

01;03

## Капиллярные колебания и устойчивость заряженной вязкой капли в вязкой диэлектрической среде

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов

Ярославский государственный университет,  
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 28 марта 1997 г.)

Методом скаляризации получено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной электропроводной капли в вязкой диэлектрической среде. Найдено, что инкремент неустойчивости заряженной границы раздела существенно зависит от вязкости и плотности окружающей среды, быстро снижаясь с их увеличением. В докритическом режиме влияние вязкостей и плотностей обеих сред приводит к немонотонной зависимости декремента затухания капиллярных движений жидкости от вязкости или плотности внешней среды при фиксированном значении вязкости или плотности внутренней среды. Убывание же частот капиллярных движений с ростом вязкости или плотности внешней среды в этом случае монотонно.

### Введение

Исследование электростатической неустойчивости заряженной капли вязкой жидкости, взвешенной в другой вязкой жидкости, представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями, в которых фигурирует подобный объект: в технологии для равномерного перемешивания несмешивающихся жидкостей, в практике сжигания жидких топлив для смешивания топлива и окислителя, в геофизических экспериментах (см., например, [1–4] и указанную там литературу). Тем не менее многие вопросы, связанные с этой проблемой, до сих пор исследованы слабо из-за сложной техники экспериментов и трудоемкости теоретических выкладок. Сказанное относится и к влиянию вязкости и плотности сред на закономерности реализации неустойчивости заряженной поверхности капель.

1. Рассмотрим систему, состоящую из двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями  $\rho^{(1)}$  и  $\rho^{(2)}$  и кинетическими вязкостями  $\nu^{(1)}$  и  $\nu^{(2)}$ . Из-за действия сил поверхностного натяжения, коэффициент которого обозначим через  $\sigma$ , внутренняя жидкость, к которой отнесем индекс (1), примет форму сферической капли с радиусом  $R$ . Внешнюю жидкость, идентифицируемую индексом (2), будем считать безграничной. На поверхности раздела двух жидкостей находится заряд  $Q$ . Примем далее, что жидкость в капле идеально проводящая, а жидкость среды является идеальным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Найдем спектр нормальных колебаний границы раздела двух жидкостей.

В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре невозмущенной капли уравнение границы раздела двух жидкостей имеет вид  $r = R + \xi(\theta, \varphi, t)$ . Система уравнений гидродинамики, линеаризованная в окрестности равновесного сферического состояния, состоит из уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^{(\alpha)}} \nabla p^{(\alpha)} + \nu^{(\alpha)} \Delta \mathbf{u}^{(\alpha)}; \quad \alpha = 1, 2, \quad (1)$$

уравнения непрерывности, сводящемуся в случае несжимаемой жидкости к условию

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(\alpha)} = 0, \quad (2)$$

кинематических граничных условий на границе раздела жидкостей  $r = R$  для касательных

$$u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)}, \quad u_{\varphi}^{(1)} = u_{\varphi}^{(2)} \quad (3), (4)$$

и нормальной

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (5)$$

компонент поля скоростей, динамических граничных условий для касательных

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(1)} \right] \\ = \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(2)} \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[ \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\varphi}^{(1)} \right] \\ = \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[ \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\varphi}^{(2)} \right], \quad (7) \end{aligned}$$

и нормальной

$$\begin{aligned} -p^{(1)} + 2\rho^{(1)} \nu^{(1)} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + p_{\sigma} - p_E \\ = -p^{(2)} + 2\rho^{(2)} \nu^{(2)} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} \quad (8) \end{aligned}$$

компонент поля напряжений, условия постоянства объемов обеих жидкостей

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) d\Omega = 0 \quad (9)$$

и условия неподвижности центра масс системы относительно выбранной системы координат

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) \mathbf{e}_r d\Omega = 0. \quad (10)$$

Здесь за  $\xi$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$  обозначены возмущения формы границы раздела, поля скоростей и поля давлений соответственно;  $p_{\sigma}$  — возмущение давления сил поверхностного натяжения

$$p_{\sigma}(\xi) = -\frac{\sigma}{R^2}(2 + \Delta_{\Omega})\xi, \quad (11)$$

$p_E$  — возмущение давления электрического поля, связанное с капиллярной деформацией границы раздела (см. Приложение),

$$p_E(\xi) = -\frac{Q^2}{2\pi\epsilon}\xi + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)P_n(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_n(\mu) d\mu, \quad (12)$$

$\Delta_{\Omega}$  — угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат,  $P_n(\mu)$  — собственные функции оператора  $\Delta_{\Omega}$ ,  $d\Omega$  — элемент телесного угла.

Чтобы упростить решение задачи, целесообразно перейти от МТЛ-размерного базиса, где  $M$ ,  $L$ ,  $T$  — размерность массы, длины, времени соответственно, к другому более удобному базису, уменьшающему число параметров задачи. Удобно выбрать  $\rho R\sigma$ -базис. Формулы, связывающие эти базисы имеют вид

$$[\rho] = ML^{-3}, \quad [R] = L, \quad [\sigma] = MT^{-2},$$

$$[M] = \rho R^3, \quad [L] = R, \quad [T] = R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}.$$

Запишем размерность величин в старом и новом базисах

$$[r] = [\xi] = L = R, \quad [p] = ML^{-1}T^{-2} = R^{-1}\sigma,$$

$$[u] = LT^{-1} = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2},$$

$$[\nu] = L^2T^{-1} = R^{1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2},$$

$$[t] = T = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}.$$

Для перехода к  $\rho R\sigma$ -базису достаточно приравнять единице радиус капли  $R$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  и одну из плотностей или комбинацию из них размерности плотности во всех уравнениях системы.  $R = 1$ ,  $\sigma = 1$  положим сразу же, а величину размерности плотности выберем позже из соображений удобства. Для обратного перехода к старому базису нужно каждую величину, встречающуюся в уравнении, разделить на соответствующую ей размерность.

