

01;09

## Новый тип одномерного дискретного отображения

© А.А. Короновский

Государственный учебно-научный центр "Колледж" СГУ, Саратов

*Поступило в Редакцию 13 августа 1997 г.**В окончательной редакции 18 марта 1998 г.*

Предлагается и исследуется одномерное двухпараметрическое отображение, которое в своем поведении на плоскости управляющих параметров качественно повторяет динамику потоковой системы — радиотехнического генератора, описываемого системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано значительное совпадение поведений отображения и потоковой системы, а также сходство с результатами экспериментального исследования радиотехнического генератора, полученными ранее.

Генератор на туннельном диоде был сконструирован, исследован и описан Кияшко С.В., Пиковским А.С. и Рабиновичем М.И. [1–3]. В натурном и численном экспериментах ими было показано, что в данном генераторе имеют место хаотические колебания. В [4] экспериментальным путем была впервые получена подробнейшая карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров "инкремент затухания — параметр нелинейности", показывающая пути возникновения хаоса и закономерности переходов между различными типами сложнопериодических колебаний при изменении управляющих параметров. В [5] было проведено исследование той же системы, с тем лишь отличием, что вместо реального туннельного диода был использован его кусочно-линейный аналог, реализованный с помощью операционных усилителей. В ходе численного и натурального экспериментов было показано, что

замена нелинейного элемента его кусочно-линейным аналогом не ведет для данной системы к качественному изменению ее динамики.

Стоит отметить, что в основном описание рассматриваемой системы строилось на основе потоковой модели, т. е. в качестве базовой модели выбиралась система обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем не менее в [6,7] предлагалось отображение, полученное на основе исходных дифференциальных уравнений (характеристика туннельного диода аппроксимировалась кусочно-линейной функцией, правда, эта функция была гораздо более идеализированной и менее приближена к реальной, нежели описываемая в [5]), которое, несмотря на то, что было в неявном виде, позволяло наглядно объяснить сущность происходящих в системе процессов. Однако вопрос, насколько поведение этого отображения повторяет на плоскости управляющих параметров поведение потоковой системы, детально не рассматривался.

В настоящей работе предложено одномерное двухпараметрическое отображение, которое является дискретным аналогом вышеописанного генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода. Сразу следует отметить, что это отображение не выводится из системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику генератора [5], а "конструируется". Стоит подчеркнуть, что подобный подход ("конструирование" дискретных отображений, являющихся аналогами реальных физических систем с непрерывным временем) в последнее время получает все более широкое распространение [8,9]. В качестве базового было выбрано отображение, предложенное в [7], затем оно было аппроксимировано явно заданной непрерывной функцией, зависящей от двух параметров таким образом, чтобы при изменении значений этих параметров построенное отображение демонстрировало динамику, аналогичную динамике генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода.

Описываемое отображение принадлежит к принципиально новому классу отображений:

$$x_{n+1} = f_{\varphi}(\varepsilon, x_n). \quad (1)$$

Сущность данного типа отображений заключается в том, что одним из параметров, от которых зависит отображение, является угол поворота  $\varphi$  графика отображения относительно какой-либо опорной точки (например  $(0; 0)$ , как в рассматриваемом случае). Для "нулевого" угла поворота описываемое отображение имеет вид

$$f_0(\varepsilon, x) = y_1(x)\sigma(y_2(\varepsilon, x) - y_1(x)) + y_2(\varepsilon, x)\sigma(y_1(x) - y_2(\varepsilon, x)), \quad (2)$$

где функции  $y_1(x)$ ,  $y_2(\varepsilon, x)$  определены как

$$y_1(x) = 125x, \quad (3)$$

$$y_2(\varepsilon, x) = 2.85\sqrt{(0.45 + \varepsilon)^2 + (x - 0.85)^2} - 0.3, \quad (4)$$

а  $\sigma(x)$  — функция Хевисайда. Несмотря на внешне громоздкий вид отображения (2), принцип, по которому это отображение устроено, довольно ”прозрачен”: (3) описывает линейный участок отображения, который соответствует нахождению потоковой системы на  $\alpha$ -ветви характеристики кусочно-линейного аналога туннельного диода (см. [5]); (4) представляет собой ветвь гиперболы и соответствует нахождению генератора на  $\beta$ -ветви характеристики, а  $\sigma(x)$  ”сшивает” их в точке пересечения и обеспечивает непрерывность функции (2). Численные значения в соотношениях (3), (4) подобраны таким образом, чтобы обеспечить сходство динамики отображения и исходной потоковой системы.

