

01

К теории внутреннего теплового равновесия в неоднородных структурах

© С.О. Гладков

Институт химической физики РАН, Москва

Поступило в Редакцию 5 сентября 1997 г.

В окончательной редакции 29 декабря 1997 г.

Для произвольного Р-компонентного композита выяснены особенности установления теплового баланса между фазами и вычислено характерное время выравнивания температур.

Решен вопрос о том, как влияет на временное поведение температуры композита распределение примесной фазы по размерам.

С помощью преобразования Лапласа найдено общее выражение для $\delta T_0(t)$, и для частиц мелкодисперсной фазы, функция распределения которых подчинена закону Пуассона, вычислен вполне конкретный вид этой функциональной зависимости.

Задачи, связанные с исследованием процесса теплопроводности в различных структурах типа кристаллических, аморфных, жидких и ряда других, уже значительно более сложных, к которым относятся, в частности, композиты и композиционные материалы, в большинстве своем решены, и по этим вопросам имеется огромное количество оригинальных статей и монографий. Наиболее полные сведения, отражающие существо задач в упомянутых веществах, содержатся в монографиях [1,2] (см. также статьи [3–7]), которые по праву считаются классическими и в которых нашли свое отражение и адекватное описание не только многочисленные экспериментальные данные, но и чисто прикладные расчетные задачи. Так, например, в [1] дано большое количество примеров решения фундаментальных практических задач, важных с точки зрения чисто инженерного применения.

Надо сказать, однако, что, несмотря на обширное отражение в упомянутых монографиях множества мыслимых и немыслимых примеров, есть, на наш взгляд, не менее важная не только с методической, но и с практической точек зрения задача, требующая адекватного описания и точного решения. Речь идет о композите, в состав основной матрицы

которого внедрены мелкодисперсные образования (в дальнейшем именуемые также примесной фазой или просто примесью) с иными, чем основная фаза, физическими параметрами. Представим себе, что такая структура подвергается нагреву. Поскольку как теплоемкости, так и коэффициенты теплопроводности обеих фаз различны, то нагрев композита будет крайне неравномерным и неоднородным. В связи с этим можно допустить, что в какой-то момент времени средняя температура в основной матрице будет T_0 , а в примесной фазе — T_β , где греческий индекс β , пробегающий значения $1, 2, 3, \dots, P$, характеризует количество физически различных фаз, число которых равно P . После этого нагрев прекращается, а композит мгновенно (в течение времени $\delta t \ll t_{\text{теплопр.}}$, где $t_{\text{теплопр.}}$ — характерное время установления температуры по всему образцу за счет теплопроводности) помещается в теплоизолированную среду. Возникает вопрос, как должно произойти перераспределение температуры в такой структуре, если (только определенности ради) считать, что $T_\beta > T_0$? Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая статья.

Пусть теплоемкость единицы массы основной матрицы есть c_{0m} , а примесной фазы $c_{\beta m}$. Понятно, что в результате контактного влияния мелкодисперсных примесей на основную матрицу и в силу их большого количества (хотя и малого размера!), температура T_0 возрастет, а температура T_β — уменьшится. Причем равновесная температура всех подсистем при $t \Rightarrow \infty$ будет, очевидно, равна

$$T_{eq} = \frac{m_0 c_{0m} T_0 + \sum_{\beta=1}^P m_\beta c_{\beta m} T_\beta}{m_0 c_{0m} + \sum_{\beta=1}^P m_\beta c_{\beta m}}, \quad (1)$$

где m_0 и m_β — соответственно массы обеих фаз.

Уравнения теплопроводности, описывающие приход обеих подсистем к единой средней температуре T_{eq} , запишем в виде следующей системы:

$$\begin{cases} C_0 \delta \dot{T}_0 = \varkappa_0 \Delta \delta T_0 - \sum_{\beta=1}^P \sum_{i=1}^{N_\beta} \alpha_{0\beta}^{*(i)} (\delta T_0 + \delta T_\beta^{(i)}), \\ C_\beta \delta \dot{T}_\beta^{(i)} = \varkappa_\beta^{(i)} \Delta \delta T_\beta^{(i)} - \alpha_{\beta 0}^{*(i)} (\delta T_0 + \delta T_\beta^{(i)}), \end{cases} \quad (2)$$

где N_β — полное количество частиц P -й примесной фазы, а новый индекс $i = 1, 2, 3, \dots, N_\beta$ нумерует эти частицы, $\delta T_0 = T_{eq} - T_0$, $\delta T_\beta^{(i)} = T_\beta^{(i)} - T_{eq}$, $C_0 = \rho_0 c_{0m}$, $C_\beta = \rho_\beta c_{\beta m}$, ρ_0 — плотность основной матрицы, ρ_β — мелкодисперсной фазы.

