

# Внутризонное поглощение света в квантовых ямах за счет электрон-электронных столкновений

© Г.Г. Зегря, В.Е. Перлин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, 194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 22 июля 1997 г. Принята к печати 27 июля 1997 г.)

Показано, что вследствие непараболичности зон в полупроводниковом материале с квантовыми ямами возможно внутризонное поглощение длинноволнового излучения за счет кулоновского взаимодействия электронов. Для предельных случаев невырожденного и сильно вырожденного двумерного электронного газа найдены аналитические выражения для коэффициентов поглощения. При больших концентрациях носителей рассматриваемое поглощение может оказаться более существенным, чем поглощение, обусловленное электрон-фононным взаимодействием.

## 1. Введение

В настоящее время широко изучаются физические процессы в полупроводниковых гетероструктурах с квантовыми ямами. Многочисленные эксперименты показывают наличие в таких системах сильного поглощения излучения, энергия квантов которого ( $\hbar\omega \sim 1 \div 5$  мэВ) меньше расстояния между подзонами размерного квантования [1]. Такое излучение может поглощаться только за счет внутризонных и, следовательно, не прямых переходов. Для одновременного выполнения законов сохранения энергии и импульса в таких переходах электрон, поглотивший фотон, должен рассеяться на какой-нибудь третьей частице. В литературе рассматриваются в основном внутризонные переходы с рассеянием на фонах или с участием примесей [2,3]. В данной работе мы рассматриваем новый механизм внутривозонного поглощения на свободном электронном газе, обусловленный электрон-электронным рассеянием. В случае квадратичного закона дисперсии в подзоне этот механизм поглощения не реализуется, для его расчета необходимо учитывать непараболичность спектра электронов, связанную с взаимодействием зоны проводимости и валентной зоны. При больших концентрациях носителей заряда механизм поглощения за счет электрон-электронных столкновений может оказаться более эффективным, чем фононный или примесный механизм.

## 2. Матричные элементы переходов

Пусть полупроводниковая структура, неограниченная и однородная в плоскости  $(y, z)$ , содержит бесконечно глубокую квантовую яму с потенциалом (в зоне проводимости)  $U(x) = 0$  в интервале  $x \in [0, a]$  и  $U(x) = \infty$  вне этого интервала ( $a$  — ширина ямы). Энергия электрона в зоне проводимости, отсчитанная от середины запрещенной зоны  $E_g$ , вычисляется в рамках модели Кейна [4]:

$$E_c(k, \mathbf{q}) = \sqrt{(E_g/2)^2 + \gamma^2(k^2 + q^2)},$$

где  $k$  — волновое число движения вдоль оси  $x$ ,  $\mathbf{q} = (q_y, q_z)$  — волновой вектор свободного движения в

плоскости  $(y, z)$ , а  $\gamma$  — параметр модели Кейна, пропорциональный матричному элементу оператора импульса между состояниями валентной зоны и зоны проводимости. Будем считать, что заполнена только нижняя подзона размерного квантования, поэтому  $k = \pi/a$ . Разложив энергию  $E_c(\mathbf{q})$  по степеням  $\mathbf{q}$  при малых  $q$  и заменив  $q_{y,z}$  на  $p_{y,z}/\hbar$ , запишем оператор кинетической энергии движения электрона в плоскости  $(y, z)$  в виде

$$\hat{T} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_c} - \left(\frac{\gamma}{E_g\hbar}\right)^4 E_g \hat{\mathbf{p}}^4. \quad (1)$$

Здесь  $m_c$  — эффективная масса электрона в зоне проводимости, которую легко выразить через  $\gamma, E_g, k$ . Слагаемое, пропорциональное  $\hat{\mathbf{p}}^4$ , дает поправку к квадратичному закону дисперсии. Ее малость определяется малостью параметра  $q_T \gamma / E_g \ll 1$ , где  $q_T = \sqrt{2m_c T / \hbar^2}$  — характерная величина волнового вектора электрона в случае невырожденного электронного газа. Если газ вырожден, то  $q_T$  надо заменить здесь на импульс Ферми  $q_F$ . Будем решать задачу о нахождении коэффициента поглощения в 1-м порядке по непараболичности. Нетрудно показать, что в этом случае ее надо учесть только в операторе  $\hat{V}_{\text{opt}}$  взаимодействия электронов с полем фотонов, а влиянием непараболичности на волновые функции можно пренебречь.