Теперь, для того чтобы получить одномерное отображение при другом значении параметра  $\varphi$ , необходимо осуществить поворот графика отображения на этот угол  $\varphi$  относительно начала координат. Ясно, что для любого угла поворота  $\varphi \neq 0$  отображение  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  в явном виде (в общем случае) записано быть не может. Более того, при поворотах отображения, как нетрудно видеть, вполне возможно, что функция  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  станет неоднозначной. В этом случае возможно:

1. Исследовать поведение  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  как поведение отображения с гистерезисом. Заметим, что подобные отображения, график которых имеет неоднозначности, имеют под собой реальную ”физическую” основу.

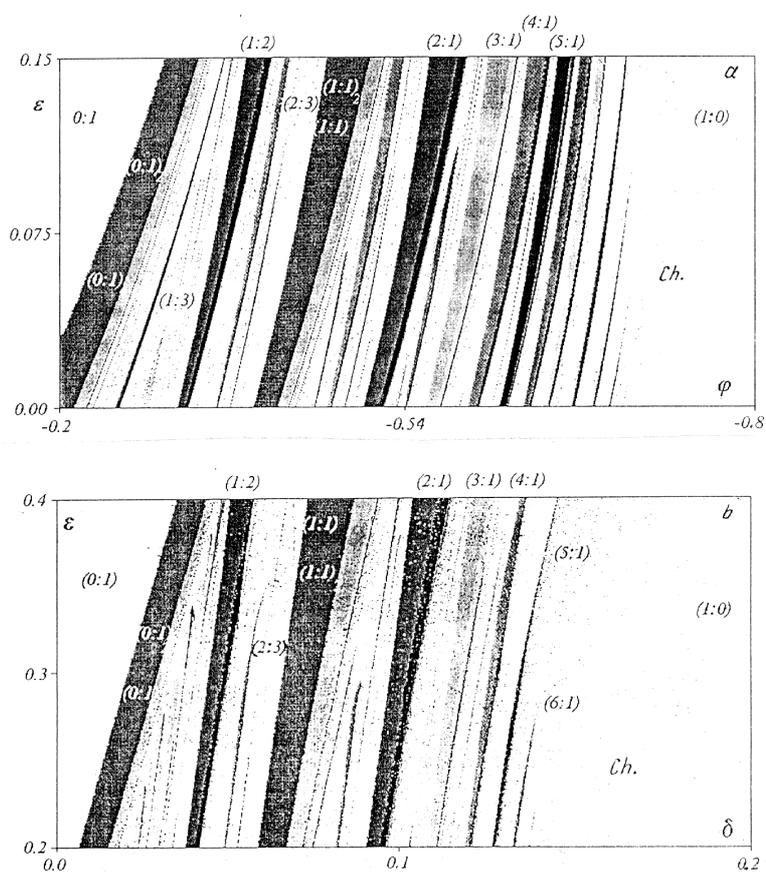
2. Рассматривать поведение  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  как однозначного отображения, выбрав какую-либо одну ветвь функции, как было сделано в данном случае: если для отображения  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  при некотором значении  $x$  возможны два значения  $f_\varphi(\varepsilon, x)$ , соответствующие ветвям  $y_1(x)$  и  $y_2(\varepsilon, x)$ , то в качестве значения  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  выбирается минимальное значение, соответствующее ветви  $y_2(\varepsilon, x)$ .