2. Проведем теперь скаляризацию задачи согласно процедуре, подробно разобранной в [5]. Поле скоростей

$\mathbf{u}$ , как произвольное векторное поле, может быть разложено на сумму трех ортогональных полей

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1 \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2 \Psi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3 \Psi_3(\mathbf{r}, t), \quad (13)$$

где  $\Psi_i$  ( $i=1,2,3$ ) — скалярные поля. В силу ортогональности полей  $\hat{\mathbf{N}}_i \Psi_i$

$$\int_V (\hat{\mathbf{N}}_i \Psi_i)^* \cdot (\hat{\mathbf{N}}_j \Psi_j) dV = 0 \quad (i \neq j),$$

где  $*$  — символ комплексного сопряжения, а интегрирование ведется по всему пространству, векторные операторы должны удовлетворять соотношениям  $\hat{\mathbf{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j = 0$  (при  $i \neq j$ ), где  $\hat{\mathbf{N}}_i^+$  — оператор, эрмитовосопряженный оператору  $\hat{\mathbf{N}}_i$ . Для рассматриваемой задачи эти операторы удобно выбрать в виде

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla \times \mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}),$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ = -\nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2^+ = \mathbf{r} \times \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_3^+ = (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla.$$

Подставляя разложение (13) в условие несжимаемости (2), получим

$$\Delta \Psi_1^{(\alpha)} = 0. \quad (14)$$

Подстановка разложения (13) в уравнение Навье–Стокса (1) с учетом коммутативности операторов  $\hat{\mathbf{N}}_i$  и  $\Delta$  дает

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{N}}_1 \left( \frac{\partial \Psi_1^{(\alpha)}}{\partial t} - \nu^{(\alpha)} \Delta \Psi_1^{(\alpha)} + \frac{1}{\rho^{(\alpha)}} p^{(\alpha)} \right) \\ & + \hat{\mathbf{N}}_2 \left( \frac{\partial \Psi_2^{(\alpha)}}{\partial t} - \nu^{(\alpha)} \Delta \Psi_2^{(\alpha)} \right) \\ & + \hat{\mathbf{N}}_3 \left( \frac{\partial \Psi_3^{(\alpha)}}{\partial t} - \nu^{(\alpha)} \Delta \Psi_3^{(\alpha)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Действуя последовательно операторами  $\hat{\mathbf{N}}_i^+$  на это равенство, мы получим три независимых уравнения

$$\hat{\mathbf{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i \left( \frac{1}{\rho^{(\alpha)}} p^{(\alpha)} \delta_{1i} + \frac{\partial \Psi_i^{(\alpha)}}{\partial t} - \nu^{(\alpha)} \Delta \Psi_i^{(\alpha)} \right) = 0, \quad (15)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Так как операторы  $\hat{\mathbf{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i$  и  $\Delta$  коммутируют, они обладают общей системой собственных функций. При этом собственные значения этих операторов, соответствующие одной и той же собственной функции, вообще говоря, различны. Уравнение (15) означает, что или поля  $p \delta_{1i}$ ,  $\Psi_i$  должны быть разложены по собственным функциям, отвечающим нулевым собственным значениям операторов  $\hat{\mathbf{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i$ , или справедливо уравнению

$$\frac{1}{\rho^{(\alpha)}} p^{(\alpha)} \delta_{1i} + \frac{\partial \Psi_i^{(\alpha)}}{\partial t} - \nu^{(\alpha)} \Delta \Psi_i^{(\alpha)} = 0. \quad (16)$$

Очевидно, что первая возможность была бы слишком большим ограничением, поэтому будем считать, что из

уравнения (15) следует (16). Учитывая (14), получим скалярный аналог уравнений (1), (2), который состоит из независимых уравнений скалярных полей  $\Delta\Psi_i^{(\alpha)}$ ,

$$\Delta\Psi_i^{(\alpha)} - (1 - \delta_{1i})\frac{1}{\nu^{(\alpha)}}\frac{\partial\Psi_i^{(\alpha)}}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

и выражения для поля давления  $p$

$$p^{(\alpha)} = -\rho^{(\alpha)}\frac{\partial\Psi_1^{(\alpha)}}{\partial t}. \quad (18)$$

Подставим теперь разложение (13) в граничные условия (3), (4). Получим два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[\Psi_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(1)}\right] - \left[\Psi_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(2)}\right]\right\} \\ + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\Psi_2^{(1)} - \Psi_2^{(2)}\right\} = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left[\Psi_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(1)}\right] - \left[\Psi_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(2)}\right]\right\} \\ - \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\Psi_2^{(1)} - \Psi_2^{(2)}\right\} = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

