

# Слабая локализация в квантовых ямах $p$ -типа

© Н.С. Аверкиев, Л.Е. Голуб, Г.Е. Пикус

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 16 февраля 1998 г. Принята к печати 18 февраля 1998 г.)

Теория слабой локализации, приводящей к аномальному магнетосопротивлению, развита для квантовых гетероструктур с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Рассмотрены реальные квантовые ямы с несколькими заполненными подзонами размерного квантования. Показано, что при интенсивных упругих переходах между ними происходит эффективное усреднение параметров, определяющих проводимость в классически слабых магнитных полях. В другом предельном случае все подзоны дают независимые вклады в аномальное магнетосопротивление. Вычислены соответствующие характерные магнитные поля при произвольном соотношении между временами сбоя фазы и межподзонных переходов.

## 1. Введение

Явление слабой локализации заключается в квантовой интерференции волн, распространяющихся по одной и той же траектории в противоположных направлениях. Одно из наиболее ярких следствий этого явления состоит в аномальном изменении сопротивления в классически слабых магнитных полях. Причина этого заключается в том, что при прохождении электронных волн по пути в двух противоположных направлениях во внешнем магнитном поле возникает пропорциональная ему дополнительная разность фаз. В результате исходная интерференция нарушается и аномальный вклад в проводимость уменьшается (эффект отрицательного магнетосопротивления).

Кроме магнитного поля интерференция разрушается неупругими процессами, а также в результате релаксации спина. Теория, учитывающая эти обстоятельства и объясняющая аномальное магнетосопротивление в металлах и металлических пленках, была развита в работах [1,2], а для двумерных носителей в полупроводниковых гетероструктурах — в [2–5]. В этих работах предполагалось, что времена спиновой релаксации могут быть сравнимыми со временем сбоя фазы волновой функции, но оба этих времени намного длиннее, чем время импульсной релаксации. При этом спин-орбитальное взаимодействие, приводящее к спиновой релаксации, рассматривалось как возмущение. В настоящее время экспериментально и теоретически изучаются гетероструктуры на основе полупроводников  $A^{III}B^V$ , валентная зона которых сформирована под влиянием сильного спин-орбитального взаимодействия. В результате времена спиновой и импульсной релаксации оказываются одного порядка, и, следовательно, методы расчета магнетосопротивления, используемые в [1–5], оказываются неприменимыми для этих систем. Кроме того, в реальных структурах может быть заполнено несколько уровней размерного квантования. Переходы между ними также могут приводить к релаксации фазы волновой функции и изменять аномальный вклад в проводимость. Конкретный вид кривой магнетосопротивления

зависит от соотношения скоростей сбоя фазы внутри каждой подзоны и при межподзонных переходах, так же как и за счет магнитного поля. В предыдущей работе [6] изучены квантовые ямы  $p$ -типа с одним заполненным уровнем размерного квантования.

Цель данной работы — создание теории слабой локализации, приводящей к аномальному магнетосопротивлению, в квантовых ямах  $p$ -типа на основе полупроводников  $A^{III}B^V$  при заполнении нескольких подзон размерного квантования. Результаты теории будут представлены в виде, допускающем прямое сопоставление с экспериментальными данными. Детальное сравнение этих данных с теорией позволяет определить ряд параметров структуры, определяющих скорость спиновой релаксации.

Для упрощения теоретической модели нечетные по волновому вектору слагаемые в энергетическом спектре электронов учитываться не будут. Предварительные результаты данной работы приведены в [7].

## 2. Аномальное магнетосопротивление

Одно из наиболее ярких следствий явления слабой локализации состоит во влиянии классически слабого магнитного поля на статическую проводимость. Выражение для нее может быть представлено в виде трех диаграмм, изображенных на рис. 1:

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^{(I)} + \Delta\sigma_{ij}^{(II)} + \Delta\sigma_{ij}^{(III)}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^{(I)} = & \frac{e^2\hbar}{2\pi} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{v}_i^{\alpha\gamma}(-\mathbf{k}) \tilde{v}_j^{(\beta\delta)}(\mathbf{k}) \\ & \times G_\gamma^A(-\mathbf{k}) G_\alpha^R(-\mathbf{k}) G_\beta^A(\mathbf{k}) \\ & \times G_\delta^R(\mathbf{k}) C_{\delta\alpha}^{\gamma\beta}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^{(II)} &= \frac{e^2\hbar}{2\pi} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{v}_i^{(\alpha\mu)}(-\mathbf{k}) \\ &\times \tilde{v}_j^{(\beta\nu)}(\mathbf{k}') G_\mu^A(-\mathbf{k}) G_\alpha^R(-\mathbf{k}) G_\beta^A(\mathbf{k}') G_\nu^R(\mathbf{k}') \\ &\times \langle V_{\mu\gamma}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}') V_{\delta\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle G_\gamma^A(-\mathbf{k}') \\ &\times G_\delta^A(\mathbf{k}) C_{\nu\alpha}^{\gamma\delta}(\mathbf{k}', -\mathbf{k}, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^{(III)} &= \frac{e^2\hbar}{2\pi} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \tilde{v}_i^{(\alpha\mu)}(-\mathbf{k}) \\ &\times \tilde{v}_j^{(\beta\nu)}(\mathbf{k}') G_\mu^A(-\mathbf{k}) G_\alpha^R(-\mathbf{k}) G_\beta^A(\mathbf{k}') G_\nu^R(\mathbf{k}') \\ &\times \langle V_{\gamma\alpha}(-\mathbf{k}', -\mathbf{k}) V_{\nu\delta}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \rangle G_\delta^R(\mathbf{k}) \\ &\times G_\gamma^R(-\mathbf{k}') C_{\nu\alpha}^{\gamma\delta}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}', \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь индексы  $i, j$  нумеруют направления в плоскости квантовой ямы, греческие буквы обозначают состояния при данном волновом векторе  $\mathbf{k}$  с различным номером подзоны и проекцией момента,  $\tilde{v}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{k})$  — матричный элемент оператора скорости,  $V_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  — матричный элемент рассеяния частицы сорта  $\alpha$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в состоянии  $|\beta\mathbf{k}'\rangle$ , включающий концентрацию рассеивателей. Угловые скобки означают усреднение по

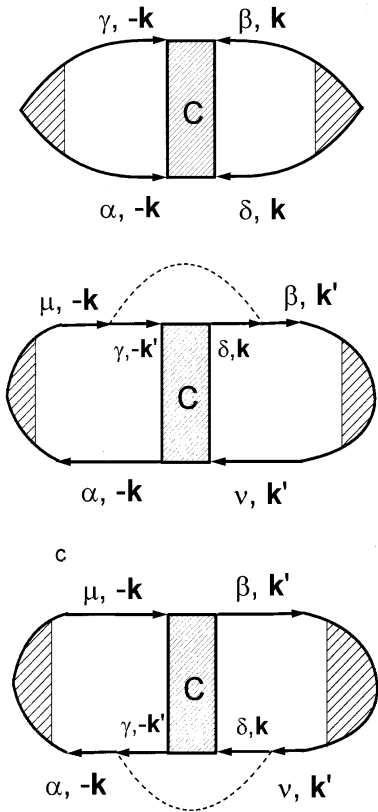


Рис. 1. Диаграммное представление вкладов в проводимость:  $a$  —  $\Delta\sigma^{(I)}$ ,  $b$  —  $\Delta\sigma^{(II)}$ ,  $c$  —  $\Delta\sigma^{(III)}$ .