Коэффициенты α^* , фигурирующие в уравнениях (2) и (3), связаны с общепринятыми коэффициентами теплоотдачи соотношениями: $\alpha_{0\beta}^{*(i)} = \alpha_{0\beta}^{(i)}/\delta_1$ и $\alpha_{\beta 0}^{*(i)} = \alpha_{\beta 0}^{(i)}/\delta_2$, здесь $\alpha_{0\beta}^{(i)}$ — коэффициент теплоотдачи от основной матрицы к i -й частице примесной фазы β , а $\alpha_{\beta 0}^{(i)}$ — коэффициент теплоотдачи от i -й примеси фазы β к основной матрице, линейный размер δ по порядку величины соответствует длине пробега l той квазичастицы, которая характерна для данного вещества. В самом деле, если и основная матрица и примесная фаза — диэлектрики, а температура среды меньше температуры Дебая, то роль этих квазичастиц играют акустические фононы [8]. Если же температуры высокие, то это могут быть, например, оптические фононы. Значит, в случае диэлектрика $\delta_1 \cong l_{1ph} = c_{1s}\tau_1$, где c_{1s} — скорость звука в примесной фазе, а τ_1 — время релаксации, связанное с взаимодействием фононов примесной фазы с фононами в основной матрице в приграничной области. $\delta_2 \cong l_{2ph} = c_{2s}\tau_2$, где c_{2s} — скорость звука в основной матрице, а τ_2 — время релаксации, связанное с взаимодействием фононов основной матрицы с приграничными фононами в примесной фазе. Понятно, что ввиду различия фазовых объемов для обоих типов фононов времена релаксации τ_1 и τ_2 не равны друг другу. Надо еще заметить, что при слишком малом размере частицы мелкодисперсной фазы роль длины пробега и l_1 и l_2 может перейти просто к среднему линейному размеру этой частицы R .

Усредним уравнение (2) по некоторому произвольному объему δV , значительно большему, чем объем частиц мелкодисперсной фазы. То есть, $v_{\beta}^{(i)} \ll \delta V \ll V$, где $v_{\beta(i)}$ — объем i -й частицы β -й фазы, V — объем композита. Понятно, что при мысленном разбиении объема всего композита на q в среднем равных объемов $\delta V (q = V/\delta V)$, в каждом из элементов δV может находиться от одной до нескольких частиц примеси. В связи с этим будем считать изменение средней температуры $T_0 = \langle T_0 \rangle = \int T_0 dv / \delta V$, связанное с наличием в объеме δV нескольких примесей, равным естественным флуктуациям температуры основной матрицы. Это значит, что

$$\int_{\delta V} \varkappa_0 \Delta \delta T_0 dv / \delta V = (\varkappa_0 / \delta V) \int_{\delta S} \nabla \delta T_0 dS.$$

Но последний интеграл по порядку величины будет равен $\varkappa_0 \delta T_0 / L^2$ в силу непрерывности потока тепла из объема δV при условии, что на

поверхности δS , охватывающей объем δV , нет посторонних источников тепла. Последнее всегда можно сделать соответствующим выбором формы объема δV , исключая с его поверхности примесные частицы. Что касается параметра L , то он характеризует собой линейный размер области δV . В результате такого усреднения система уравнений (2)–(3) примет вид

$$\begin{cases} C_0 \delta \dot{T}_0 = -\alpha_0^* \delta T_0 - \sum_{\beta=1}^P \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_{0\beta}^{*(i)} \delta T_\beta^{(i)}, \\ C_\beta^{(i)} \delta \dot{T}_\beta^{(i)} = -\alpha_{\beta 0}^{*(i)} (\delta T_0 + \delta T_\beta^{(i)}). \end{cases} \quad (4)$$

Величина α_0^* , фигурирующая в уравнении (4), учитывает не только размеры области интегрирования L , но и сами границы между основной матрицей и примесной фазой. Действительно,

$$\alpha_0^* = \varkappa_0 / L^2 + \sum_{\beta=1}^P \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_{0\beta}^{*(i)}.$$

Поскольку речь идет о временах $\delta t \ll R_\beta^2 / \min\{\chi_\beta^{(i)}\}$, где $\chi_\beta^{(i)}$ — температуропроводность примесей, R_β — их линейный размер, то в уравнении (5) опущено неоднородное слагаемое $\varkappa_\beta^{(i)} \Delta \delta T_\beta^{(i)}$.