Подействуем на уравнение (19) оператором

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta,$$

а на уравнение (20) оператором

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

и сложим их. В результате получим

$$\Delta_\Omega\left\{\left[\Psi_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(1)}\right] - \left[\Psi_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(2)}\right]\right\} = 0. \quad (21)$$

Подействуем теперь на уравнение (19) оператором

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

а на уравнение (20) оператором

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta$$

и вычтем второе уравнение из первого. В результате получим

$$\Delta_\Omega\left\{\Psi_2^{(1)} - \Psi_2^{(2)}\right\} = 0. \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) можно удовлетворить выбором собственных функций, отвечающих нулевому собственному значению оператора  $\Delta_\Omega = -\hat{N}_2^+ \cdot \hat{N}_2$ . Однако, как и в случае уравнения (15), это было бы слишком большим ограничением. Поэтому выберем вторую возможность,

когда обращаются в нуль выражения в фигурных скобках, т. е.

$$\left[\Psi_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(1)}\right] - \left[\Psi_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial r}r\Psi_3^{(2)}\right] = 0, \quad (23)$$

$$\Psi_2^{(1)} - \Psi_2^{(2)} = 0. \quad (24)$$

Условия (23), (24) дают скалярный аналог граничных условий (3), (4). После идентичной процедуры получаем скалярный аналог граничных условий (6), (7)

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}\nu^{(1)}\left[2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1^{(1)}}{r} + \frac{\partial^2\Psi_3^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{(2 + \Delta_\Omega)\Psi_3^{(1)}}{r^2}\right] \\ - \rho^{(2)}\nu^{(2)}\left[2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1^{(2)}}{r} + \frac{\partial^2\Psi_3^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{(2 + \Delta_\Omega)\Psi_3^{(2)}}{r^2}\right] = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\rho^{(1)}\nu^{(1)}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_2^{(1)}}{r}\right] - \rho^{(2)}\nu^{(2)}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_2^{(1)}}{r}\right] = 0. \quad (26)$$

Скалярные аналоги граничных условий (5), (8) получаются сразу же после подстановки разложения (13) и выражения для поля давлений (18)

$$\frac{\partial\Psi_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\Psi_3^{(1)} = \frac{\partial\Psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\Psi_3^{(2)} = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left[\rho^{(1)}\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial t} + 2\rho^{(1)}\nu^{(1)}\frac{\partial^2\Psi_1^{(1)}}{\partial r^2} - 2\rho^{(1)}\nu^{(1)}\Delta_\Omega\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_3^{(1)}}{r}\right] \\ + p_\sigma - p_E = \left[\rho^{(2)}\frac{\partial\Psi_1^{(2)}}{\partial t} + 2\rho^{(2)}\nu^{(2)}\frac{\partial^2\Psi_1^{(2)}}{\partial r^2} - 2\rho^{(2)}\nu^{(2)}\Delta_\Omega\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_3^{(2)}}{r}\right]. \quad (28) \end{aligned}$$

Условие постоянства объема (9) остается без изменений, а из условия неподвижности центра масс (10) при подстановке в него разложения орта сферической системы координат  $\mathbf{e}_r$  по постоянным ортам декартовой системы координат получаем

$$\int_\Omega \xi \cos\theta d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \xi \sin\theta \cos\varphi d\Omega = 0,$$

$$\int_\Omega \xi \sin\theta \sin\varphi d\Omega = 0,$$

или, что то же самое,

$$\int_\Omega \xi Y_{1n} d\Omega = 0, \quad (29)$$

где  $Y_{mn}$  — сферические функции — собственные функции оператора  $\Delta_\Omega$ , отвечающие собственным значениям  $-m(m+1)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, -m \leq n \leq m$ .

Из полученной системы видим, что поле  $\Psi_2$  не оказывает влияния на изменение формы поверхности, так как задача его отыскания не зависит от  $\Psi_1$ ,  $\Psi_3$ ,  $\xi$  и оно не входит в уравнения для определения  $\Psi_1$ ,  $\Psi_3$ ,  $\xi$ .

3. Перейдем теперь к решению обычной скалярной краевой задачи. Ищем решение уравнений (17) и функции  $\xi$  в виде разложения по сферическим функциям

$$\begin{aligned}\Psi_i^{(\alpha)} &= \sum_{m,n} \Psi_i^{(\alpha)}(r) Y_{mn} \exp(St), \\ \xi &= \sum_{m,n} Z Y_{mn} \exp(St).\end{aligned}\quad (30)$$

Индексы  $n, m$  у величин  $\Psi_i^{(\alpha)}(r)$ ,  $Z$  ради упрощения записи выражения указывать не будем. Из условий (9), (29) получаем, что  $m \neq 0$  и  $m \neq 1$ , поэтому далее будем считать, что  $m = 2, 3, \dots, -n \leq m \leq n$ . Давление сил поверхностного натяжения (11) с учетом (30) примет вид

$$p_\sigma = \sum_{m,n} (m-1)(m+2) Z Y_{mn} \exp(St). \quad (31)$$

Давление электрического поля (12) с учетом (30) примет вид

$$p_E = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \sum_{m,n} (m-1) Z Y_{mn} \exp(St). \quad (32)$$