положениям рассеивателей:

$$\begin{aligned} \langle V_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') V_{\gamma\delta}(\mathbf{g}, \mathbf{g}') \rangle &= \sum_{\bar{z}} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger(\mathbf{r}) V(\boldsymbol{\rho}, z-\bar{z}) \hat{\Psi}_{\beta\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) \\ &\times \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}_{\gamma\mathbf{g}}^\dagger(\mathbf{r}') V(\boldsymbol{\rho}', z'-\bar{z}) \hat{\Psi}_{\delta\mathbf{g}'}(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  и  $z$  — координаты, характеризующие движение в плоскости квантовой ямы и вдоль оси роста,  $\bar{z}$  — координата рассеивателя, а  $\hat{\Psi}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  — волновая функция состояния  $|\alpha\mathbf{k}\rangle$ .  $G_{\alpha}^{A,R}(\mathbf{k})$  — опережающая и запаздывающая функции Грина:

$$G_{\alpha}^{A,R}(\mathbf{k}) = \frac{1}{E_F - E_{\alpha}(\mathbf{k}) \pm \frac{i\hbar}{2\tau_{\alpha}(\mathbf{k})} \pm \frac{i\hbar}{2\tau_{\varphi}^{(\alpha)}(\mathbf{k})}}, \quad (6)$$

где  $E_F$  — энергия Ферми,  $\tau_{\alpha}(\mathbf{k})$  представляет собой полное уходное время из состояний  $|\alpha\mathbf{k}\rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\alpha}(\mathbf{k})} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\nu} \int \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \langle |V_{\alpha\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \rangle \\ &\times \delta[E_F - E_{\nu}(\mathbf{k}')], \end{aligned} \quad (7)$$

$\tau_{\varphi}^{(\alpha)}(\mathbf{k})$  — время релаксации фазы волновой функции, а  $E_{\alpha}(\mathbf{k})$  — закон дисперсии в соответствующей подзоне размерного квантования.

При изучении вклада в проводимость, обусловленного слабой локализацией, под  $C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$  следует понимать сумму лестничных диаграмм при малом суммарном импульсе  $\mathbf{q}$  (куперон) (см. рис. 2).

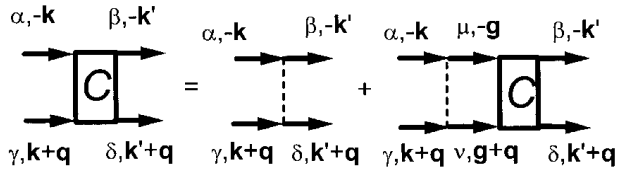


Рис. 2. Диаграммное представление интегрального уравнения для куперона.

Соответствующее интегральное уравнение для куперона, усредненное по распределению примесей, имеет вид

$$\begin{aligned} C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) &= \langle V_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}') V_{\gamma\delta}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}' + \mathbf{q}) \rangle \\ &+ \sum_{\mu\nu} \int \frac{d^2g}{(2\pi)^2} \langle V_{\alpha\mu}(-\mathbf{k}, -\mathbf{g}) V_{\gamma\nu}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{g} + \mathbf{q}) \rangle \\ &\times C_{\nu\delta}^{\mu\beta}(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) G_{\nu}^R(\mathbf{g} + \mathbf{q}) G_{\mu}^A(-\mathbf{g}). \end{aligned} \quad (8)$$

Матричный элемент оператора скорости, сопоставляемый заштрихованной вершине, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{k}) &= \mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\mu\nu} \int \frac{d^2g}{(2\pi)^2} \langle V_{\alpha\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{g}) V_{\nu\beta}(\mathbf{g}, \mathbf{k}) \rangle \\ &\times \tilde{v}^{(\mu\nu)}(\mathbf{g}) G_{\nu}^R(\mathbf{g}) G_{\mu}^A(\mathbf{g}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_\alpha(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}. \quad (10)$$

В классически слабом магнитном поле при движении вдоль замкнутой траектории волновая функция частицы приобретает фазу, равную  $\pi\Phi/\Phi_0$ , где  $\Phi$  — величина магнитного потока, пронизывающего траекторию, а  $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$  — квант магнитного потока. Поэтому при распространении двух волн по одной и той же траектории в противоположных направлениях возникает дополнительная разность фаз, равная  $2\pi\Phi/\Phi_0$ , разрушающая интерференцию. Это эквивалентно дополнительной фазе, набираемой в магнитном поле частицей с зарядом  $2e$ . Магнитное поле влияет на слабую локализацию, начиная с величины, при которой

$$l_H^2 \sim D\tau_\varphi,$$

где  $l_H$  — магнитная длина частицы с зарядом  $2e$ , а  $D$  — коэффициент диффузии. Это условие можно переписать в виде

$$\omega_c \tau E_F \tau_\varphi / \hbar \simeq 1,$$

причем  $E_F \tau_\varphi \hbar \gg 1$ . Здесь  $\omega_c$  — циклотронная частота.

Мы рассмотрим случай прямоугольной симметричной квантовой ямы с бесконечно высокими барьерами. Для описания состояний в валентной зоне будет использоваться сферическое приближение. Спектр и волновые функции носителей в рамках этих предположений исследовались во многих работах. Мы будем использовать вид волновых функций, предложенный в [8]. В базисе блоховских функций вершины валентной зоны, соответствующих проекциям момента  $3/2$ ,  $1/2$ ,  $-1/2$ ,  $-3/2$ , величины  $\hat{\Psi}_{\alpha\mathbf{k}}$  имеют вид четырехкомпонентных столбцов. В сферическом приближении каждый энергетический уровень двукратно вырожден, и соответствующие волновые функции можно записать в виде

$$\hat{\Psi}_{\alpha\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \hat{F}_\alpha(\mathbf{k}, z), \quad (11)$$

$$\hat{F}_1 = \begin{bmatrix} -v_0 C(z) \\ iv_1 S(z) e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \\ -v_2 C(z) e^{2i\varphi_{\mathbf{k}}} \\ iv_2 S(z) e^{3i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_2 = \begin{bmatrix} iv_3 S(z) e^{-3i\varphi_{\mathbf{k}}} \\ v_2 C(z) e^{-2i\varphi_{\mathbf{k}}} \\ iv_1 S(z) e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} \\ v_0 C(z) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Здесь  $\varphi_{\mathbf{k}}$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{k}$ ,  $C(z)$  и  $S(z)$  — симметричная и антисимметричная функции координаты  $z$ . Дисперсионное уравнение для нахождения энергии таких состояний  $E(k)$ , а также выражения для  $C(z)$ ,  $S(z)$  и независимых от  $\varphi_{\mathbf{k}}$  вещественных коэффициентов  $v_i$  ( $i = 0 \div 3$ ) приведены в [8], причем все эти величины зависят от номера уровня. Отметим, что при выборе фаз волновых функций как в (12),  $|V_{\alpha\beta}|$  зависит от разности  $\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'}$ , и поэтому уходные времена  $\tau_\alpha$  не зависят от  $\mathbf{k}$ .