Волновая функция электрона в основном состоянии в яме равна  $\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = (1/\sqrt{S})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\Psi_x(x)$ , где  $\rho$  — радиус-вектор в плоскости ямы,  $\mathbf{r} = (x, \rho)$ ,  $\Psi_x(x) = \sqrt{2/a} \sin kx$  в яме,  $\Psi_x(x) = 0$  вне ямы — волновая функция движения по оси  $x$ . Здесь использована нормировка "в ящике" площадью  $S$ . Волновая функция системы из двух электронов равна  $\Psi_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (1/\sqrt{2})[\Psi_{\mathbf{q}_1}(\mathbf{r}_1)\Psi_{\mathbf{q}_2}(\mathbf{r}_2) - \Psi_{\mathbf{q}_1}(\mathbf{r}_2)\Psi_{\mathbf{q}_2}(\mathbf{r}_1)]$ . Найдем матричный элемент взаимодействия этой системы с полем фотонов  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Для этого в гамильтониане заменяем  $\hat{\mathbf{p}}$  на  $\hat{\mathbf{p}} + (e/c)\mathbf{A}$  и, учитывая только линейные по полю члены (отвечающие однофотонному поглощению), получаем оператор взаимодействия

$$\hat{V}_{\text{opt}} = \frac{e}{cm_c} [\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t)\hat{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t)\hat{\mathbf{p}}_2] - \frac{4e\gamma^4}{cE_g^3\hbar^4} [\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t)\hat{\mathbf{p}}_1^3 + \mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t)\hat{\mathbf{p}}_2^3]. \quad (2)$$

Для плоской монохроматической волны вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0 \mathbf{e} \exp[i(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r} - \omega t)]$ , где  $A_0$  — амплитуда, связанная с объемной концентрацией фотонов  $N$  соотношением  $A_0^2 = 2\pi N \hbar c^2 / \omega n_\epsilon^2$  ( $n_\epsilon$  — показатель преломления среды на частоте  $\omega$ ),  $\omega$  и  $\boldsymbol{\kappa} = (\boldsymbol{\kappa}_x, \boldsymbol{\kappa}_p)$  — частота и волновой вектор света,  $\mathbf{e} = (e_x, \mathbf{e}_p)$  — орт поляризации. При выводе (2) мы воспользовались калибровкой Ландау  $\phi = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ . Вычислим матричный элемент между начальным состоянием  $\Psi_i = \Psi_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}$  и конечным состоянием  $\Psi_f = \Psi_{\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4}$ . При интегрировании по  $x$  возникает интеграл вида  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{\kappa}_x x} |\Psi_x(x)|^2 dx$ . Его можно считать равным 1, так как волновой вектор фотона  $\boldsymbol{\kappa}_x \sim 10^4 \text{ см}^{-1}$  много меньше, чем  $1/a \sim 10^6 \text{ см}^{-1}$ , и экспонента в интеграле равна единице. Интегрирование в плоскости  $(y, z)$  дает  $\delta$ -символы Кронекера. В итоге матричный элемент взаимодействия электронов с фотонами равен

$$V_{\text{opt},if} = (-i)e^{-i\omega t} \frac{e\hbar}{cm_c} A_0 \left\{ [\mathbf{e}_p(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4)] - b_0(\mathbf{e}_p \mathbf{q}_3)q_3^2 - b_0(\mathbf{e}_p \mathbf{q}_4)q_4^2 \right\} \times (\delta_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3} \delta_{\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_4} - \delta_{\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3} \delta_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_4}), \quad (3)$$

где  $b_0 = 4m_c \gamma^4 / \hbar^2 E_g^3$ .