Подставляя (30) в (17), получим уравнение на радиальные функции

$$\begin{aligned}\frac{a^2 \Psi_i^{(\alpha)}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi_i^{(\alpha)}(r)}{dr} - \left[ \frac{S}{\nu^{(\alpha)}} (1 - \delta_{1i}) \right. \\ \left. + \frac{m(m+1)}{r^2} \right] \Psi_i^{(\alpha)}(r) = 0.\end{aligned}\quad (33)$$

Подставляя (30)–(32) в (23)–(28), получаем граничные условия для функций  $\Psi_i^{(\alpha)}(r)$

$$\begin{aligned}\left[ \Psi_1^{(1)}(r) + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi_3^{(1)}(r) \right] - \left[ \Psi_1^{(2)}(r) + \frac{\partial}{\partial r} r \Psi_3^{(2)}(r) \right] = 0, \\ \rho^{(1)\nu^{(1)}} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_1^{(1)}(r)}{r} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(1)}(r)}{\partial r^2} \right. \\ \left. + (m-1)(m+2) \Psi_3^{(1)}(r) \right] - \rho^{(2)\nu^{(2)}} \\ \times \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_1^{(2)}(r)}{r} + \frac{\partial^2 \Psi_3^{(2)}(r)}{\partial r^2} \right. \\ \left. + (m-1)(m+2) \Psi_3^{(2)}(r) \right] = 0, \\ \left[ \frac{\partial \Psi_1^{(1)}(r)}{\partial r} + m(m+1) \Psi_3^{(1)}(r) \right] \\ - \left[ \frac{\partial \Psi_1^{(2)}(r)}{\partial r} + m(m+1) \Psi_3^{(2)}(r) \right] = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi_1^{(1)}(r)}{\partial r} + m(m+1) \Psi_3^{(1)}(r) - SZ = 0,$$

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} \left[ S \Psi_1^{(1)}(r) + 2\nu^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}(r)}{\partial r^2} \right. \\ \left. + 2\nu^{(1)} m(m+1) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_3^{(1)}(r)}{r} \right] \\ - \rho^{(2)} \left[ S \Psi_1^{(2)}(r) + 2\nu^{(2)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(2)}(r)}{\partial r^2} \right. \\ \left. + 2\nu^{(2)} m(m+1) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_3^{(2)}(r)}{r} \right] \\ + \left[ (m-1)(m+2) - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} (m-1) \right] Z = 0,\end{aligned}\quad (34)$$

$$\Psi_2^{(1)}(r) - \Psi_2^{(2)}(r) = 0,$$

$$\rho^{(1)\nu^{(1)}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2^{(1)}(r)}{r} \right] - \rho^{(2)\nu^{(2)}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\Psi_2^{(2)}(r)}{r} \right] = 0. \quad (35)$$

Решения уравнения (33) имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_1^1(r) &= b_1 r^m, \quad \Psi_1^2(r) = c_1 r^{-(m+1)}, \\ \Psi_2^1(r) &= b_2 \frac{i_m(x_1 r)}{i_m(x_1)}, \quad \Psi_2^2(r) = c_2 \frac{k_m(x_2 r)}{k_m(x_2)}, \\ \Psi_3^1(r) &= b_3 \frac{i_m(x_1 r)}{i_m(x_1)}, \quad \Psi_3^2(r) = c_3 \frac{k_m(x_2 r)}{k_m(x_2)},\end{aligned}\quad (36)$$

где  $x_1 = \sqrt{S/\nu_1}$ ,  $x_2 = \sqrt{S/\nu_2}$ ;  $i_m(x)$ ,  $k_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно.

Подставим теперь решения для радиальных функций  $\Psi_i^{(\alpha)}(r)$  (36) в систему граничных условий (34). Воспользовавшись выражениями

$$\begin{aligned}\frac{i'_m(x)}{i_m(x)} &= \frac{i_{m+1}(x)}{i_m(x)} + \frac{m}{x}, \\ \frac{i''_m(x)}{i_m(x)} &= -\frac{2}{x} \frac{i_{m+1}(x)}{i_m(x)} + \left[ 1 + \frac{m(m-1)}{x^2} \right], \\ \frac{k'_m(x)}{k_m(x)} &= -\frac{k_{m-1}(x)}{k_m(x)} - \frac{m+1}{x}, \\ \frac{k''_m(x)}{k_m(x)} &= -\frac{2}{x} \frac{k_{m-1}(x)}{k_m(x)} + \left[ 1 + \frac{(m+1)(m+2)}{x^2} \right]\end{aligned}\quad (37)$$

рекуррентных формул для модифицированных сферических функций Бесселя, после преобразований получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов  $b_1, c_1, b_3, c_3, Z$

$$b_1 + b_3 \left[ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m+1) \right] - c_1 + c_3 \left[ x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + m \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & \rho_1 \nu_1 \left\{ 2(m-1)b_1 + b_3 \left[ -2x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} \right. \right. \\ & \left. \left. + x_1^2 + 2(m-1)(m+1) \right] \right\} - \rho_2 \nu_2 \\ & \times \left\{ -2(m+2)c_1 + c_3 \left[ 2x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} \right. \right. \\ & \left. \left. + x_2^2 + 2m(m+2) \right] \right\} = 0, \\ & mb_1 + m(m+1)b_3 + (m+1)c_1 - m(m+1)c_3 = 0, \\ & mb_1 + m(m+1)b_3 - SZ = 0, \\ & \rho_1 \left\{ (S + 2\nu_1 m(m-1))b_1 + b_3 2\nu_1 m(m+1) \right. \\ & \times \left[ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m-1) \right] \left. \right\} - \rho_2 \\ & \times \left\{ (S + 2\nu_2(m+1)(m+2))c_1 + c_3 2\nu_2 m(m+1) \right. \\ & \times \left[ x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + (m+2) \right] \left. \right\} + \left[ (m-1)(m+2) \right. \\ & \left. - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon}(m-1) \right] Z = 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда детерминант определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных  $b_1, c_1, b_3, c_3, Z$ , равен нулю

