

01;05;12

Напряженное состояние матрицы и включения из скрученного многожильного сверхпроводника с нормально проводящей центральной областью при взаимодействии продольного тока с поперечным магнитным полем

© Е.А. Девяткин

Институт проблем механики РАН,
117526 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 14 сентября 1997 г.)

Рассмотрено напряженное состояние бесконечной матрицы и ”впяянного” в нее длинного цилиндрического включения из скрученного многожильного композитного сверхпроводника с центральной областью из нормального металла, обусловленное взаимодействием продольной составляющей транспортного тока с внешним однородным магнитным полем. Показано, что для расчета макроскопических напряжений в NbTi–Cu проводе, помещенном в оксидную матрицу, может использоваться приближение однородного провода с усредненными упругими свойствами.

В элементах конструкций сверхпроводящих магнитных систем могут возникать значительные напряжения и деформации, приводящие к нежелательным при низких температурах механическим диссипативным процессам и/или изменению сверхпроводящих свойств проводов [1–4]. В связи с этим представляет интерес изучение напряженно-деформированного состояния сверхпроводников и окружающих их материалов. В [5,6] рассмотрено напряженное состояние бесконечной матрицы и длинного макроскопически однородного цилиндрического включения из скрученного многожильного композитного сверхпроводника (СМКС) с транспортным током, обусловленное взаимодействием его продольной составляющей с однородным поперечным магнитным полем. Серийно выпускаемые и широко используемые на практике провода из СМКС могут иметь нормально проводящую центральную область с упругими свойствами, отличающимися от свойств кольцевой области содержащей сверхпроводник. Аналогичная плоская квазистатическая задача для такого провода с критическим транспортным током рассматривается ниже. Предполагается, что при описании физико-механических свойств сверхпроводящей области справедлив макроскопический подход; макроскопического экранирования внешнего поля не происходит; сверхпроводящие свойства провода не зависят от напряжений и деформаций в нем.

Рассмотрим ”впяянное” в бесконечную неферромагнитную матрицу включение единичного радиуса из СМКС, в области $\delta_s < r < 1$ которого, содержащей сверхпроводящие жилки, протекает продольный транспортный ток I_s (рис. 1). Будем считать, что матрица, сверхпроводящая область включения, а также его центральная область $0 \leq r < \delta_s$ линейно упруги, однородны и изотропны, их модули Юнга и коэффициенты Пуассона соответственно равны $E^{(n)}, \nu^{(n)}$ ($n = m, j, i$). Во внешнем однородном поперечном поле с индукцией \mathbf{B}_\perp на область с продольным током плотностью \mathbf{j}_s действует сила Лоренца $\mathbf{f} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{B}_\perp$. Взаимодействием круговой

компоненты транспортного тока с магнитным полем и неоднородностью распределения \mathbf{j}_s , вызванной скруткой провода, пренебрегаем.

В области $\delta_s < r < 1$ уравнения равновесия и совместности имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x}^{(j)} + \sigma_{xy,y}^{(j)} = 0, \quad \sigma_{yy,y}^{(j)} + \sigma_{yx,x}^{(j)} + 1 = 0, \\ \Delta(\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(j)}) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже все величины с размерностью давления нормированы на $2B_j^{(s)}B_\perp/[\mu_0 - \delta_s^2]$, $B_j^{(s)}$ — магнитное поле продольного тока на поверхности включения, μ_0 — магнитная постоянная, Δ — лапласиан. Напряжения в центральной области провода $\sigma_{kl}^{(i)}$ и окружающей его матрице $\sigma_{kl}^{(m)}$ ($k, l = x, y$) должны удовлетворять аналогичным однородным уравнениям. Полагаем, что вдали от включения матрица ненагружена ($\sigma_{kl}^{(m)} \rightarrow 0$ при