Какая физическая сущность стоит за поворотом графика отображения, и изменению какого параметра потоковой системы соответствует изменение угла поворота  $\varphi$ ? Понятно, что поскольку туннельный диод (или его кусочно-линейный аналог) является единственным нелинейным элементом в генераторе, то все особенности поведения потоковой

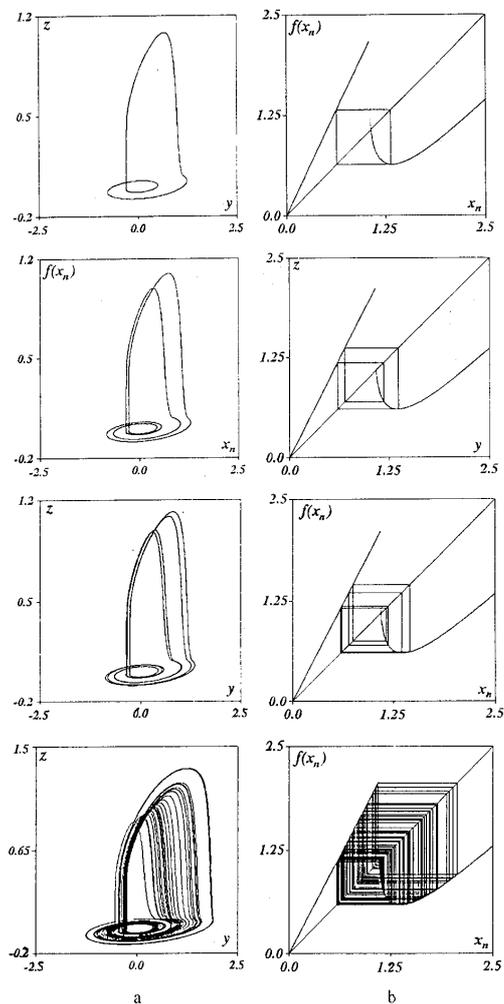
системы в значительной мере определяются свойствами этого нелинейного элемента. Ясно, что дискретное отображение должно нести на себе отпечаток нелинейного элемента системы. И, по сути дела, так оно и происходит, достаточно лишь взглянуть на график отображения, предложенного в [7], чтобы увидеть сходство между этим отображением и вольт-амперной характеристикой туннельного диода (или же опять-таки его кусочно-линейного аналога). Если в качестве переменной, на основании наблюдений за которой будет строиться одномерное отображение, выбрать значение тока, протекающего через диод (неважно, туннельный ли диод или его аналог), то одномерное отображение, иллюстрирующее зависимость, скажем, локального максимума значения тока на  $n$ -м шаге от максимального значения на предыдущем  $(n-1)$  шаге, будет качественно повторять вольт-амперную характеристику диода.

Одним из главных управляющих параметров в генераторе с кусочно-линейным аналогом туннельного диода является величина сопротивления  $r$ , включенного, по сути дела, последовательно с диодом [5]. Тогда диод и линейное сопротивление  $r$  можно рассматривать как один нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого при  $r = 0$  совпадает с вольт-амперной характеристикой диода (который, однако, имеет свое собственное сопротивление). В свою очередь, вид отображения (1) тогда будет определяться характеристикой именно этого "виртуального" нелинейного элемента. Нетрудно видеть, что с ростом величины сопротивления  $r$  вольт-амперная характеристика будет поворачиваться по часовой стрелке (следовательно, угол поворота  $\varphi$  должен быть отрицательным) и искажаться. Поскольку речь идет всего лишь о качественном соответствии поведения отображения динамике рассматриваемой системы, в первом приближении можно пренебречь искажением вольт-амперной характеристики нелинейного элемента (состоящего из диода и резистора), а следовательно, и искажением отображения (1), и предположить, что именно поворот является основным доминирующим фактором, определяющим свойства системы. Естественно, это всего лишь предположение, но, как будет видно из дальнейшего рассмотрения, это предположение оправдывается с хорошей степенью точности.