Как известно, уравнение (8) имеет особенность при  $\mathbf{q} \rightarrow 0$ . Для получения вклада, связанного с этой особенностью,  $\mathbf{q}$  следует сохранить только в  $G_\nu^R(\mathbf{g} + \mathbf{q})$ . Разлагая  $E_\nu(\mathbf{g} + \mathbf{q})$  до 2-го порядка по  $\mathbf{q}$  и выполняя

затем интегрирование по  $E_\nu(\mathbf{g})$ , можно получить уравнение

$$\begin{aligned} C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', q) &= \langle V_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}') V_{\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle \\ &+ \sum_{\mu\nu} \zeta(\mu, \nu) \frac{2\pi\tau_\nu N_\nu}{\hbar} \\ &\times \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \langle V_{\alpha\mu}(-\mathbf{k}, -\mathbf{q}) V_{\gamma\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{g}) \rangle \\ &\times C_{\nu\delta}^{\mu\beta}(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_\nu(\mathbf{g}, \mathbf{q})], \end{aligned} \quad (13)$$

$$T_\nu(\mathbf{g}, \mathbf{q}) = i\mathbf{v}^{(\nu)}(\mathbf{g})\mathbf{q}\tau_\nu + [\mathbf{v}^{(\nu)}(\mathbf{g})\mathbf{q}\tau_\nu]^2 + \frac{\tau_\nu}{\tau_\varphi^{(\nu)}(\mathbf{g})}. \quad (14)$$

Здесь  $N_\nu$  — плотность состояний сорта  $\nu$  на уровне Ферми, которая выражается через скорость частиц  $v_F^{(\nu)}$  и квазиимпульс  $k_F^{(\nu)}$ :

$$N_\nu = \frac{k_F^{(\nu)}}{2\pi\hbar v_F^{(\nu)}}. \quad (15)$$

Множитель  $\zeta(\mu, \nu)$  равен единице, если состояния  $\mu$  и  $\nu$  относятся к одной подзоне, и равен нулю в противоположном случае. Он учитывает тот факт, что состояния из разных подзон не интерферируют, поскольку на поверхности Ферми они имеют различные по величине волновые вектора, и эта разница порядка  $k_F$ .

Выражение (13) представляет собой сложную систему уравнений, поскольку куперон зависит как от спиновых индексов и номеров подзон, так и от  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{q}$ . Общий метод ее решения изложен в [6]. Далее уравнение (13) будет решено в наиболее актуальных случаях заполнения одной и двух подзон размерного квантования.

### 3. Квантовая яма с одним уровнем

В работе [6] показано, что решение уравнения (13) зависит от соотношения между  $E_F$  и  $\Delta$ , где  $\Delta$  — минимальное энергетическое расстояние между двумя нижними подзонами. Если  $E_F \leq \Delta$ , то время спиновой релаксации порядка времени релаксации импульса, вклад в слабую локализацию возникает только от состояний с нулевым суммарным моментом. Следовательно, куперон может быть представлен в виде

$$C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) S_\gamma^\alpha S_\delta^\beta. \quad (16)$$

Здесь

$$S_1^1 = S_2^2 = 0, \quad S_2^1 = -S_1^2 = 1/\sqrt{2}. \quad (17)$$

Такая структура  $S_\gamma^\alpha$  означает, что диффузионный вклад в куперон возникает при интерференции волн в противоположно направленными спинами. Функция  $s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$

удовлетворяет уравнению

$$s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \langle |V_{11}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 + |V_{12}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 \rangle + \frac{2\pi N}{\hbar} \int \frac{d\varphi_g}{2\pi} \langle |V_{11}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_g)|^2 + |V_{12}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_g)|^2 \rangle s(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T(\mathbf{g}, \mathbf{q})]. \quad (18)$$

Здесь уходное время вычисляется с помощью формулы (7)

$$\tau^{-1} = \frac{2\pi N}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{11}(\varphi)|^2 + |V_{12}(\varphi)|^2 \rangle. \quad (19)$$

При выводе уравнения (18) учтено, что величины  $|V_{\alpha\beta}|$  зависят от разности  $\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}}$  и предполагается, что  $\tau_{\varphi}$  не зависит от  $\mathbf{g}$ , так же как и  $\tau$ .

Для решения уравнения (18) разложим  $s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$  в ряд Фурье:

$$s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n(\mathbf{k}', \mathbf{q}) e^{in\varphi_{\mathbf{k}}}. \quad (20)$$

Коэффициенты разложения удовлетворяют уравнению:

$$(1 - W_n) s_n = \frac{\hbar}{2\pi N \tau} W_n \exp(in\varphi_{\mathbf{k}'}) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_{nm}(q) s_m, \quad (21)$$

где

$$W_n = \frac{2\pi N \tau}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{11}(\varphi)|^2 + |V_{12}(\varphi)|^2 \rangle e^{-in\varphi}, \quad (22)$$

$$T_{nm}(q) = W_n \left[ -i \frac{v_F q \tau}{2} \delta_{|n-m|,1} + \frac{(v_F q \tau)^2}{2} \left( \delta_{nm} + \frac{1}{2} \delta_{|n-m|,2} \right) + \frac{\tau}{\tau_{\varphi}} \delta_{nm} \right]. \quad (23)$$

Поскольку согласно формуле (19)  $W_0 = 1$ , а  $|T_{nm}| \ll 1$ , коэффициенты  $s_n$  имеют разный порядок величины. Из уравнения (21) видно, что  $s_0 \sim q^{-2}$ , а  $s_{\pm 1} \sim q^{-1}$ . Для остальных  $n$  величины  $|s_n| \ll |s_1|$ . Уравнение (21) при  $n = \pm 1$  определяет связь между  $s_0$  и  $s_{\pm 1}$ :

$$s_1 = s_{-1} = i \frac{v_F q \tau}{2} \frac{W_1}{1 - W_1} s_0. \quad (24)$$

Отсюда видно, что  $s_1$  не зависит от  $\mathbf{k}'$ . Подставляя (24) в (21), получим окончательное выражение для  $s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$ :

$$s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \approx s_0 = \frac{\hbar}{2\pi N \tau} \frac{1}{D q^2 \tau + \tau / \tau_{\varphi}}, \quad (25)$$

где коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{2} v_F^2 \tau_{tr}, \quad (26)$$

а  $\tau_{tr}$  — транспортное время:

$$\tau_{tr}^{-1} = \frac{2\pi N}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{11}(\varphi)|^2 + |V_{12}(\varphi)|^2 \rangle (1 - \cos \varphi). \quad (27)$$

В случае, когда  $E_F \ll \Delta$ , спин-орбитальное взаимодействие подавлено, и время спиновой релаксации оказывается длиннее времени импульсной релаксации. Поэтому вклад в слабую локализацию вносят все четыре двухчастичных спиновых состояния. В работе [6] показано, что в этом предельном случае куперон представим в виде

$$C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) S_{\gamma}^{\alpha} S_{\delta}^{\beta} + p_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \left( P_{+\gamma}^{\alpha} P_{+\delta}^{\beta} + P_{-\gamma}^{\alpha} P_{-\delta}^{\beta} \right) + p_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) P_{0\gamma}^{\alpha} P_{0\delta}^{\beta}, \quad (28)$$

где ненулевые компоненты  $P_{ij}^{\alpha}$  равны:

$$P_{+1}^1 = P_{-2}^2 = 1, \quad P_{02}^1 = P_{01}^2 = 1/\sqrt{2}. \quad (29)$$

Уравнение для  $s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$  совпадает с (18), а функции  $p_{0,1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$p_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \langle |V_{11}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 - |V_{12}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 \rangle + \frac{2\pi N}{\hbar} \times \int \frac{d\varphi_g}{2\pi} \langle |V_{11}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_g)|^2 - |V_{12}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_g)|^2 \rangle \times p_0(\mathbf{q}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T(\mathbf{g}, \mathbf{q})], \quad (30)$$

$$p_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \langle V_{11}^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'}) \rangle + \frac{2\pi N}{\hbar} \times \int \frac{d\varphi_g}{2\pi} \langle V_{11}^2(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_g) \rangle p_1(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \times [1 - T(\mathbf{g}, \mathbf{q})]. \quad (31)$$

При  $E_F \ll \Delta$  смешивание дырочных состояний на поверхности Ферми мало, спиновая релаксация отсутствует и имеют место равенства

$$V_{12} = 0, \quad V_{11} = |V_{11}|. \quad (32)$$

При этом уравнения (18), (30) и (31) совпадают, и  $p_0 = p_1 = s$ .

