

01

## Влияние массы частиц на поведение "stochastic ratchets"

© А.П. Никитин, Д.Э. Постнов

Саратовский государственный университет

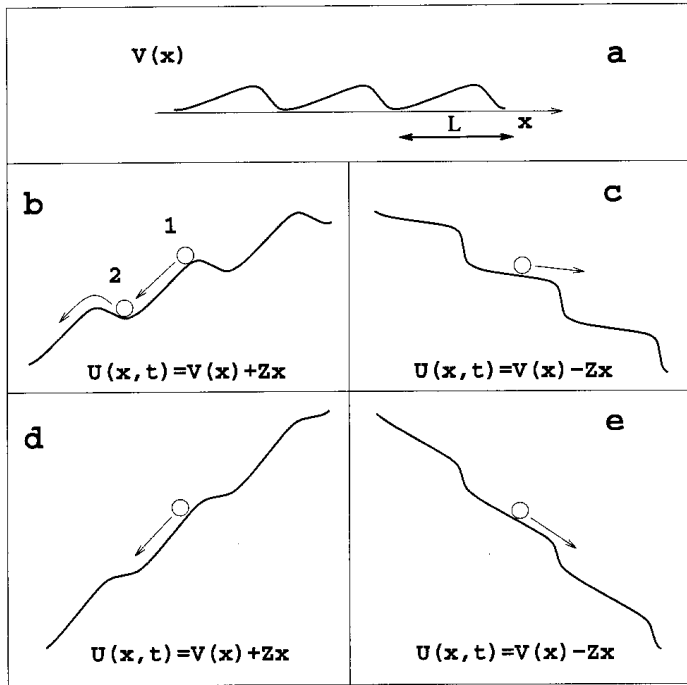
Поступило в Редакцию 5 февраля 1997 г.

Закономерности нелинейного броуновского движения в "stochastic ratchets" исследуются методами электронного моделирования. Экспериментально показана возможность сортировки частиц по массе при использовании в качестве источника неравновесности "stochastic ratchets" дискретного случайного процесса — бинарного шума.

Большой интерес исследователей к "stochastic ratchets" [1–5] обусловлен не только обнаруженными там эффектами фундаментального характера. Задачи, связанные с особенностями броуновского движения в нелинейных потенциальных полях, играют все большую роль в молекулярной биологии [1,4] и нанотехнологии [6]. Своё название "stochastic ratchets" получили из-за формы профиля анизотропного (асимметричного) пространственно-периодического потенциала (рис. 1, а). Благодаря асимметрии потенциала индуцированные шумом переходы через потенциальные барьеры могут иметь разную вероятность для противоположных направлений. Следствием этого будет появление ненулевого потока вероятности. Характерным для "stochastic ratchets" является то, что неравновесность в системе создается шумом, а не внешней постоянной макроскопической силой. Движение броуновской частицы может быть описано уравнением

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \xi(t) = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — пространственная координата,  $U(x, t)$  — потенциал,  $M$  — масса частицы,  $\gamma$  — вязкость, а  $\xi(t)$  — белый гауссов шум,  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = 2k_B T \gamma \delta(\tau)$ ,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  —



**Рис. 1.** *a* — типичный вид ratchet-потенциала, *b* и *c* — формы профиля  $U(x, t)$  при  $Z < \sup_x |dV(x)/dx|$ , *d* и *e* — формы профиля  $U(x, t)$  при  $Z > \sup_x |dV(x)/dx|$ .

температура. Запишем для (1) потенциал  $U(x, t)$  в виде

$$U(x, t) = V(x) + z(t)x, \quad (2)$$

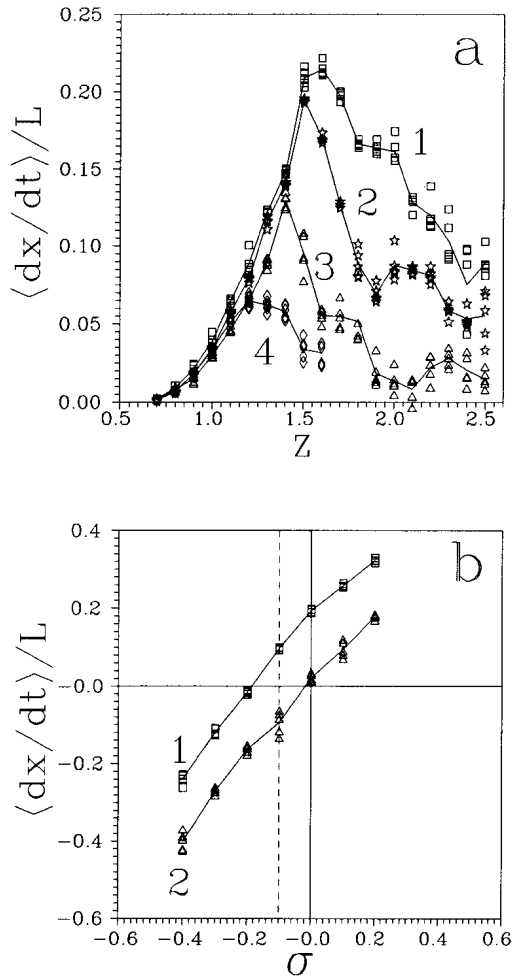
$V(x)$  — анизотропная (несимметричная) периодическая составляющая потенциала,  $V(x) = V(L + x)$ ,  $L$  — период потенциала. Типичный вид  $V(x)$  изображен на рис. 1, *a*. Здесь  $z(t)$  представляет собой некоторую случайную силу с нулевым средним значением. Если  $z(t) = 0$ , то, согласно флуктуационно-диссипационной теореме, белый гауссов шум  $\xi(t)$  будет являться равновесным для данной системы. Это означает, что вне зависимости от формы профиля потенциальных барьеров шум