Решение уравнения (5) имеет, очевидно, вид:

$$\delta T_\beta^{(i)} = B e^{-\gamma_\beta^{(i)} t} - \gamma_\beta^{(i)} e^{-\gamma_\beta^{(i)} t} \int_0^t \delta T_0(\tau) e^{\gamma_\beta^{(i)} \tau} d\tau, \quad (6)$$

где

$$\gamma_\beta^{(i)} = \alpha_{\beta 0}^{*(i)} / C_\beta^{(i)}. \quad (6a)$$

Что касается константы интегрирования B , то о ней мы поговорим в конце вычислений.

Если вместо дискретного индекса i ввести функцию распределения частиц фазы β по размерам $f_\beta(R)$, то уравнение (4) с учетом реше-

ния (6) запишется следующим образом:

$$C_0 \delta \dot{T}_0 = -\alpha_0^* \delta T_0 - B \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{0R}^* e^{-\gamma_{\beta R} t} dR + \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{0R}^* \gamma_{\beta R} \int_0^\infty \delta T_0(\tau) e^{-\gamma_{\beta R}(t-\tau)} d\tau dR. \quad (7)$$

Решим полученное уравнение с помощью преобразования Лапласа. В самом деле, поскольку изображение

$$\delta T_p = \int_0^\infty \delta T_0(t) e^{-pt} dt, \quad (8a)$$

а оригинал

$$\delta T_0(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \delta T_p e^{pt} dp / 2\pi i, \quad (8b)$$

то из (7) имеем

$$C_0(\delta T(0) + p\delta T_p) = -\alpha_0^* \delta T_p - B \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{\beta 0R}^* dR / (p + \gamma_{\beta R}) + \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{\beta 0R}^* \gamma_{\beta R} dR \int_0^\infty dt \int_0^t \delta T_0(\tau) e^{-\gamma_{\beta R}(t-\tau) - pt} d\tau. \quad (9)$$

Последний интеграл при помощи изменения порядка интегрирования, что осуществляется благодаря преобразованию Дирихле [9], приводится к виду:

$$J = \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{\beta 0R}^* \gamma_{\beta R} dR \int_0^\infty dt \int_0^t \delta T_0(\tau) \exp\{-\gamma_{\beta R}(t-\tau) - pt\} d\tau = \delta T_p \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{\beta 0R}^* \gamma_{\beta R} dR / (p + \gamma_{\beta R}) \quad (10)$$

и окончательно имеем

$$\delta T_p = - \frac{C_0 \delta T(0) + B \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{\beta 0 R}^* dR / (p + \gamma_{\beta R})}{\alpha_0^* + C_0 p - \sum_{\beta=1}^P N_\beta \int_0^\infty f_\beta(R) \alpha_{\beta 0 R}^* \gamma_{\beta R} dR / (p + \gamma_{\beta R})}. \quad (11)$$

Вычислим δT_p для конкретной зависимости $f_\beta(R)$. Пусть, например, функция распределения задана в виде распределения Пуассона. То есть

$$f_\beta(R) = (R/R_{0\beta})^{k_\beta} \exp\{-R/R_{0\beta}\} / k_\beta! R_{0\beta}, \quad (12)$$

где k_β — целые числа.

Поскольку коэффициенты теплоотдачи $\alpha_{0\beta}$ ($\alpha_{\beta 0}$) обратно пропорциональны площади поверхности контакта, то $\alpha_{0\beta}$ ($\alpha_{\beta 0}$) пропорциональны R_0^{-2} . Учитывая (12) и (6а), интегралы, фигурирующие в (11), легко вычисляются с помощью теоремы Коши и теории вычетов. Положим $B = \delta T_0(0)$, тогда

$$\delta T_p = - \frac{C_0 + \sum_{\beta=1}^P N_\beta J_{1\beta}(p)}{\alpha_0 + C_0 p - \sum_{\beta=1}^P N_\beta J_{2\beta}(p)} \delta T_0(0), \quad (13)$$

где

$$J_{1\beta} = (\pi C_\beta / 4k_\beta!) (C_\beta p / \alpha_\beta^*)^{k_\beta/2+1} \exp\left\{- (C_\beta p / \alpha_\beta^*)^{1/2}\right\},$$

$$J_{2\beta} = (\pi C_\beta p / 4k_\beta!) (C_\beta p / \alpha_\beta^*)^{k_\beta+0.5} \exp\left\{- (C_\beta p / \alpha_\beta^*)^{1/2}\right\},$$

где C_β — теплоемкость β -й мелкодисперсной фазы, $\alpha_\beta^* = \alpha_\beta / \delta_1$, α_β — коэффициент теплоотдачи отдельной частицы β -й фазы.