Если учесть смешивание дырочных состояний, то равенства (32) нарушатся и уравнения (30), (31) будут отличаться от (18) малыми слагаемыми. Они могут быть учтены так же, как и части, содержащие  $q$  и  $\tau/\tau_{\varphi}$ . Поэтому  $p_0$  и  $p_1$  находятся тем же способом, что и  $s$ :

$$s(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \frac{\hbar}{2\pi N_0 \tau_0} \frac{1}{D_0 q^2 \tau_0 + \tau_0 / \tau_{\varphi}}, \quad (33)$$

$$p_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \frac{\hbar}{2\pi N_0 \tau_0} \frac{1}{D_0 q^2 \tau_0 + \tau_0 / \tau_{\varphi} + \tau_0 / \tau_{\parallel}}, \quad (34)$$

$$p_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = \frac{\hbar}{2\pi N_0 \tau_0} \frac{1}{D_0 q^2 \tau_0 + \tau_0 / \tau_{\varphi} + \tau_0 / \tau_{\perp}}. \quad (35)$$

Здесь индекс "0" указывает на то, что соответствующие величины должны быть вычислены без учета смешивания

дырочных подзон. Малые слагаемые

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\perp}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \left\{ N_0 \tau_0 \langle [V_{11}^{(0)}(\varphi)]^2 \rangle - N\tau \langle [V_{11}(\varphi)]^2 \rangle \right\}, \quad (36)$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\perp}} = \frac{4\pi}{\hbar} N_0 \tau_0 \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{12}(\varphi)|^2 \rangle. \quad (37)$$

Величины  $\tau_{\parallel, \perp}$  имеют смысл времен продольной и поперечной спиновой релаксации, где роль выделенной оси играет нормаль к плоскости квантовой ямы.

Формулы (33)–(35) применимы при  $\tau_0 \ll \tau_{\varphi}, \tau_{\parallel}, \tau_{\perp}$ . При уменьшении  $\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}$ , величины  $p_1$  и  $p_0$  становятся в  $(D_0 q^2 \tau_0 + \tau_0 / \tau_{\varphi})^{-1}$  раз меньше  $s$ , и выражение для куперона принимает вид, аналогичный (16), (25). Поэтому можно сказать, что эффекты слабой локализации при произвольных  $E_F / \Delta$  описывается формулами (33)–(35), а все изменения происходят с  $D, \tau_{\varphi}, \tau_{\parallel, \perp}$  и  $\tau$ .

Выражения для коэффициента диффузии и времен релаксации справедливы для произвольного рассеивающего потенциала. Для примера мы рассчитали эти величины для случая, когда потенциал является короткодействующим:

$$V(r) = V_0 \delta(r). \quad (38)$$

Особенностью сложной зоны является то, что даже для такого потенциала сечение рассеяния зависит от начального и конечного квазиимпульсов дырки. Расчеты показывают, что выражения для времен спиновой релаксации имеют вид

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\parallel}} = \frac{4}{3} a v_1^4 \int_0^{a/2} dz S^4(z), \quad (39)$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\perp}} = \frac{16}{3} [a(v_1 v_2)^2 + 2v_3^2] \int_0^{a/2} dz \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) S^2(z), \quad (40)$$

где  $a$  — ширина квантовой ямы, а  $v_1, v_2$  и  $v_3$  должны вычисляться в 1-ом исчезающем порядке по  $E_F / \Delta$ . Формулы (39), (40) справедливы при

$$\frac{m_h}{m_l} \left( \frac{k_F a}{\pi} \right)^2 \ll 1,$$

где  $m_h$  и  $m_l$  — массы тяжелых и легких дырок.

### 3.1. Вычисление аномального вклада в проводимость

Уравнение (9) для матричного элемента  $\tilde{v}$  подобно уравнению для куперона (13), а его ядро зависит от разности  $\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}}$ . Это позволяет выразить  $\tilde{v}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{k})$  через уходящее ( $\tau$ ) и транспортное ( $\tau_{tr}$ ) времена:

$$\tilde{v}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{k}) = \mathbf{v}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \frac{\tau_{tr}}{\tau} \delta_{\alpha\beta}. \quad (41)$$

Подставляя это выражение в (2)–(4), получим

$$\Delta\sigma^{(I)} = -\frac{e^2}{\pi\hbar} D \frac{2\pi N\tau\tau_{tr}}{\hbar} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha\beta} C_{\beta\alpha}^{\alpha\beta}(q),$$

$$\Delta\sigma^{(II)} = \Delta\sigma^{(III)} = \frac{1}{2} \frac{\tau - \tau_{tr}}{\tau_{tr}} \Delta\sigma^{(I)}. \quad (42)$$

Используя выражения для куперона (25), (33)–(35), можно получить формулу для вклада в проводимость. При  $E_F \ll \Delta$

$$\Delta\sigma = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left[ \frac{2}{q^2 + (D_0\tau_{\varphi})_{-1} + (D_0\tau_{\parallel})^{-1}} + \frac{1}{q^2 + (D_0\tau_{\varphi})^{-1} + (D_0\tau_{\perp})^{-1}} - \frac{1}{q^2 + (D_0\tau_{\varphi})^{-1}} \right], \quad (43)$$

а при  $E_F \simeq \Delta$

$$\Delta\sigma = \frac{e^2}{\pi\hbar} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2 + (D\tau_{\varphi})^{-1}}. \quad (44)$$

Для расчета магнетосопротивления согласно [1,2] в формулах (42) интегралы заменяются по следующему правилу:

$$\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \rightarrow \frac{eH}{4\pi^2\hbar c} \sum_n, \quad q^2 \rightarrow \frac{eH}{\pi\hbar c} (n + 1/2), \quad (45)$$

где  $H$  — проекция магнитного поля на нормаль к квантовой яме.

Обычно в экспериментах определяют разность между проводимостью в магнитном поле и без него:

$$\delta\sigma(H) = \Delta\sigma(H) - \Delta\sigma(0).$$

В случае  $E_F \simeq \Delta$  эта величина составляет

$$\delta\sigma(H) = -\frac{e^2}{4\pi^2\hbar} f_2\left(\frac{H}{H_{\varphi}}\right), \quad (46)$$

где

$$H_{\varphi} = \frac{\hbar c}{4eD\tau_{\varphi}}. \quad (47)$$

При  $E_F \ll \Delta$  магнитопроводимость равна

$$\delta\sigma(H) = \frac{e^2}{4\pi^2\hbar} \left[ 2f_2\left(\frac{H}{H_{\parallel}}\right) + f_2\left(\frac{H}{H_{\perp}}\right) - f_2\left(\frac{H}{H_{\varphi}}\right) \right]. \quad (48)$$

Здесь

$$H_{\parallel} = \frac{\hbar c}{4eD_0} \left( \frac{1}{\tau_{\varphi}} + \frac{1}{\tau_{\parallel}} \right), \quad H_{\perp} = \frac{\hbar c}{4eD_0} \left( \frac{1}{\tau_{\varphi}} + \frac{1}{\tau_{\perp}} \right), \quad (49)$$

а

$$f_2(x) = \ln x + \psi(1/2 + 1/x), \quad (50)$$

где  $\psi(y)$  — дигамма-функция.