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = 0, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{12} &= -1, & a_{13} &= x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m-1), \\ a_{14} &= x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + m, & a_{15} &= 0, & a_{21} &= 2(m-1)\rho_1 \nu_1, \\ a_{22} &= 2(m+2)\rho_2 \nu_2, \\ a_{23} &= \rho_1 \nu_1 \left[ -2x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + x_1^2 + 2(m-1)(m+1) \right], \\ a_{24} &= -\rho_2 \nu_2 \left[ 2x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + x_2^2 + 2m(m+2) \right], \\ a_{25} &= 0, & a_{31} &= m, & a_{32} &= (m+1), \\ a_{33} &= m(m+1), & a_{34} &= -m(m+1), & a_{35} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{41} &= m, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= m(m+1), & a_{44} &= 0, & a_{45} &= -S, \\ a_{51} &= \rho_1 S + 2m(m-1)\rho_1 \nu_1, \\ a_{52} &= -\rho_2 S - 2(m+1)(m+2)\rho_2 \nu_2, \\ a_{53} &= \rho_1 \nu_1 2m(m+1) \left[ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m-1) \right], \\ a_{54} &= \rho_2 \nu_2 2m(m+1) \left[ x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + (m+2) \right], \\ a_{55} &= (m-1)(m+2) - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon}(m-1). \end{aligned} \quad (39)$$

4. Численные расчеты по (38) с учетом (39) приводят к закономерностям, проиллюстрированным рис. 1, где представлены зависимости вещественной  $\text{Re } S = \text{Re } S(W)$  и мнимой  $\text{Im } S = \text{Im } S(W)$  компонент частоты для второй моды от величины параметра Рэлея  $W \equiv Q^2 / (16\pi\epsilon\sigma R^3)$ : инкремента (ветвь 2) при  $\text{Re } S > 0$  и декрементов при  $\text{Re } S < 0$  затухающих периодических (ветви 1) и аperiodических (ветвь 3) капиллярных движений капли в среде. Ветви дисперсионного уравнения с номерами 4–7 и т.д. соответствуют, согласно [5,6], диссипации энергии вихревых полоидальных движений.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости вещественной  $\text{Re } S = \text{Re } S(\nu_2)$  и мнимой  $\text{Im } S = \text{Im } S(\nu_2)$  компонент комплексной частоты капиллярных движений жидкости капли и жидкости в ее окрестности в зависимости от величины безразмерной вязкости среды  $\nu_2$  в докритическом режиме при отсутствии заряда на границе раздела

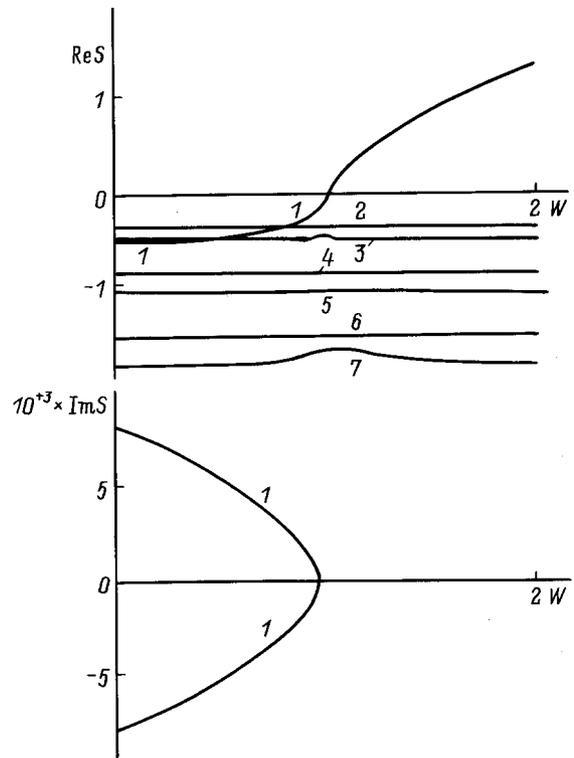
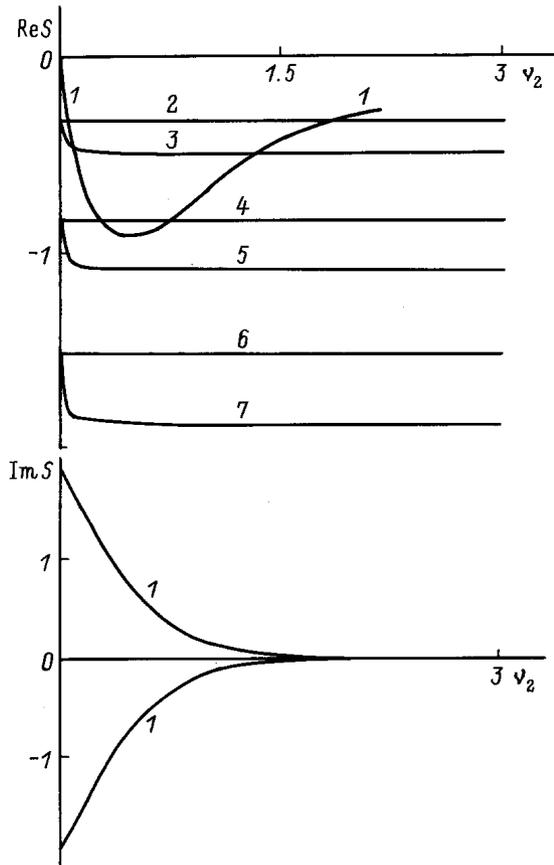
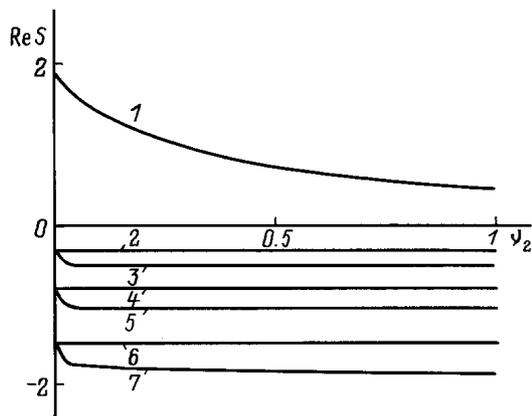