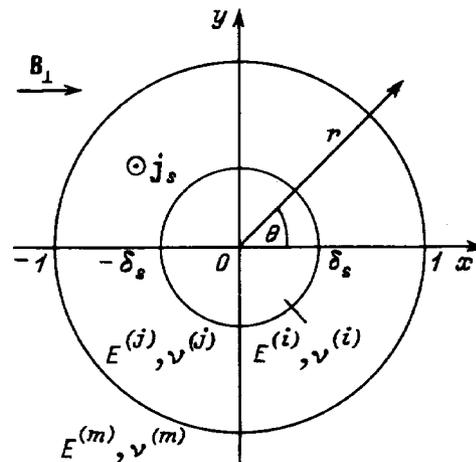


Рис. 1. Включение из скрученного многожильного композитного сверхпроводника с транспортным током в поперечном магнитном поле.

$t \rightarrow \infty$). Из условия склейки следует отсутствие на границах областей скачков перемещений, нормальных σ_n и касательных σ_τ к границам напряжений

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\sigma_n] = [\sigma_\tau] = 0 \quad \text{при } r = \delta_s, 1. \quad (2)$$

Решение задачи ищем в том же виде, что и для однородного включения [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)} &= ar \sin \theta, \quad \sigma_{rr}^{(m)} = [-gr^{-3} + (h+q)r^{-1}] \sin \theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)} &= 3ar \sin \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(m)} = (gr^{-3} + hr^{-1}) \sin \theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(i)} &= -ar \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(m)} = (gr^{-3} - hr^{-1}) \cos \theta, \\ \sigma_{rr}^{(j)} &= [(b-1)r - cr^{-3} + (d+e)r^{-1}] \sin \theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)} &= [(3b-1)r + cr^{-3} + dr^{-1}] \sin \theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(j)} &= -(br - cr^{-3} + dr^{-1}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

При плоской деформации $\sigma_{zz}^{(n)} = \nu^{(n)}(\sigma_{rr}^{(n)} + \sigma_{\theta\theta}^{(n)})$.

В пределе $r \rightarrow \infty$ напряжения в матрице должны совпадать с известным решением для сосредоточенной силы, действующей на плоскости (см., например, [7]). С учетом того, что в рассматриваемом случае сила Лоренца действует в направлении оси Oy и равна $I_s B_\perp$ в расчете на единицу длины включения, получаем

$$h = \frac{1 - \delta_s^2}{4} \frac{1 - 2\nu^{(m)}}{1 - \nu^{(m)}}, \quad q = \delta_s^2 - 1. \quad (4)$$

Из непрерывности напряжений (2) имеем

$$a - b + \frac{c}{\delta_s^4} - \frac{d}{\delta_s^2} = 0, \quad e = \delta_s^2, \quad b - c + d + g = h. \quad (5)$$

Деформации $\varepsilon_{kl}^{(n)}$ ($k, l = r, \theta$) связаны с перемещениями $\mathbf{u}^{(n)}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(n)} &= u_{r,r}^{(n)}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(n)} = \frac{u_r^{(n)} + u_{\theta,\theta}^{(n)}}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta}^{(n)} &= \frac{u_{r,\theta}^{(n)} - u_{\theta,r}^{(n)}}{r} + u_{\theta,r}^{(n)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Определяя деформации, соответствующие напряжениям (3) из закона Гука, и интегрируя затем в каждой из рассматриваемых областей уравнения (6), находим