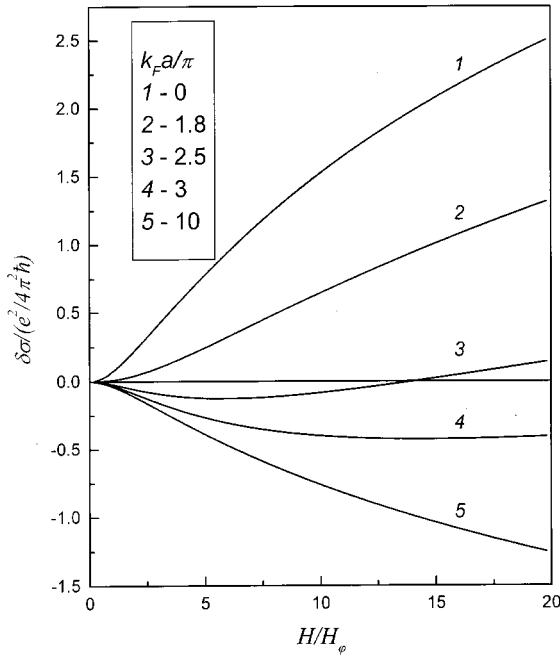


Рис. 3. Кривые магнетосопротивления при различной концентрации дырок в квантовой яме.

Особенностью зависимости  $\delta\sigma(H)$  является смена знака при изменении уровня легирования. Зависимости времен  $\tau_{\parallel, \perp}$  от концентрации различны:

$$\tau_0/\tau_{\parallel} \sim (E_F/\Delta)^2, \quad \tau_0/\tau_{\perp} \sim (E_F/\Delta)^3,$$

что обусловлено различной зависимостью от  $k$  матричных элементов  $V_{11}$  и  $V_{12}$  — см. (36), (37). Для иллюстрации на рис. 3 показаны кривые магнетосопротивления при разных значениях параметра  $k_F a$ . В расчетах предполагалось, что отношение  $\tau_{\phi}/\tau = 5$  и не зависит от  $k_F$ ,  $m_l/m_h = 0.16$ . Эти кривые демонстрируют переход от случая, когда спиновая релаксация медленная, к случаю, когда она происходит быстрее, чем сбой фазы волновой функции.

#### 4. Квантовая яма с двумя уровнями

Выше рассмотрен случай, когда заполнена только одна подзона размерного квантования. Однако в реальных структурах могут быть заполнены два или несколько уровней. В данном разделе мы рассмотрим ситуацию, когда заполнены две подзоны.

Конкретный вид вклада в магнетосопротивление зависит от соотношения между временем межподзонных переходов и временами спиновой и фазовой релаксации. Для носителей в нижней подзоне время спиновой релаксации порядка времени релаксации импульса. Это означает, что слабая локализация в нижней подзоне определяется состояниями с нулевым суммарным моментом — в формулах (34), (35)  $\tau_0/\tau_{\parallel}$  и  $\tau_0/\tau_{\perp} \simeq 1$ .

Соотношение между временами спиновой релаксации и временем релаксации импульса в верхней подзоне зависит от ее заполнения: если  $(E_F - \Delta)/\Delta \simeq 1$ , то и там они одного порядка, и вклад вносят состояния, также имеющие нулевой суммарный момент. В случае, когда  $(E_F - \Delta)/\Delta \ll 1$ , вклад возникает от четырех двухчастичных состояний.

Если  $(E_F - \Delta)/\Delta \simeq 1$ , то

$$\begin{aligned} C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = & s_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) S_{l\gamma}^{\alpha} S_{l\delta}^{\beta} + s_u(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) S_{u\gamma}^{\alpha} S_{u\delta}^{\beta} \\ & + s_{lu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) S_{l\gamma}^{\alpha} S_{u\delta}^{\beta} \\ & + s_{ul}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) S_{u\gamma}^{\alpha} S_{l\delta}^{\beta}, \end{aligned} \quad (51)$$

где греческие индексы нумеруют верхнюю ( $u$ ) и нижнюю ( $l$ ) подзоны и спиновые состояния в них (1, 2):  $\alpha = u1, u2, l1, l2$ . Ненулевые компоненты  $S_{i\gamma}^{\alpha}$  равны:

$$S_{l1}^{l1} = -S_{l1}^{l2} = S_{u2}^{u1} = -S_{u2}^{u2} = 1/\sqrt{2}. \quad (52)$$

Подставляя выражение (51) в уравнение (13), суммируя по спиновым индексам и интегрируя по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , можно получить уравнения для коэффициентов  $s_i$ :

$$\begin{aligned} s_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = & \left\langle |V_{l1,l1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 + |V_{l1,l2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 \right\rangle \\ & + \frac{2\pi\tau_l N_l}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{l1,l1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\ & + |V_{l1,l2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle s_l(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_l(\mathbf{g}, \mathbf{q})] \\ & + \frac{2\pi\tau_u N_u}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{l1,u1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\ & + |V_{l1,u2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle \\ & \times s_{ul}(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_u(\mathbf{g}, \mathbf{q})], \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} s_{ul}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = & \left\langle |V_{u1,l1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 + |V_{u1,l2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 \right\rangle \\ & + \frac{2\pi\tau_l N_l}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{u1,l1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\ & + |V_{u1,l2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle s_l(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_l(\mathbf{g}, \mathbf{q})] \\ & + \frac{2\pi\tau_u N_u}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{u1,u1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\ & + |V_{u1,u2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle \\ & \times s_{ul}(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_u(\mathbf{g}, \mathbf{q})], \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
s_u(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = & \left\langle |V_{u1,u1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 + |V_{u1,u2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 \right\rangle \\
& + \frac{2\pi\tau_u N_u}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{u1,u1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\
& + |V_{u1,u2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle s_u(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_u(\mathbf{g}, \mathbf{q})] \\
& + \frac{2\pi\tau_l N_l}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{l1,l1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\
& + |V_{l1,l2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle \\
& \times s_{lu}(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_l(\mathbf{g}, \mathbf{q})], \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{lu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) = & \left\langle |V_{l1,u1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 + |V_{l1,u2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}'})|^2 \right\rangle \\
& + \frac{2\pi\tau_u N_u}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{l1,u1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\
& + |V_{l1,u2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle s_u(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_u(\mathbf{g}, \mathbf{q})] \\
& + \frac{2\pi\tau_l N_l}{\hbar} \int \frac{d\varphi_{\mathbf{g}}}{2\pi} \left\langle |V_{l1,l1}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \right. \\
& + |V_{l1,l2}(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{g}})|^2 \left. \right\rangle \\
& \times s_{lu}(\mathbf{g}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) [1 - T_l(\mathbf{g}, \mathbf{q})]. \quad (56)
\end{aligned}$$

Решения уравнений (53)–(56) зависят от соотношения времен релаксации импульса в каждой подзоне  $\tau_l$ ,  $\tau_u$  и времен межподзонных переходов  $\tau_{lu}$ ,  $\tau_{ul}$ , которые определяются равенствами:

$$\tau_{lu}^{-1} = \frac{2\pi N_u}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{l1,u1}(\varphi)|^2 + |V_{l1,u2}(\varphi)|^2 \rangle, \quad (57)$$

$$\tau_{ul}^{-1} = \frac{2\pi N_l}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{u1,l1}(\varphi)|^2 + |V_{u1,l2}(\varphi)|^2 \rangle. \quad (58)$$

Поскольку упругое рассеяние из одной подзоны в другую сопровождается большим изменением квазиимпульса, это соотношение зависит в свою очередь от вида рассеивающего потенциала. Если он плавный, то межподзонные переходы подавлены:

$$\tau_{ul} \gg \tau_u, \quad \tau_{lu} \gg \tau_l.$$

Если потенциал короткодействующий, то

$$\tau_{ul} \simeq \tau_u, \quad \tau_{lu} \simeq \tau_l.$$

Рассмотрим два случая отдельно.