С помощью преобразования Меллина изменение температуры основной матрицы можно записать таким образом

$$T_0(t) = T_{eq} - \delta T_0(0) \operatorname{Re} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{[e^{pt} (C_0 + \sum N_\beta J_{1\beta}(p))] dp}{[\alpha_0 + C_0 p - \sum N_\beta J_{2\beta}(p)]}. \quad (14)$$

Полученный интеграл легко оценить в двух предельных случаях: а) $|p| \gg \alpha_\beta^*/C_\beta$ и б) $|p| \ll \alpha_\beta^*/C_\beta$. В случае а) $\sum N_\beta J_{1,2\beta}(p)$ экспоненциально мала и интеграл (14) при $\sigma < \alpha_0^*/C_0$ дает

$$T_0(t) = T_{eq} - \delta T_0(0) e^{-\alpha_0^* t / C_0}, \quad (15)$$

то есть время остывания есть

$$t_{1ост.} \cong C_0 / \alpha_0^*. \quad (16)$$

В случае б) $\sum N_\beta J_{1,2\beta}(p)$ пропорциональна p^ν . Знаменатель интеграла (14) есть

$$Z = \text{знаменатель} = C_0 \left[\alpha_0^* / C_0 + p - (\pi p / 4) \sum_{\beta=1}^P ((C_\beta p / \alpha_\beta^*)^{k_\beta + 1.5}) / k_\beta! \right].$$

Допустим $k_\beta = 0$, тогда

$$Z / C_0 = (\alpha_0^* / C_0 + p - \pi p^{5/2} D / 4),$$

$$\text{где } D = \sum_{\beta=1}^P (C_\beta / \alpha_\beta^*)^{3/2}.$$

Значит, при больших $|p| \gg \alpha_0^* / C_0$ имеем

$$p_0 \cong (4\alpha_0^* / \pi C_0 D)^{2/5} \gg \alpha_0^* / C_0. \quad (17)$$

И следовательно, в этом случае время остывания есть

$$t_{2ост.} \cong (\pi C_0 D / 4\alpha_0^*)^{2/5}. \quad (18)$$

При α_0^* порядка α_β^* , C_0 порядка C_β , $t_{2ост.} \cong [\pi P (C_0 / \alpha_0^*) (C_0 / \alpha_0^*)^{3/2}]^{2/5}$. Или

$$t_{2ост.} \cong (C_0 / \alpha_0^*) P^{2/5} > t_{1ост.} \quad (19)$$

Итак, подводя итог проведенному исследованию, отметим основные наиболее важные, на наш взгляд, результаты.

1. Построена теория установления теплового равновесия в сложных композитных структурах, когда в основной матрице присутствует P примесных фаз с определенными физическими характеристиками (коэффициентом теплоотдачи α , теплоемкости C_β , теплопроводностью κ_β).

2. Показано, что весьма сильное влияние на время установления теплового равновесия оказывает распределение примесной фазы по размерам. Учет этого разброса осуществлен введением функции распределения $f_{\beta}(R)$.

3. Доказано, что время установления равновесия между обеими подсистемами (примеси + основная матрица) очень сильно зависит от количества примесных фаз (см. формулу (19)) и соотношения свойств между основной матрицей и примесной.

Список литературы

- [1] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
- [2] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974.
- [3] Бреслер М.С., Парфенов Р.В., Шалыт С.С. // ФТТ. 1966. Т. 8. С. 1776–1781.
- [4] Gladkov S.O. // Physica B. 1990. V. 167B. P. 159–174.
- [5] Burzo E., Teteanu R. // Sol. State Communic. 1993. V. 86. N 3. P. 493–500.
- [6] Гладков С.О. // ФТТ. 1997. Т. 39. № 9. С. 1622–1627.
- [7] Гладков С.О. // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 7. С. 8–12.
- [8] Гуревич В.Л. // Кинетика фононных систем. М.: Наука, 1980.
- [9] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1967.