$\xi(t)$  не может индуцировать направленное в среднем движение броуновских частиц. Однако введение внешнего шума  $z(t)$  способно вывести систему из равновесия и вызвать направленное в среднем броуновское движение. Причем, как было показано в [2,7], направление и величина индуцированного шумом  $z(t)$  потока частиц зависит от статистики шума  $z(t)$ .

В ряде случаев интересные в прикладном аспекте задачи могут быть сформулированы в приближении малых  $k_B T$  (высокие потенциальные барьеры  $V(x)$ ). В данной работе мы рассматриваем влияние массы частиц на процесс их транспортировки в "stochastic ratchets". Отметим, что обычно исследователи рассматривают передемпфированный режим, когда трение  $\gamma$  настолько велико, что слагаемым, содержащим массу  $M$  в (1), пренебрегают. Кроме того, такое упрощение способствует понижению порядка дифференциального уравнения и упрощает процедуру получения его решения.

Исследование "stochastic ratchets", как правило, проводится численными или приближенными аналитическими методами [2,3,7]. Получить точное аналитическое решение удастся только в редких случаях [2]. Поэтому наряду с численным экспериментом интересна возможность электронного моделирования стохастических систем. Мы построили на основе системы фазовой автоподстройки частоты электронный аналог "stochastic ratchets" [8,9] и провели серию экспериментов с целью выявления зависимости средней скорости броуновского движения от инертной массы частиц.

На рис. 2, а представлены результаты эксперимента, полученные на электронном аналоге "stochastic ratchets". Здесь и далее обсуждать полученные результаты будем на языке движения частиц. Эксперимент проводился в приближении низких температур ( $k_B T \rightarrow 0$ ). В качестве  $z(t)$  был выбран бинарный шум — дискретный случайный процесс, имеющий два возможных равновероятных состояния  $+Z$  и  $-Z$ , причем смена состояний возможна только в фиксированные моменты времени  $t_k = \Delta \pm kT_0$ , где  $T_0 = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  — целое неотрицательное число,  $\Delta$  — случайная величина, не зависящая от  $z(t)$  и равномерно распределенная на отрезке  $[0, T_0]$ . При такой статистике шума  $z(t)$ , согласно (2), потенциал  $U(x, t)$  будет переключаться между двумя профилями, как показано на рис. 1, b и c. Если амплитуда  $Z$  очень мала, то движение частицы будет только внутрияымным, т. е. в пределах одного периода потенциала. Когда  $Z$  превысит некоторое пороговое значение  $Z_1$ ,



**Рис. 2.** *a* — зависимость нормированной средней скорости  $\langle \dot{x} \rangle / L$  от амплитуды  $Z$  шума  $z(t)$ . Кривым 1–4 соответствуют величины масс:  $M = 0, 0.022, 0.1, 0.2$  соответственно. Остальные параметры:  $(\max V(x) - \min V(x))/L = 0.365, \gamma = 1, T_0 = 0.138$ . Все параметры приведены к безразмерному виду. *b* — зависимость нормированной средней скорости  $\langle \dot{x} \rangle / L$  от постоянного смещения  $\sigma$ . Кривой 1 соответствует масса  $M = 0$ , кривой 2 —  $M = 0.1$ .  $Z = 1.6$ .

частица сможет перемещаться на расстояния, большие, чем  $L$ . Такую ситуацию иллюстрируют рис. 1,  $b$  и  $c$ . Из-за асимметрии потенциала  $V(x)$  движение возможно только в одну сторону — направо. Движению налево препятствует потенциальный барьер. С возрастанием  $Z$  будет увеличиваться наклон профиля  $U(x, t)$ , а это приведет к возрастанию средней скорости движения частицы  $\langle \dot{x} \rangle$ . Отметим, что асимметричный потенциал  $V(x)$  ведет себя как вентиль, преобразуя энергию шума  $z(t)$  в направленное движение частицы. Здесь происходит преобразование энергии путем выпрямления случайной силы  $z(t)$ : движение частицы направо происходит под действием случайной силы  $z(t)$  за вычетом относительно небольших сил потенциала  $V(x)$ , движение частицы налево невозможно, поскольку силы потенциала  $V(x)$  компенсируют действие случайной силы  $z(t)$ .