Рис. 1. Зависимости  $\text{Re } S = \text{Re } S(W)$  и  $\text{Im } S = \text{Im } S(W)$ .  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 0.01$ ,  $\nu_2 = 0.1$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 1.5$ .



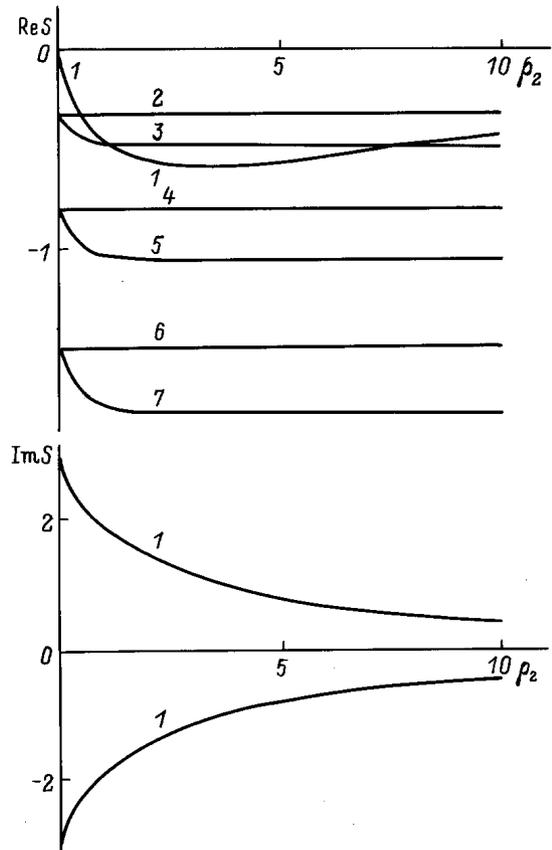
**Рис. 2.** Зависимости  $\text{Re}S = \text{Re}S(\nu_2)$  и  $\text{Im}S = \text{Im}S(\nu_2)$  от  $\nu_2$  в докритическом режиме при  $W = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 0.01$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 1.5$ .



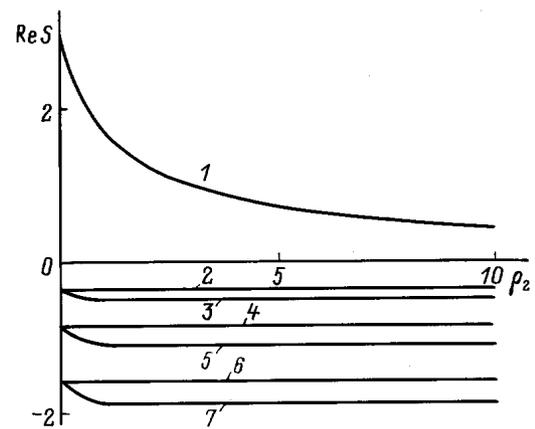
**Рис. 3.** Зависимость  $\text{Re}S = \text{Re}S(\nu_2)$  от  $\nu_2$  в закритическом режиме при  $W = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 0.01$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 1.5$ .

$W = 0$  (рис. 2) и в закритическом режиме при  $W = 2$  (рис. 3). Отметим, что критическое значение параметра Рэлея  $W = 1$ .

На рис. 4 и 5 приведены зависимости вещественной  $\text{Re}S = \text{Re}S(\rho_2)$  и мнимой  $\text{Im}S = \text{Im}S(\rho_2)$  компонент комплексной частоты капиллярных движений жидкости капли и жидкости в ее окрестности в зависимости от



**Рис. 4.** Зависимости  $\text{Re}S = \text{Re}S(\rho_2)$  и  $\text{Im}S = \text{Im}S(\rho_2)$  от  $\rho_2$  в докритическом режиме при  $W = 0$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 0.01$ ,  $\nu_2 = 0.1$ ,  $\rho_1 = 1$ .



