

Локализация в системе связанных колец Ааронова–Бома

© И.Ю. Попов, В.А. Гейлер*, А.В. Попов*

Институт точной механики и оптики,
197101 Санкт-Петербург, Россия

* Мордовский государственный университет,
430000 Саранск, Россия

Последнее десятилетие квантовый транспорт в мезоскопических системах интенсивно изучается как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения [1–3]. Для систем мезоскопических колец в магнитном поле особый интерес представляет изучение связи между коэффициентом прохождения и величиной поля, точнее магнитным потоком Φ [1,4–6]. В частности, работа [5] посвящена изучению резонансных транспортных явлений в системе серийно соединенных колец. Установлено, что все состояния, близкие к $\Phi_0/2$ (Φ_0 — квант магнитного потока), являются анитрезонансными.

В нашей статье предлагаются три явно решаемых модели, основанные на теории расширений операторов [7–9]. В первой модели рассмотрена система колец Ааронова–Бома, связанных в бесконечную цепь. Показано, что при условии $\Phi = \Phi_0(1/2 + k)$, k — целое, спектр состоит только из локализованных состояний. Во второй модели периодическая система колец связана с бесконечным квантовым проводом. Условие локализации включает соотношение между радиусом колец и длиной отрезка провода между двумя соседними точками соединения. Кроме того, в спектре есть и делокализованные состояния. Третья модель описывает квадратную решетку колец, соединенных в точках касания. Здесь показано наличие локализованных состояний и отмечены свойства спектра, аналогичные соответствующим свойствам для квантового бильярда.

Кольцо Ааронова–Бома радиуса R с магнитным потоком Φ описывается гамильтонианом

$$H_0^{AB} = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2i\frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{\partial}{\partial \phi} + \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \right),$$

где m^* — эффективная масса носителя заряда, ϕ — полярный угол. Известно, что спектр H_0^{AB} состоит из собственных чисел

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} \left(m - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2, \quad m \in Z,$$

которым соответствуют нормированные собственные функции $\psi_m(\phi) = \exp(im\phi)/\sqrt{2\pi R}$.

Пространство состояний для кольца есть $\mathcal{H}_0^{AB} = L_2(S_R)$, где S_R — круг радиуса R . Пространство состояний \mathcal{H}_0^{AB} для бесконечной системы изолированных колец есть ортогональная сумма пространств \mathcal{H}_0^{AB} . Чтобы "соединить" кольца, использован метод теории расширений [7,9–11]. Рассмотрим множество \mathcal{D}_1^{AB} функций из области определения оператора \mathcal{H}_0^{AB} , обращающихся в

нуль в точках $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. Ортогональную сумму \mathcal{D}_1^{AB} обозначим $\mathcal{D}^{(1)}$, а сужение H^{AB} на это множество — $S^{(1)}$. Гамильтониан модели ищем среди самосопряженных расширений $S^{(1)}$. Для описания расширений удобно пользоваться формулой Крейна для резольвент

$$G^{(1)}(\zeta) = G^{AB}(\zeta) - \Gamma^{(1)}(\zeta) \left[Q^{(1)}(\zeta) + A \right]^{-1} \Gamma^{(1)*}(\bar{\zeta}), \quad (1)$$

где A — самосопряженный оператор в $l_2(Z) \otimes C^2$, $Q^{(1)}$, $\Gamma^{(1)}$ — так называемые Q - и Γ -функции Крейна оператора $S^{(1)}$. В нашем случае Q -функция $Q^{(1)}(\zeta)$ есть аналитическая оператор-функция, действующая в гильбертовом пространстве $l_2(Z) \otimes C^2$, а Γ -функция $\Gamma^{(1)}(\zeta)$ действует из $l_2(Z) \otimes C^2$ в \mathcal{H}^{AB} , причем они находятся явно. Оператор A представляется с помощью блочной матрицы $\|A_{m,n}\|$, каждый элемент которой $A_{m,n}$ есть 2×2 -матрица. Учитывая серийность соединения колец, выбираем матрицы следующим образом: $A_{m,n} = 0$, при $m \neq n \pm 1$ и

$$A_{m,m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{m,m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tau \neq 0$ — вещественный параметр, зависящий от свойств контакта между кольцами. В результате получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{m^*}{\hbar^2 E} \sin^2(\pi R \sqrt{2m^*E}/\hbar) &= \frac{4\tau}{\hbar} \sqrt{\frac{m^*}{2E}} \\ &\times \left(\sin(\pi R \sqrt{2m^*E}/\hbar) \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \cos(2\pi p) \right) \\ &+ \tau^2 \left(\cos(2\pi R \sqrt{2m^*E}/\hbar) - \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где $0 \leq p < 1$ — квазиимпульс. Уравнение (2) показывает, что для $\Phi = (1/2 + n)\Phi_0$, n — целое число, спектр $H^{(1)}$ состоит только из собственных значений E_m , не зависящих от квазиимпульса p . Эти значения являются корнями уравнения