Если амплитуда  $Z$  шума  $z(t)$  очень велика, то  $U(x, t)$  будет перекладываться между профилями, которые не будут иметь локальных минимумов и максимумов (рис. 1,  $d$  и  $e$ ). Это означает отсутствие потенциальных барьеров. Движение частицы возможно как направо, так и налево. Для очень больших величин амплитуды  $Z$  силы потенциала  $V(x)$  пренебрежимо малы, и оба направления движения для частицы становятся "равноправными". При этом средняя скорость частицы стремится к нулю ( $\langle \dot{x} \rangle \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим теперь ситуацию, проиллюстрированную на рис. 1,  $b$ . Пусть частица спустя некоторое время после переключения шума  $z(t)$  из состояния  $+Z$  в состояние  $-Z$  оказалась вблизи локального максимума  $U(x, t)$  (положение 1 на рис. 1,  $b$ ) и с нулевой начальной скоростью скатывается к локальному минимуму  $U(x, t)$  (положение 2 на рис. 1,  $b$ ). Если частица достаточно массивная (тяжелая), то она, очевидно, сможет по инерции продолжить свое движение и преодолеть потенциальный барьер.

Зависимость амплитуды шума  $Z^*$ , при которой движение налево становится возможным, от  $M$  очевидна: чем больше  $M$ , тем меньше значение  $Z^*$  необходимо, чтобы частица преодолела потенциальный барьер (рис. 1,  $b$ ). Если  $M = 0$ , то движение влево возможно лишь при  $Z^*$ , которое превышает значение  $z_2 = \sup_x |dV(x)/dx|$ . Понятно, что для более тяжелой частицы возможность движения влево при возрастании амплитуды  $Z$  наступит раньше, чем для легкой частицы. Ограничение роста средней скорости  $\langle \dot{x} \rangle$  наступает с превышением амплитудой  $Z$  значения  $Z^*$ , при котором движение частицы становится

возможным в обе стороны: как влево, так и вправо. Отсюда следует, что для более тяжелых частиц с увеличением амплитуды  $Z$  ограничение роста и последующий спад  $\langle \dot{x} \rangle$  наступает раньше, чем для легких (рис. 2, *a*).

Указанная выше закономерность может быть использована в целях сортировки частиц по массе под воздействием случайной силы. На рис. 2, *b* приведены результаты эксперимента, когда симметрия возмущающего на систему бинарного шума искусственно нарушалась смещением его на постоянную величину  $\sigma$  (в (2)  $z(t)$  заменили на  $z(t) + \sigma$ , где  $\sigma = \text{const}$ ), что соответствует введению небольшого постоянного наклона потенциала  $V(x)$ . Как можно видеть из графика, знак  $\langle \dot{x} \rangle$  при этом меняется в зависимости от массы частицы! Это означает, что частицы с массой, большей или меньшей некоторого критического значения, будут смещаться влево или вправо соответственно.

Следует отметить, что, устремив  $k_B T$  к нулю, мы избавили частицу от тепловых флуктуаций. Строго говоря, такая частица не является броуновской, так как отсутствует тепловое движение. Если положить  $k_B T$  отличным от нуля, но достаточно малым, то, очевидно, нелинейное взаимодействие шумов себя не проявит, и зависимость  $\langle \dot{x} \rangle$  от  $M$  сохранится. Для больших значений  $k_B T$  следует ожидать появления эффектов нелинейного взаимодействия шумов. Данная проблема представляется актуальной и требует дальнейших исследований.

Авторы благодарны профессору Гумбольдского университета Лутцу Шиманскому-Гайеру за проявленный интерес к результатам работы и плодотворное обсуждение проблемы.

Работа частично была поддержана Госкомвузом России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66) и российско-германским грантом DFG and RFFI 436 RUS 113/334/0(R).

## Список литературы

- [1] *Magnasco M.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2656–2659.
- [2] *Doering Ch.R., Horsthemke W., Riordan J.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2984–2987.
- [3] *Astumian R.D., Bier M.* // Phys. Rev.Lett. 1994. V. 72. P. 1766–1769.

- [4] Prost J., Chauwin J.-F., Peliti L., Ajdari A. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 2652–2655.
- [5] Bartussek R., Hänggi P., Kissner J.G. // Europhys. Lett. 1994. V. 28. P. 459–463.
- [6] Faucheux L.P., Bourdieu L.S., Kaplan P.D., Libchaber A.J. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 1504–1507.
- [7] Bier M. // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 12–16.
- [8] Постнов Д.Э., Никитин А.П., Анищенко В.С. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 9. С. 24–29.
- [9] Nikitin A.P., Postnov D.E., Anishchenko V.S. // Submitted to IEEE Trans. on Circuits and Systems I.