Для плавного потенциала в уравнения (53)–(56)  $\langle |V_{l1,u1}|^2 + |V_{l1,u2}|^2 \rangle \ll \langle |V_{u1,u1}|^2 \rangle$  и слагаемые типа  $\langle |V_{l1,u1}|^2 + |V_{l1,u2}|^2 \rangle T_\alpha \ll \langle |V_{u1,u1}|^2 \rangle T_\alpha$  учитывать не нужно. Как и в случае одного уровня, для определения  $s_i$ , их нужно разложить в ряды Фурье. После интегрирования и решения получившейся системы алгебраических

уравнений получаются следующие ответы:

$$\begin{aligned}
s_l = & \frac{\hbar}{2\pi N_l D_l^{(0)} (\tau_l^{(0)})^2} \frac{q^2/2 + A_u}{q^2 + A_l + A_u} \\
& \times \left[ \frac{1}{q^2 + A_l + A_u - F} + \frac{1}{q^2 + A_l + A_u + F} \right], \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{ul} = & \frac{\hbar}{2\pi N_l D_l^{(0)} (\tau_l^{(0)})^2} \frac{[2D_u^{(0)} \tau_{ul}]^{-1}}{q^2 + A_l + A_u} \\
& \times \left[ \frac{1}{q^2 + A_l + A_u - F} + \frac{1}{q^2 + A_l + A_u + F} \right], \quad (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_u = & \frac{\hbar}{2\pi N_u D_u^{(0)} (\tau_u^{(0)})^2} \frac{q^2/2 + A_l}{q^2 + A_l + A_u} \\
& \times \left[ \frac{1}{q^2 + A_l + A_u - F} + \frac{1}{q^2 + A_l + A_u + F} \right], \quad (61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{lu} = & \frac{\hbar}{2\pi N_u D_u^{(0)} (\tau_u^{(0)})^2} \frac{[2D_l^{(0)} \tau_{lu}]^{-1}}{q^2 + A_l + A_u} \\
& \times \left[ \frac{1}{q^2 + A_l + A_u - F} + \frac{1}{q^2 + A_l + A_u + F} \right], \quad (62)
\end{aligned}$$

где

$$A_l = \frac{1}{2D_l^{(0)}} \left[ \frac{1}{\tau_\varphi^{(l)}} + \frac{1}{\tau_{lu}} \right], \quad A_u = \frac{1}{2D_u^{(0)}} \left[ \frac{1}{\tau_\varphi^{(u)}} + \frac{1}{\tau_{ul}} \right]. \quad (63)$$

$$F = \left[ (A_l - A_u)^2 + \frac{1}{D_l^{(0)} \tau_{lu} D_u^{(0)} \tau_{ul}} \right]^{1/2}. \quad (64)$$

Индекс (0) означает, что соответствующие величины вычисляются без учета межподзонных переходов.

Для короткодействующего потенциала упрощений, связанных с малостью межподзонных матричных элементов, не возникает. При разложении в ряд Фурье в уравнении, как и в случае одного уровня — см. (24), появляются нулевая и первая гармоники потенциалов:

$$L_n = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{l1,l1}(\varphi)|^2 + |V_{l1,l2}(\varphi)|^2 \rangle e^{-in\varphi}, \quad (65)$$

$$U_n = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{u1,u1}(\varphi)|^2 + |V_{u1,u2}(\varphi)|^2 \rangle e^{-in\varphi}, \quad (66)$$

$$W_n = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \langle |V_{l1,u1}(\varphi)|^2 + |V_{l1,u2}(\varphi)|^2 \rangle e^{-in\varphi}. \quad (67)$$

Поскольку межподзонные переходы эффективны, процесс диффузии нельзя свести к диффузии частиц в разных зонах. Поэтому в выражения для куперонов входят общие коэффициенты диффузии и время сбоя фазы, являющиеся результатом усреднения по обеим зонам:

$$s_{l,u} = \frac{\hbar}{2\pi(N_l + N_u)\tau_{l,u}^2} \frac{1}{Dq^2 + \tau_\varphi^{-1}}, \quad (68)$$

$$s_{lu} = s_{ul} = \frac{\hbar}{2\pi(N_l + N_u)\tau_l\tau_u} \frac{1}{Dq^2 + \tau_\varphi^{-1}}, \quad (69)$$

$$D = \frac{N_l}{N_l + N_u} \frac{(v_F^{(l)})^2 \tau_l}{2} \frac{1 - N_u\tau_u U_1}{Z} + \frac{N_u}{N_l + N_u} \frac{(v_F^{(u)})^2 \tau_u}{2} \frac{1 - N_l\tau_l L_1}{Z} + \frac{N - [l]N_u}{N_l + N_u} \frac{v_F^{(l)} v_F^{(u)} \tau_l \tau_u}{Z} \frac{W_1}{Z}, \quad (70)$$

$$Z = (1 - N_l\tau_l L_1)(1 - N_u\tau_u U_1) - N_l N_u \tau_l \tau_u W_1^2,$$

$$\tau_\varphi^{-1} = \frac{N_l/\tau_\varphi^{(l)} + N_u/\tau_\varphi^{(u)}}{N_l + N_u}. \quad (71)$$

Отличие в усреднении по подзонам в выражениях для  $D$  и  $\tau_\varphi$  обусловлено тем, что при рассматриваемом нами феноменологическом введении времен фазовой релаксации считалось, что они не зависят от углов.

Для нахождения оператора скорости нужно решить уравнение (9) с учетом двух подзон. Это также может быть сделано с помощью фурье-разложения:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha\beta)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha\alpha)} \delta_{\alpha\beta},$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(l1,l1)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(l2,l2)} = \frac{1 - N_u U_1 \tau_u v^{(l)}}{Z} + \frac{N_u W_1 \tau_u v^{(u)}}{Z},$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(u1,u1)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(u2,u2)} = \frac{1 - N_l L_1 \tau_l v^{(u)}}{Z} + \frac{N_l W_1 \tau_l v^{(l)}}{Z}. \quad (72)$$

В случае плавного потенциала  $|W_1| \ll |L_1|, |U_1|$ , и операторы скорости определяются рассеянием внутри одной подзоны:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(l1,l1)} = \mathbf{v}^{(l)} \frac{\tau_{lr}^{(l)}}{\tau_l},$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(u1,u1)} = \mathbf{v}^{(u)} \frac{\tau_{ur}^{(u)}}{\tau_u}. \quad (73)$$