$$\begin{aligned} u_r^{(i)} &= \frac{1 + \nu^{(i)}}{2E^{(i)}} [p + 4\nu^{(i)} ar^2] \sin \theta, \\ u_\theta^{(i)} &= \frac{1 + \nu^{(i)}}{2E^{(i)}} [p - (5 - 4\nu^{(i)}) ar^2] \cos \theta, \\ u_r^{(j)} &= \frac{1 + \nu^{(j)}}{2E^{(j)}} \left\{ s + [(1 - 4\nu^{(j)}) b - 1 + 2\nu^{(j)}] r^2 \right. \\ &\quad \left. + cr^{-2} + \frac{e}{2} \frac{3 - 4\nu^{(j)}}{1 - \nu^{(j)}} \ln r \right\} \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(j)} &= \frac{1 + \nu^{(j)}}{2E^{(j)}} \left\{ s - [(5 - 4\nu^{(j)}) b - 1 + 2\nu^{(j)}] r^2 \right. \\ &\quad \left. - cr^{-2} + \frac{e}{2} \frac{1 + (3 - 4\nu^{(j)}) \ln r}{1 - \nu^{(j)}} \right\} \cos \theta, \\ u_r^{(m)} &= \frac{1 + \nu^{(m)}}{2E^{(m)}} \left(gr^{-2} - \frac{1 - \delta_s^2}{2} \frac{3 - 4\nu^{(m)}}{1 - \nu^{(m)}} \ln r \right) \sin \theta, \\ u_\theta^{(m)} &= -\frac{1 + \nu^{(m)}}{2E^{(m)}} \left[gr^{-2} + \frac{1 - \delta_s^2}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 + (3 - 4\nu^{(m)}) \ln r}{1 - \nu^{(m)}} \right] \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь s и p — постоянные интегрирования, причем из однозначности перемещений следует

$$d = -\frac{e}{4} \frac{1 - 2\nu^{(j)}}{1 - \nu^{(j)}}. \quad (8)$$

Так как в работе используются лишь безразмерные величины, то, для того чтобы получить размерные перемещения, необходимо умножить правые части уравнений (7) на $2B_j^{(s)} B_\perp R / [\mu_0(1 - \delta_s^2)] = j_s B_\perp R^2$, где R — радиус провода. Используя условия непрерывности перемещений на границах областей с учетом уравнений (4) и (5), находим неизвестные коэффициенты

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta}{2\lambda_i}, \quad b = \frac{\beta + 3 - 4\nu^{(j)}}{8(1 - \nu^{(j)})}, \\ g &= -\frac{1}{4} \left(\frac{2\beta}{1 - \lambda_m} + \frac{1 - \delta_s^2}{1 - \nu^{(m)}} \right), \\ c &= \frac{\delta_s^4}{8(1 - \nu^{(j)})} \left[1 + \beta \left(1 - 4 \frac{1 - \nu^{(j)}}{\lambda_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 1 + (3 - 4\nu^{(i)}) \frac{1 + \nu^{(i)}}{1 + \nu^{(j)}} \frac{E^{(j)}}{E^{(i)}}, \quad \lambda_m = \frac{1 + \nu^{(m)}}{1 + \nu^{(j)}} \frac{E^{(j)}}{E^{(m)}}, \\ \beta &= (1 - \delta_s^2)^2 \left[1 - \delta_s^4 - 4(1 - \nu^{(j)}) \left(\frac{1}{1 - \lambda_m} - \frac{\delta_s^4}{\lambda_i} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь представлены лишь постоянные, необходимые для расчета напряжений. При $E^{(i)} = E^{(j)}$, $\nu^{(i)} = \nu^{(j)}$ решение (3)–(5), (7)–(9) совпадает с полученным в [6] для однородного включения. В пределе $\lambda_m \rightarrow 1$ имеем $a \rightarrow 0$. В этом случае область $0 \leq r \leq \delta_s$ ненапряжена и недеформирована при любых допустимых значениях ее упругих параметров и, как видно из уравнений (7), перемещается как жесткое целое. Решение для $\mathbf{u}^{(m)}$ при $r \rightarrow \infty$ совпадает с известным решением для перемещений от сосредоточенной силы [7], однако для их вычисления на всей плоскости оно не может быть использовано непосредственно, так как в пределе $r \rightarrow \infty$ имеем $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \infty$. Чтобы рассчитать перемещения например, в случае, когда на расстоянии $R_m \gg 1$ от включения они отсутствуют, необходимо добавить в решение (3)