По аналогии с классификацией режимов генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода (см. [5]) колебательные режимы идентифицируются с помощью двух целых чисел  $(m : n)$ . Первое число  $m$  обозначает число точек последовательности  $\{x_k\}_{k=1}^{n+m}$  (которая



**Рис. 1.** *a* — карта режимов для отображения (1), построенная на плоскости управляющих параметров  $(\varphi; \varepsilon)$ ; *ch* — хаос. Поскольку изменению сопротивления  $r$  в генераторе с кусочно-линейным аналогом туннельного диода соответствует нелинейное изменение угла поворота  $\varphi$ , на карте режимов параметр  $\varphi$  отложен в нелинейном масштабе; *b* — карта режимов колебаний генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода на плоскости управляющих параметров  $\delta$  и  $\varepsilon$ , полученная в ходе численного эксперимента (*ch* — хаос). Параметр  $\delta$  является фактически безразмерным сопротивлением  $r$ , смысл и численные значения всех остальных параметров, при которых была построена эта карта, см. в [5].



**Рис. 2.** Переход к хаосу на базе режима  $(1 : 1)$ ; *a* — фазовые портреты поведения генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода; численный эксперимент ( $\varepsilon = 0.2$ ):  $(1 : 1)_1 \delta = 0.06$ ,  $(1 : 1)_2 \delta = 0.069$ ,  $(1 : 1)_4 \delta = 0.0705$ ,  $(1 : 1)_{chaos} \delta = 0.078$ ; *b* — одномерное отображение  $f_\varphi(\varepsilon, x)$  ( $\varepsilon = 0.05$ ):  $(1 : 1)_1 \varphi = -0.442$ ,  $(1 : 1)_2 \varphi = -0.464$ ,  $(1 : 1)_4 \varphi = -0.469$ ,  $(1 : 1)_{chaos} \varphi = -0.479$ .

является фактически периодом колебаний дискретного отображения), лежащих на линейном участке отображения (1), и соответствует полному числу оборотов фазовой траектории в плоскости "напряжение на емкости–ток через диод" для генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода. Число  $n$  в свою очередь определяется числом точек из той же последовательности, которые лежат на втором участке отображения (1), и соответствует полному числу витков фазовой траектории аттрактора, выходящих в пространство, для генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода [4,5].

Как видно из рис. 1, сходство динамики потоковой системы и дискретного отображения оказывается на редкость хорошим. На карте режимов отображения повторяются не только основные базовые циклы ( $m : 1$ ),  $m = 0, 1, 2, \dots$ , но и окна периодичности в областях, соответствующих хаотическим колебаниям. Также отчетливо просматривается для дискретного отображения сценарий перехода от периодических колебаний к хаотическим. Рис. 2 иллюстрирует этот сценарий на базе режима (1 : 1).

Таким образом, предложенное отображение (1) обеспечивает хорошее качественное совпадение поведения генератора с кусочно-линейным аналогом туннельного диода (потоковой системы) с динамикой этого отображения. Представляется весьма перспективным применение дискретных отображений, аналогичных вышеописанному отображению (1), для качественного изучения потоковых систем (в которых одним из управляющих параметров является параметр диссипации), в частности для построения карт режимов на плоскости управляющих параметров.

В заключение выражаю глубокую признательность к.ф.-м.н. А.А. Кипчатову за внимание к этой работе, ряд ценных советов и плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 96–02–16753.

## Список литературы

- [1] *Pikovsky A.S., Rabinovich M.I.* // Physica. 1981. V. 2D. P. 8–24.
- [2] *Рабинович М.И.* // УФН. 1978. Т. 125. С. 123–168.
- [3] *Пиковский А.С.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 7. С. 883.
- [4] *Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 4. С. 431–434.

- 
- [5] Андрушкевич А.В. и др. // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1. № 1, 2. С. 93–103.
- [6] Пиковский А.С., Рабинович М.И. // ДАН СССР. 1978. Т. 239. № 2. С. 301–304.
- [7] Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25. С. 336–343.
- [8] Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. // Chaos, Solution and Fractals. 1995. V. 5. N 11. P. 2095.
- [9] Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Zhalnin A.U. // Proc. of the 5<sup>th</sup> International Specialist Workshop of Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. NDES'97. Moscow, Russia. 26–27 June. 1997. P. 431–436.