$$\text{tg}^2(\pi R \sqrt{2m^*E}/\hbar) = \frac{2\hbar^2 \tau^2 E}{m^*}.$$

Рассмотрим систему колец, подсоединенных к бесконечному проводу. А именно, соединим n -е кольцо с проводом в точке $x_n = a_n$, $a > 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Пространство состояний системы: $\mathcal{H} = L_2(R) \otimes \mathcal{H}^{AB}$.

Строим модель аналогично предыдущему случаю. Здесь только добавляется одномерный гамильтониан для оси

$$H_{free} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2}.$$

Не описывая вновь построение, которое аналогично предыдущему случаю, укажем результат. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m^*}{2\zeta}} \frac{\sin(a\sqrt{2m^*}\zeta/\hbar)}{\cos(a\sqrt{2m^*}\zeta/\hbar) - \cos(2\pi p)} = \tau^2 \hbar \sqrt{\frac{2E}{m^*}} \times \frac{\cos(2\pi R\sqrt{2m^*}E/\hbar) - \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\sin(2\pi R\sqrt{2m^*}E/\hbar)}. \quad (3)$$

Отметим, что левая часть (3) совпадает с известным выражением в модели Кронига–Пенни [8]. Дисперсионное уравнение показывает, что спектр $H^{(2)}$ имеет зонную структуру; $E = E_s(p)$, $p \in T$, $s = 1, 2, \dots$. Найдем условие появления локализованных состояний в спектре $H^{(2)}$. Пусть $E_k = \pi^2 \hbar^2 k^2 / (2m^* a^2)$, $k = 1, 2, \dots$ есть собственные значения для интервала длины a с условиями Дирихле на концах. Уравнение (3) показывает, что E_k будут локализованными состояниями в спектре $H^{(2)}$, если поток Φ удовлетворяет условию

$$\Phi = \left(\pm \frac{\pi R}{a} k + n\right) \Phi_0 \quad (4)$$

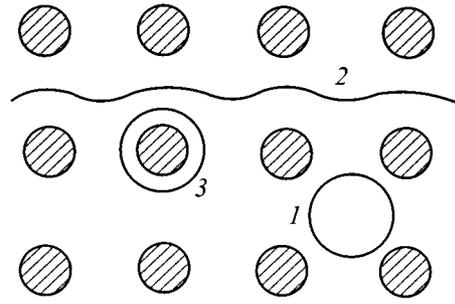
для целого n . Отметим, что если $a = l\pi R$ для некоторого целого l , то условие (4) выполнено для всех k . Но даже в случае $a = \pi R$ спектр $H^{(2)}$ содержит кроме уровней E_k делокализованные состояния. В этом случае непрерывные зоны спектра задаются дисперсионным соотношением

$$\cos(2\pi p) = \frac{m^*}{2\tau^2 \hbar^2 E} \cos(\pi R\sqrt{2m^*}E/\hbar) + \cos(\pi R\sqrt{m^*}E/\hbar).$$

Рассмотрим теперь квадратную решетку касающихся колец Ааронова–Бома. Будем здесь дополнительно предполагать, что поле \mathbf{B} есть сумма $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{AB}$. Первый член есть однородное магнитное поле B_0 . Дополнительный член \mathbf{B}_{AB} описывает магнитное поле, созданное периодической системой бесконечно тонких соленоидов (соленоидов Ааронова–Бома), находящихся в центре каждого кольца. Предполагаем, что магнитный поток в каждом соленоиде одинаков и равен Φ_{AB} . В этой ситуации гамильтониан H_{AB} электрона в кольце есть самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}_\lambda = L^2(\mathcal{S}_\lambda)$ (\mathcal{S}_λ — круг радиуса R), имеющий вид

$$H_{AB} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{i\hbar e}{2m^* c} \left(B_0 + \frac{\Phi_{AB}}{\pi R^2}\right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e^2}{8m^* c^2} \left(B_0^2 R^2 + \frac{2B_0 \Phi_{AB}}{\pi} + \frac{\Phi_{AB}^2}{\pi^2 R^2}\right), \quad (5)$$

где m^* и e есть масса и заряд частицы соответственно. Пусть Φ — полный магнитный поток через кольцо:



Различные типы квазиклассических траекторий в массиве квантовых антиоточек: 1 — замкнутые траектории, не охватывающие квантовых антиоточек; 2 — незамкнутые траектории, описывающие распространение электрона; 3 — замкнутые траектории, охватывающие одну или несколько антиоточек.

