 527 с.
- [14] X.L. Lei. Phys. Rev. **B51**, 5526 (1995); J. Appl. Phys. **79**, 3071 (1996).
- [15] Ю.А. Романов, Е.В. Демидов. ФТП **31**, 308 (1997).
- [16] A. Wacker, A.-P. Jauho. Phys. Rev. Lett. **80**, 369 (1998).