Для вычисления аномального вклада в проводимость надо подставить выражение для куперонов и оператора скорости в формулы (2)–(4). В случае плавного потенциала

$$\Delta\sigma^{(l)} = \frac{2e^2}{\hbar^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left[ N_l D_l^{(0)} \tau_l^{(0)} \tau_{lr}^{(l)} s_l(q) + N_u D_u^{(0)} \tau_u^{(0)} \tau_{ur}^{(u)} s_u(q) \right], \quad (74)$$

$$\Delta\sigma^{(ll)} = \Delta\sigma^{(lll)} = \frac{e^2}{\hbar^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left[ N_l D_l^{(0)} \tau_l^{(0)} \left( \tau_l^{(0)} \tau_{lr}^{(l)} \right) s_l(q) + N_u D_u^{(0)} \tau_u^{(0)} \left( \tau_u^{(0)} - \tau_{ur}^{(u)} \right) s_u(q) \right]. \quad (75)$$

При рассеянии на короткодействующем потенциале

$$\Delta\sigma^{(l)} = \frac{e^2}{\hbar^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left\{ \left[ \tilde{\mathbf{v}}^{(l1,l1)} \right]^2 N_l \tau_l^3 s_l(q) + \left[ \tilde{\mathbf{v}}^{(u1,u1)} \right]^2 N_u \tau_u^3 s_u(q) \right\}, \quad (76)$$

$$\Delta\sigma^{(ll)} = \Delta\sigma^{(lll)} = -\frac{e^2}{2\hbar^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left\{ \left[ \tilde{\mathbf{v}}^{(l1,l1)} N_l \tau_l^2 \right]^2 L_1 s_l(q) + \left[ \tilde{\mathbf{v}}^{(u1,u1)} N_u \tau_u^2 \right]^2 U_1 s_u(q) + \tilde{\mathbf{v}}^{(l1,l1)} \tilde{\mathbf{v}}^{(u1,u1)} N_l N_u \tau_l^2 \tau_u^2 W_1 \times [s_{lu}(q) + s_{ul}(q)] \right\}. \quad (77)$$

Отсюда и из формул (59)–(62), (68), (69) следует, что как в случае плавного, так и в случае короткодействующего потенциала с учетом межподзонных переходов выражения для куперонов представим в виде диффузионных полюсов. Поэтому выражение для  $\delta\sigma(H)$  получается заменой (45).

При рассеянии на короткодействующем потенциале

$$\delta\sigma(H) = -\frac{e^2}{4\pi^2 \hbar} f_2 \left( \frac{4eD\tau_\varphi H}{\hbar c} \right), \quad (78)$$

где  $D$  и  $\tau_\varphi$  определены в (70), (71).

В случае плавного потенциала

$$\delta\sigma(H) = -\frac{e^2}{4\pi^2 \hbar} \left[ f_2 \left( \frac{H}{H_+} \right) + f_2 \left( \frac{H}{H_-} \right) \right], \quad (79)$$

где

$$H_\pm = \frac{\hbar c}{4e} (A_l + A_u \pm F). \quad (80)$$

Данное выражение для проводимости справедливо при произвольном соотношении между временами межподзонных переходов и временами сбоя фаз волновых функций. В предельных случаях выражения для  $H_\pm$  упрощаются. При  $\tau_{lu} \gg \tau_\varphi^{(l)}$  и  $\tau_{ul} \gg \tau_\varphi^{(u)}$

$$H_- = \frac{\hbar c}{4e D_l^{(0)} \tau_\varphi^{(l)}}, \quad H_+ = \frac{\hbar c}{4e D_u^{(0)} \tau_\varphi^{(u)}}, \quad (81)$$

а при  $\tau_{lu} \ll \tau_\varphi^{(l)}$  и  $\tau_{ul} \ll \tau_\varphi^{(u)}$

$$H_- = \frac{\hbar c}{4e D_0 \tau_\varphi}, \quad H_+ = \frac{\hbar c}{4e} \left( \frac{1}{D_l^{(0)} \tau_{lu}} + \frac{1}{D_u^{(0)} \tau_{ul}} \right), \quad H_+ \gg H_-, \quad (82)$$

где  $\tau_\varphi$  совпадает с (71), а  $D_0$  получается из (70) при  $|W_1| \ll |L_1|, |U_1|$ :

$$D_0 = \frac{N_l D_l^{(0)} + N_u D_u^{(0)}}{N_l + N_u}.$$



Эти формулы имеют наглядный физический смысл. Если время сбоя фазы короче времени межуровневых переходов, то обе подзоны дают независимый вклад в проводимость. Если же за время сбоя фазы носители совершают много переходов между подзонами, то проводимость имеет стандартный вид (78), куда входят усредненные по двум подзонам величины  $D_0$  и  $\tau_\varphi$ .

Формула (79) означает, что кривая магнетосопротивления имеет две особенности: при  $H = H_-$  и  $H = H_+$ . В случае  $H_+ \gg H_-$  ( $\tau_{l,u} \ll \tau_{lu,ul} \ll \tau_\varphi^{(l,u)}$ ) в полях  $H \geq H_+$  возникает вторая особенность, обусловленная тем, что частота сбоя фазы магнитным полем становится выше частоты межподзонных переходов. При таком соотношении между временами обе особенности могут наблюдаться экспериментально. Отсутствие второй особенности в формуле (78) объясняется тем, что при рассеянии на короткодействующем потенциале

$$H_+ \simeq \frac{\hbar c}{4eD\tau}$$

и представляет собой предельное поле для диффузионной теории.

В случае, когда смешивание состояний на уровне Ферми в верхней подзоне мало, как упоминалось выше, вклад в слабую локализацию вносят все двухчастичные состояния в ней. Такая ситуация реализуется, когда  $(E_F - \Delta)/\Delta \ll 1$ . Однако в сферическом приближении вклады в куперон от состояний с моментом 1 и 0 отделяются. Смешивание состояний в нижней подзоне при этом сильное, и в ней существенно только состояние с нулевым суммарным моментом. Поэтому куперон имеет вид

$$\begin{aligned} C_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q) = & s_1(q)S_{l\gamma}^\alpha + s_u(q)S_{u\gamma}^\alpha S_{u\delta}^\beta \\ & + s_{lu}(q) \left( S_{l\gamma}^\alpha S_{u\delta}^\beta + S_{u\gamma}^\alpha S_{l\delta}^\beta \right) \\ & + p_{ul}(q) \left( P_{u+\gamma}^\alpha P_{u+\delta}^\beta + P_{u-\gamma}^\alpha P_{u-\delta}^\beta \right) \\ & + p_{u0}(q) P_{u0\gamma}^\alpha P_{u0\delta}^\beta. \end{aligned} \quad (83)$$

$S_{l\gamma}^\alpha$ ,  $S_{u\gamma}^\alpha$  определены в (52), а ненулевые компоненты  $P_{i\gamma}^\alpha$  равны:

$$(P_{u+})_{u1}^{u1} = (P_{u-})_{u2}^{u2} = 1, \quad (P_{u0})_{u2}^{u1} = (P_{u0})_{u1}^{u2} = 1/\sqrt{2}. \quad (84)$$

Выражения для коэффициентов  $s_i$  и  $p_i$  зависят от отношения между временем межподзонных переходов и временем импульсной релаксации в верхней подзоне. При  $\tau_{ul} \simeq \tau_u$  коэффициенты  $p_{ul}$  и  $p_{u0}$  не имеют вида диффузионного полюса и не дают вклада в эффекты слабой локализации, а выражения для  $s_i$  совпадают с (68), (69). Соответственно зависимость  $\delta\sigma(H)$  определяется формулой (78).