$\Phi = (\pi R^2 B_0 + \Phi_{AB}) / \Phi_0$, где $\Phi_0 = hc/e$ — квант магнитного потока. Пусть $\eta = 4R^2 B_0 / \Phi_0$ — поток однородной компоненты поля через элементарную ячейку решетки.

Связь между кольцами задаем, используя схему теории расширений операторов, действуя в духе подхода работы [12]. При этом мы принимаем во внимание, что гамильтониан модели должен быть инвариантен относительно группы магнитных трансляций. В итоге приходим к следующему результату.

Пусть η — рациональное число: $\eta = N/M$. Тогда спектр модельного самосопряженного оператора H_A состоит из двух частей: σ_1 и σ_2 . Первая, σ_1 , состоит из (бесконечно вырожденных) собственных значений H_A , которые являются одновременно собственными значениями ε_n оператора H_{AB} . Вторая часть, σ_2 , есть зонный спектр H_A . Этот спектр состоит из зон $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_l, \dots$, лежащих на интервалах $([-\infty, \varepsilon_3], [\varepsilon_0, \varepsilon_4], [\varepsilon_1, \varepsilon_5], \dots, [\varepsilon_n, \varepsilon_{n+4}], \dots)$ (зона Z_0 может быть пуста); каждая зона Z_n , $n \geq 1$, делится на M ”магнитных” подзон. Для фиксированного значения квазиимпульса каждая точка σ_2 вырождена с кратностью M .

Далее, если полный поток Φ не является четным целым, то часть σ_1 при произвольном выборе модельных параметров, вообще говоря, пуста. Если Φ — четное целое, то σ_1 содержит все собственные значения H_{AB} .

Существует и другая возможность появления связанных состояний в спектре $\sigma(H_A)$ — оно может появиться как ”вырожденная подзона”. А именно, если η целое: $\eta = N$, то при определенном выборе модельных параметров дисперсионное уравнение имеет решение, независимое от квазиимпульса.

Таким образом, если поток однородной компоненты магнитного поля η есть целое число и полный поток Φ через кольцо — четное целое, то спектр модельного гамильтониана H_A для квадратной решетки связанных колец Ааронова–Бома состоит из трех частей: 1) уровни изолированного кольца; 2) зонный спектр (зоны, расщепленные на ”магнитные подзоны”); 3) связанные состояния, удовлетворяющие дисперсионному уравнению и не совпадающие с уровнями изолированного кольца.

Отметим, что такая же структура спектра имеется и в модели квантового бильярда — периодического массива квантовых антиточек (см. [12]). При этом разным частям спектра соответствуют разные квазиклассические траектории электрона: 1) замкнутые траектории, не охватывающие квантовых антиточек; 2) незамкнутые траектории, описывающие распространение электрона по решетке; 3) замкнутые траектории, охватывающие одну или несколько антиточек (см. рисунок). Таким образом, со спектральной точки зрения построенную модель можно считать в некотором смысле простейшей моделью квантового бильярда.

Работа частично поддержана грантом РФФИ.

Список литературы

- [1] Y. Gefen, Y. Imry, M.Ya. Azbel. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 129 (1984).
- [2] R. Landauer. *Phys. Rev.* **B33**, 6497 (1986).
- [3] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer. *Phys. Lett.* **A96**, 365 (1983).
- [4] A. Aldea, P. Gartner, I. Corcotoi. *Phys. Rev.* **B45**, 14 122 (1992).
- [5] J. Li, Z.-Q. Zhang, Y. Liu. *Phys. Rev.* **B55**, 5337 (1997).
- [6] I.-R. Shi, B.-Y. Gu. *Phys. Rev.* **B55**, 4703 (1997).
- [7] B.S. Pavlov. *Lecture Notes Phys.* **324**, 3 (1989).
- [8] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Springer, Berlin (1988). 450 p.
- [9] I.Yu. Popov, S.L. Popova. *Europhys. Lett.* **24**, 373 (1993).
- [10] V.A. Geyler, I.Yu. Popov. *Z. Phys.* **B93**, 437 (1994).
- [11] V.A. Geyler, I.Yu. Popov. *Z. Phys.* **B98**, 473 (1995).
- [12] V.A. Geyler, B.S. Pavlov, I.Yu. Popov. *J. Math. Phys.* **37**, 5171 (1996).