**Рис. 5.** Зависимости  $\text{Re}S = \text{Re}S(\rho_2)$  от  $\rho_2$  в закритическом режиме при  $W = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 0.01$ ,  $\nu_2 = 0.1$ ,  $\rho_1 = 1$ .

величины безразмерной плотности среды  $\rho_2$  в докритическом режиме при отсутствии заряда на границе раздела  $W = 0$  (рис. 4) и в закритическом режиме при  $W = 2$  (рис. 5).

На рис. 2–5 ветви с номерами, большими 1, соответствуют вихревым полоидальным движениям, которые существуют и в капле, и в среде. На приведенных

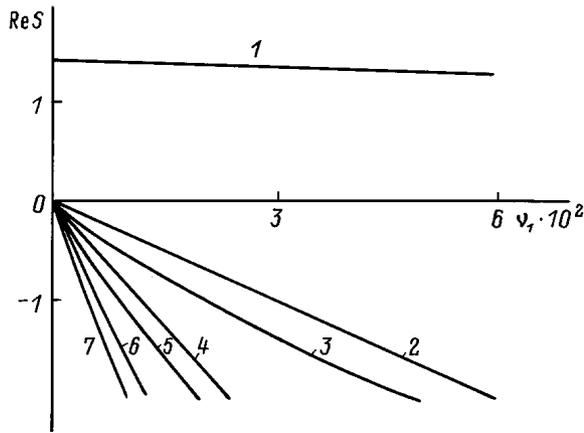


Рис. 6. Зависимость  $\text{Re}S = \text{Re}S(\nu_1)$  от  $\nu_1$  в закритическом режиме при  $W = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_2 = 0.1$ ,  $\rho_1 = 1.5$ ,  $\rho_2 = 1$ .

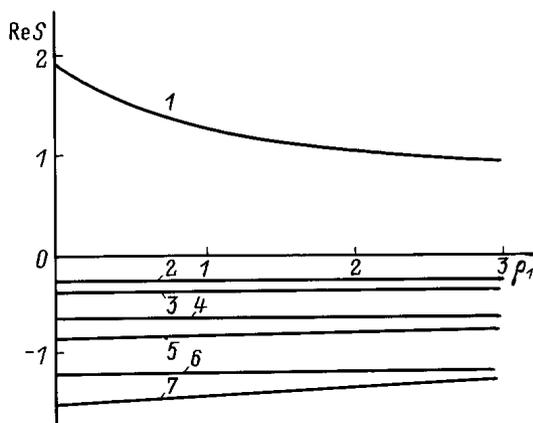


Рис. 7. Зависимости  $\text{Re}S = \text{Re}S(\rho_1)$  в закритическом режиме при  $W = 2$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 0.01$ ,  $\nu_2 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 1$ .

рисунках полоидальные движения относящиеся к капле обозначены четными номерами, а относящиеся к среде нечетными. Видно, что в пределе при  $\rho_2 \rightarrow 0$  кривые, соответствующие вихревой полоидальной компоненте скоростей жидкости в среде, сливаются с кривыми, соответствующими вихревой полоидальной компоненте скоростей жидкости капли. Отметим, что при расчетах для рис. 1–5 в качестве третьего параметра обезразмеривания была принята плотность жидкости в капле, т.е.  $\rho_1 = 1$ .

На рис. 6 приведена зависимость вещественной части частоты от безразмерной вязкости жидкости в капле  $\text{Re}S = \text{Re}S(\nu_1)$  в закритическом режиме ( $W = 2$ ) при обезразмеривании всех выражений на  $\rho_2$ . Легко видеть, что инкремент неустойчивости слабо убывает с увеличением  $\nu_1$  (кривая 1). Зависимость же декрементов вихревых полоидальных движений от  $\nu_1$  весьма заметна (кривые 2–7).

На рис. 7 приведена зависимость вещественной части частоты от безразмерной плотности жидкости в капле:  $\text{Re}S = \text{Re}S(\rho_1)$  в закритическом режиме ( $W = 2$ ) при

обезразмеривании всех выражений на  $\rho_2$ . Кривая 1 определяет убывание инкремента неустойчивости границы раздела с увеличением  $\rho_1$ . Кривые 2–5 и т.д., описывающие декременты полоидально-вихревых движений, от  $\rho_1$  зависят весьма слабо, убывая с увеличением  $\rho_1$ .

5. Вернемся к задаче нахождения вихревой тороидальной компоненты поля скоростей, связанной со скалярной функцией  $\Psi_2$ , которая определяется системой уравнений (35). Подставляя (36) в (35), с учетом (37) найдем

$$b_2 - c_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m-1) \right] b_2 \\ + \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[ x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + (m+2) \right] c_2 = 0. \end{aligned}$$

Данная система алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, когда равен нулю определитель, составленный из коэффициентов при  $b_2$ ,  $c_2$ . Это условие определяет и дисперсионное уравнение, описывающее спектр вихревых тороидальных движений в капле и среде,

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[ x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)} + (m-1) \right] \\ + \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[ x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)} + (m+2) \right] = 0. \end{aligned}$$

Численные расчеты по полученному данному дисперсионному уравнению показывают, что увеличение безразмерной вязкости жидкости капли приводит к быстрому увеличению декрементов затухания тороидальных движений. Зависимость от вязкости среды и плотностей обеих жидкостей весьма незначительна.