В обратном случае, когда  $\tau_{ul} \gg \tau_u$ , уравнения для  $p_{u0}$  и  $p_{u1}$  имеют вид, подобный (30), (31), в которых нужно учесть редкие переходы в нижнюю подзону. Поэтому

окончательное выражение для них имеет вид

$$p_{u1}(q) = \frac{\hbar}{2\pi N_u \tau_u^{(0)}} \times \frac{1}{D_u^{(0)} q^2 \tau_u^{(0)} + \tau_u^{(0)}/\tau_\varphi + \tau_u^{(0)}/\tau_{\parallel}^{(u)} + \tau_u^{(0)}/\tau_{ul}}, \quad (85)$$

$$p_{u0}(q) = \frac{\hbar}{2\pi N_u \tau_u^{(0)}} \times \frac{1}{D_u^{(0)} q^2 \tau_u^{(0)} + \tau_u^{(0)}/\tau_\varphi + \tau_u^{(0)}/\tau_{\perp}^{(u)} + \tau_u^{(0)}/\tau_{ul}}. \quad (86)$$

Выражение для  $s_i$  полностью аналогичны формулам (59)–(62).

Времена  $\tau_{\parallel,\perp}^{(u)}$  описывают спиновую релаксацию в верхней подзоне. Мы рассчитали их для рассеяния на короткодействующем потенциале. Общее выражение для них зависит от типа возбужденной подзоны. Если при  $k = 0$  ей соответствует второй уровень размерного квантования тяжелых дырок, то

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\parallel}^{(u)}} = \frac{4}{3} a v_2^4 \int_0^{a/2} dz C^4(z), \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{\tau_{\perp}^{(u)}} = & \frac{16}{3} \left[ a(v_1 v_2)^2 + 2v_0^2 \right] \\ & \times \int_0^{a/2} dz \sin^2 \left( \frac{2\pi z}{a} \right) C^2(z), \end{aligned} \quad (88)$$

а если ей соответствует первый уровень легких дырок, то

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\parallel}^{(u)}} = \frac{4}{3} a v_3^4 \int_0^{a/2} dz S^4(z), \quad (89)$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_{\perp}^{(u)}} = \frac{16}{3} \left[ a(v_0 v_3)^2 + 2v_1^2 \right] \int_0^{a/2} dz \cos^2 \left( \frac{\pi z}{a} \right) S^2(z). \quad (90)$$

Отметим, что в использованном нами сферическом приближении и в приближении бесконечно высоких барьеров тип верхней подзоны определяется отношением  $m_l/m_h$ . При  $m_l/m_h < 1/4$  верхняя подзона сформирована тяжелыми дырками, при  $m_l/m_h > 1/4$  — легкими. Однако в реальных структурах тип подзоны зависит не только от отношения масс, поэтому при сравнении теории с экспериментальными данными можно использовать те выражения для времен спиновой релаксации (87), (88) или (89), (90), которые соответствуют типу возбужденной подзоны.

Выражение для  $\delta\sigma(H)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\sigma(H) = & \frac{e^2}{4\pi^2 \hbar} \left[ 2f_2 \left( \frac{H}{H_{\parallel}^{(u)}} \right) + f_2 \left( \frac{H}{H_{\perp}^{(u)}} \right) \right. \\ & \left. - f_2 \left( \frac{H}{H_-} \right) - f_2 \left( \frac{H}{H_+} \right) \right], \end{aligned} \quad (91)$$

где

$$H_{\parallel}^{(u)} = \frac{\hbar c}{4eD_u^{(0)}} \left( \frac{1}{\tau_{\varphi}^{(u)}} + \frac{1}{\tau_{\parallel}^{(u)}} + \frac{1}{\tau_{ul}} \right), \quad (92)$$

$$H_{\perp}^{(u)} = \frac{\hbar c}{4eD_u^{(0)}} \left( \frac{1}{\tau_{\varphi}^{(u)}} + \frac{1}{\tau_{\perp}^{(u)}} + \frac{1}{\tau_{ul}} \right), \quad (93)$$

а величины  $H_{\pm}$  определяются формулами (80).

При  $H_{\pm} < H_{\parallel, \perp}^{(u)}$  зависимость  $\delta\sigma(H)$  изменяет знак, а если  $H_{\pm} > H_{\parallel, \perp}^{(u)}$ , то величина  $\delta\sigma(H)$  положительна во всей своей области применимости диффузионной теории.

С увеличением концентрации носителей в верхней подзоне времена спиновой релаксации в ней  $\tau_{\parallel}^{(u)}$  и  $\tau_{\perp}^{(u)}$  уменьшаются и первые два слагаемых в формуле (91) исчезают. При этом формула (91) переходит в формулу (79).

## 5. Заключение

Построена теория слабой локализации в квантовых ямах с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Учтена возможность заполнения нескольких подзон размерного квантования. Получены выражения для магнетосопротивления при различных соотношениях времен спиновой релаксации, импульсной релаксации, времени релаксации фазы и времени межподзонных переходов. Характерные магнитные поля, при которых возможно появление особенностей в магнетосопротивлении, вычислены с учетом реальной зонной структуры квантово-размерных систем.

Данная работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 96-02-16959а, 96-15-96955), Программой "Физика твердотельных наноструктур" и Фондом Фольксвагена (Volkswagen Foundation).

## Список литературы

- [1] S. Hikami, A. Larkin, Y. Nagaoka. Progr. Theor. Phys., **63**, 707 (1980).
- [2] Б.Л. Альтшулер, А.Г. Аронов, А.И. Ларкин, Д.Е. Хмельницкий. ЖЭТФ, **81**, 768 (1981).
- [3] С.В. Иорданский, Ю.Б. Лянда-Геллер, Г.Е. Пикус. Письма ЖЭТФ, **60**, 199 (1994).
- [4] F.G. Pikus, G.E. Pikus. Phys. Rev. B, **51**, 16 928 (1995).
- [5] W. Knap, C. Skierbiszewski, A. Zduniak, E. Litvin-Staszewska, D. Bertho, F. Kobbi, J.L. Robert, G.E. Pikus, F.G. Pikus, S.V. Iordanskii, V. Moser, K. Zekenes, Yu.B. Lyanda-Geller. Phys. Rev. B, **53**, 3912 (1996).
- [6] Н.С. Аверкиев, Л.Е. Голуб, Г.Е. Пикус. ЖЭТФ, **113**, 1429 (1998).
- [7] N.S. Averkiev, L.E. Golub, G.E. Pikus. Sol. St. Comm., **107** (1998) (in press).
- [8] И.А. Меркулов, В.И. Перель, М.Е. Портной. ЖЭТФ, **99**, 1202 (1991).

Редактор Т.А. Полянская

## Weak localization in *p*-type quantum wells

N.S. Averkiev, L.E. Golub, G.E. Pikus

A.F. Ioffe Physicotechnical Institute,  
Russian Academy of Sciences,  
194021 St. Petersburg, Russia

**Abstract** The weak localization theory leading to the anomalous magnetoresistance is developed for quantum heterostructures with strong spin-orbit interaction. Real quantum wells with a few occupied subbands of size quantization have been considered. We have shown that the parameters which define the conductivity in classically weak magnetic fields average effectively at intensive elastic transitions between them. In the other limiting case, all the subbands give independent contributions to the anomalous magnetoresistance. Relevant characteristic magnetic fields have been calculated for an arbitrary relation between the times of phase breaking and intersubband transitions.