для напряжений в матрице линейный по r член, а в решении для $\mathbf{u}^{(m)}$ оставить постоянную интегрирования, как это было сделано для других областей, и потребовать выполнения из условия $\mathbf{u}^{(m)} = 0$ при $r = R_m$. Наличие постоянных интегрирования не меняет деформаций, а следовательно и напряжений. При $R_m \rightarrow \infty$ решение для напряжений такой задачи совпадает с решением (3) и коэффициенты, входящие в него, равны найденным выше. Полагая $\delta_s \ll 1$ и устремляя $E^{(i)} \rightarrow 0$, получаем решение задачи для провода, имеющего соосный с ним узкий канал для прокатки охладителя. При этом коэффициент $\beta \approx [1 - 4(1 - \nu^{(j)})/(1 - \lambda_m)]^{-1}$ мало отличается от аналогичной величины для сплошного провода даже при наличии мягкой матрицы ($E^{(j)} \gg E^{(m)}$, т.е. $\lambda_m \gg 1$), если $\delta_s^4 \ll \lambda_i/|1 - \lambda_m|$ и $\delta_s^2 \ll 1$.

В качестве примера рассмотрим распределения напряжений в окруженном эпоксидной матрицей NbTi–Cu проводе, в котором модули Юнга центральной нормально проводящей и сверхпроводящей областей могут заметно отличаться. Исходя из представленных в [1,4] величин упругих параметров материалов при гелиевых температурах возьмем $E_i = 1.32 \cdot 10^{11}$ Па, $E_j = 9.7 \cdot 10^{10}$ Па, $E_m = 8 \cdot 10^9$ Па, $\nu_i = \nu_j = 0.33$, $\nu_m = 0.36$ ($\lambda_i = 2.24$, $\lambda_m = 12.4$). Если такой провод находится в медной матрице, имеем $\lambda_m = 0.74$. Для макроскопически однородного провода ($\lambda_i = 2.68$) с модулем Юнга, близким модулю Юнга меди, окруженного эпоксидной матрицей, получаем $\lambda_m = 16.9$. Если упругие свойства всех материалов одинаковы, то $\lambda_m = 1$. Из симметрии задачи ясно, что напряжения максимальны при $\theta = \pm\pi/2$ или $\theta = 0$, π , причем в последнем случае имеем чистый сдвиг. На рис. 2 представлены распределения напряжений в сверхпроводящей области однородного провода при $\delta_s = 0.3$ для случаев $\lambda_m = 1$ и 16.9. Сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые показывают соответственно радиальные распределения следующих компонент напряжений $\sigma_{rr}^{(j)}(r, -\pi/2)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}(r, -\pi/2)$ и $\sigma_{r\theta}^{(j)}(r, 0)$. Значки

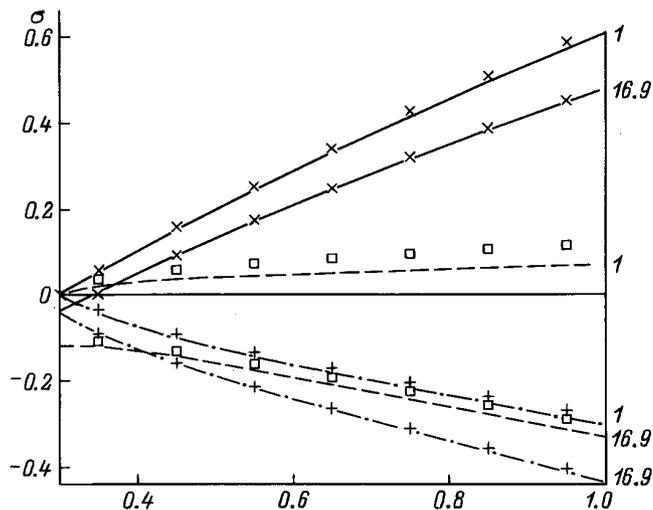


Рис. 2. Распределения напряжений в сверхпроводящей области провода из скрученного многожильного сверхпроводника.