## Заключение

При исследовании капиллярных колебаний заряженной вязкой несжимаемой капли в вязкой несжимаемой диэлектрической среде вязкость и плотность среды оказывают существенное влияние как на структуру спектра капиллярных движений жидкости в капле и в среде, так и на закономерности реализации неустойчивости заряженной границы раздела: инкременты неустойчивости быстро убывают с ростом  $\nu_2$  и  $\rho_2$ , а декременты вихревых полоидальных движений заметно увеличиваются. Уменьшение инкрементов неустойчивости может означать увеличение вероятности распада сильнозаряженной капли на две части сравнимых размеров, как и наблюдали Райс и Вайман, Райс и Патриарх [7,8], и уменьшение вероятности распада по релеевскому каналу, описанному в [9].

## Приложение

Давление электрического поля на границе раздела проводящей и диэлектрической сред определяется следующим образом:

$$p_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \Big|_{r=R+\xi}.$$

Пусть  $\Phi$  — потенциал электрического поля в диэлектрике, представим его в виде  $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$ , где  $\Phi_0$  — потенциал электрического поля в отсутствии возмущения;  $\delta\Phi$  — добавка к потенциалу  $\Phi_0$ , вызванная малым возмущением поверхности капли. Таким образом,

$$p_E = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla\Phi_0 + \nabla(\delta\Phi))^2 \Big|_{r=R+\xi}.$$

Разложим это выражение в ряд с точностью до членов порядка  $\xi$  и  $\delta\Phi$

$$\begin{aligned} p_E &\approx \frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla\Phi_0)^2 \Big|_{r=R+\xi} + \frac{\varepsilon}{8\pi} 2\nabla\Phi_0 \cdot \nabla(\delta\Phi) \Big|_{r=R+\xi} \\ &= \frac{\varepsilon}{8\pi} (\nabla\Phi_0)^2 \Big|_{r=R} + \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial(\nabla\Phi_0)^2}{\partial r} \Big|_{r=R} \xi \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{4\pi} (\nabla\Phi_0) \Big|_{r=R} (\nabla(\delta\Phi_0)) \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что на поверхности проводника электрическое поле перпендикулярно поверхности, получим

$$\begin{aligned} p_E &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right)^2 \Big|_{r=R} + \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right)^2 \right] \Big|_{r=R} \xi \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=R} \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial r} \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Потенциал  $\Phi$  должен удовлетворять следующим условиям:  $\Delta\Phi = 0$ ; при  $r \rightarrow \infty$   $\Phi \rightarrow 0$ ; при  $r = R + \xi$   $\Phi = \text{const}$ . Или для  $\Phi_0$  и  $\delta\Phi$

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad \Delta\delta\Phi = 0;$$

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad \Phi_0 \rightarrow 0, \quad \delta\Phi \rightarrow 0;$$

$$\text{при } r = R \quad \Phi_0|_{r=R+\xi} \cdot \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=R} + \delta\Phi \Big|_{r=R} = \text{const}.$$

Или, полагая  $\Phi_0|_{r=R} = \text{const}$ , получаем

$$\delta\Phi|_{r=R} = -\xi \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Таким образом, для  $\Phi_0$  найдем  $\Phi_0 = Q/\varepsilon r$ . Решение для  $\delta\Phi$  будем искать в виде

$$\delta\Phi = \sum_n F_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\mu),$$

где  $\mu \equiv \cos\theta$ ,  $P_n(\mu)$  — нормированные на единицу полиномы Лежандра.

Из граничного условия для потенциала на поверхности капли получаем

$$\sum_n F_n P_n(\mu) = \xi \frac{Q}{\varepsilon R^2}.$$

Учитывая, что  $\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \delta_{nm}$ , получаем

$$F_n = \frac{Q}{\varepsilon R^2} \int_{-1}^1 \xi(\theta) P_n(\mu) d\mu$$

$$\rightarrow \delta\Phi = \sum_n \frac{Q}{\varepsilon R^2} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\mu) \int_{-1}^1 \varepsilon P_m(\mu) d\mu$$

$$\rightarrow p_E = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon R^4} - \frac{1}{2\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon R^4} \frac{\varepsilon}{R}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon R^4} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_n(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_n(\mu) d\mu.$$

Авторы выражают признательность А.Э. Лазарянцу, обратившему их внимание на данную задачу.

## Список литературы

- [1] Baily A.C. // Sci. Prog. Oxf. 1974. Vol. 61. P. 555–581.
- [2] Коженков В.И., Фукс Н.А. // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
- [3] Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О. // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [5] Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И. и др. Препринт ИМ РАН. Ярославль, 1994. № 27. 126 с.
- [6] Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
- [7] Ryce S.A., Wutman R.R. // Canad. J. Phys. 1964. Vol. 42. P. 2185–2194.
- [8] Ryce S.A., Patriarghe D.A. // Canad. J. Phys. 1965. Vol. 43. P. 2192–2199.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.