на рис. 2 — напряжения в неоднородном проводе при $\lambda_m = 0.74$ и 12.4 и соответствуют ближайшим к ним кривым. Видно, что при заметно отличающихся модулях Юнга сверхпроводящей и нормально проводящей областей провода окруженного эпоксидной матрицей распределения напряжений в нем несильно отличается от случая однородного провода. При увеличении жесткости матрицы отличие $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$ компонента напряжений для этих случаев может быть значительным.

Таким образом, для расчета макроскопических напряжений в NbTi–Cu проводе с транспортным током, близким к критическому, помещенном в мягкую матрицу может быть использовано приближение однородного провода с усредненными упругими свойствами. Ошибка от использования такого приближения уменьшается при уменьшении объемного содержания сверхпроводника в проводе и использовании в качестве его матрицы более мягкой меди (в [1] для ее модуля Юнга при 4.2 К приводится значение $1.24 \cdot 10^{11}$ Па).

Взяв для оценок $j_s = 1.5 \cdot 10^9$ А·м⁻², $R = 7.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\delta_s = 0.3$ получаем, что максимальные сдвиговые напряжения в матрице, возникающие вблизи поверхности провода, достигают предела прочности эпоксидной смолы на сдвиг, равный $1-6 \cdot 10^6$ Па при 4.2 К [1] в поле с индукцией 2.1–12.5 Т. При этом максимальные растягивающие напряжения в проводе значительно меньше пределов текучести большинства металлов при гелиевых температурах. Критический ток, например, в Nb₃Sn проводах мало меняется при изменении напряжений в них на величину около 10^7 Па (см. [2,3] и цитированную там литературу). Однако такие напряжения, создаваемые в проводе силами Лоренца, при наличии внешнего магнитного поля 8–10 Т и внешних поперечных сжимающих нагрузок $> 5 \cdot 10^7$ Па могут приводить к заметным изменениям транспортного тока [3].

Полученное решение дает возможность рассчитать напряжения, обусловленные действием сил Лоренца в элементах конструкций, содержащих круглые провода из СМКС со слабым упругим взаимодействием между ними. Когда расстояние между поверхностями проводов составляет всего несколько их радиусов такое взаимодействие можно учесть как действие в матрице сосредоточенных сил [6]. Это связано с быстрым убыванием членов $\sim r^{-3}$ в решении для напряжений в матрице, что позволяет уже на сравнительно небольших расстояниях от проводов рассматривать их как сосредоточенные источники. Когда упругие свойства всех материалов близки, учет указанного взаимодействия сводится к простому наложению на полученное здесь решение соответствующих решений для сосредоточенных сил. В этом случае максимальные ошибки при вычислении напряжений в проводе связанные с заменой другого провода сосредоточенной силой уже при расстоянии между их поверхностями, равном трем радиусам $\nu_i = \nu_j = \nu_m \approx 0.3$ и $\delta_s^2 \ll 1$ для $\sigma_{rr}^{(j)}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ компонент напряжений составляют соответственно около 1 и 8%.

Список литературы

- [1] *Bobrov E.S., Williams J.E.S., Iwasa Y.* // *Cryogenics*. 1985. Vol. 25. N 6. P. 307–316.
- [2] *Paszter G., Anghel A., Jakob B., Wesche R.* // *IEEE Trans. Magn.* 1994. Vol. 30. N 4. P. 1938–1941.
- [3] *Ekin J.W.* // *J. Appl. Phys.* 1987. Vol. 62. N 12. P. 4829–4834.
- [4] *Goldacker W., Reiger C., Maurer W.* // *IEEE Trans. Magn.* 1991. Vol. 27. N 2. P. 946–949.
- [5] *Девяткин Е.А.* // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22. Вып. 10. С. 74–79.
- [6] *Deviatkin E.A.* // *Cryogenics*. 1997. Vol. 37. N 3. P. 129–134.
- [7] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.