Найдем теперь матричный элемент электрон-электронного взаимодействия. Оператор взаимодействия равен  $\hat{V}_{ee} = e^2 / (\epsilon |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды. Матричный элемент между состояниями  $\Psi_i = \Psi_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}$  и  $\Psi_f = \Psi_{\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4}$ , описываемыми антисимметричными волновыми функциями, имеет вид

$$V_{ee,if} = V_2 - V_1,$$

где

$$V_1 = \int \Psi_1^*(\mathbf{r}_1) \Psi_4(\mathbf{r}_1) \frac{e^2}{\epsilon |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \Psi_2^*(\mathbf{r}_2) \Psi_3(\mathbf{r}_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2,$$

$$V_2 = \int \Psi_1^*(\mathbf{r}_1) \Psi_3(\mathbf{r}_1) \frac{e^2}{\epsilon |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \Psi_2^*(\mathbf{r}_2) \Psi_4(\mathbf{r}_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 \quad (4)$$

(здесь для простоты пишем  $\Psi_{q_i} = \Psi_i$ ). Для вычисления этих интегралов перейдем к фурье-представлению. Тогда для  $V_1$  получим

$$V_1 = \frac{4\pi e^2}{(2\pi)^3 \epsilon} \int \frac{I_{14}(\mathbf{q}) I_{23}(-\mathbf{q})}{q^2} d^3 \mathbf{q}, \quad (5)$$

где  $I_{ij}(\mathbf{q}) = \int \Psi_i^*(\mathbf{r}) \Psi_j(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3 r$ . Подставив сюда явные выражения для волновых функций, получим

$$V_1 = \frac{4\pi e^2}{(2\pi)^3 \epsilon} \frac{(2\pi)^4}{S^2} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) J(|\mathbf{q}_p|), \quad (6)$$

где  $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2$  — переданный при кулоновском рассеянии импульс, а

$$J(q_p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[ \frac{1}{q_p^2 + q^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi_x(x)|^2 e^{iqx} \right|^2 \right] = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{4\pi}{q_p^3} (q_p a - 1 + e^{-q_p a}) + \frac{2\pi a}{4k^2 + q_p^2} + \frac{2\pi(4k^2 - q_p^2)(1 - e^{-q_p a})}{(4k^2 + q_p^2)^2 q_p} + \frac{6\pi(1 - e^{-q_p a})}{(4k^2 + q_p^2) q_p} \right]. \quad (7)$$

Интеграл  $V_2$  находится аналогично  $V_1$ . Множитель  $[J(|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3|) - J(|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3|)]$  в выражении для кулоновского матричного элемента, равного  $(V_2 - V_1)$ , можно сильно упростить. Переданный импульс  $q_p$  по порядку величины равен тепловому импульсу  $q_T$  (в случае бoльцмановской статистики). При комнатной температуре величина  $q_T \sim 10^6 \text{ см}^{-1}$ . В случае вырожденной статистики все импульсы сравнимы с импульсом Ферми  $q_F$ , который имеет такой же порядок величины. Для достаточно узкой квантовой ямы  $a \sim 100 \text{ \AA}$ , величина  $q_p a$  оказывается меньшей или порядка единицы, и этот множитель можно с хорошей точностью, тем большей, чем меньше  $a$ , аппроксимировать разностью  $\pi(|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3|^{-1} - |\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3|^{-1})$ . Тогда кулоновский матричный элемент можно записать в виде

$$V_{ee,if} = \frac{(2\pi)^3 e^2}{\epsilon S^2} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \times \left( \frac{1}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4|} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\delta$ -функция выражает закон сохранения импульса при столкновении двух электронов.

### 3. Вычисление коэффициента поглощения

Рассматриваемый процесс поглощения за счет электрон-электронных столкновений рассчитывается во 2-м порядке теории возмущений. Число переходов системы двух электронов в единицу времени на единице площади равно

$$W = \frac{1}{S} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{i,f} \left| \sum_m \left( \frac{V_{\text{opt},im} V_{ee,mf}}{\epsilon_m - \epsilon_i - \hbar\omega} + \frac{V_{ee,im} V_{\text{opt},mf}}{\epsilon_m - \epsilon_i} \right) \right|^2 \times \delta(\epsilon_f - \epsilon_i - \hbar\omega) \left\{ f(\mathbf{q}_1) f(\mathbf{q}_2) [1 - f(\mathbf{q}_3)] [1 - f(\mathbf{q}_4)] - f(\mathbf{q}_3) f(\mathbf{q}_4) [1 - f(\mathbf{q}_1)] [1 - f(\mathbf{q}_2)] \right\}. \quad (9)$$

Здесь производится суммирование по всем начальным, конечным и промежуточным состояниям частиц —  $\Psi_i = \Psi_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}$ ,  $\Psi_f = \Psi_{\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4}$  и  $\Psi_m = \Psi_{\mathbf{q}_{m1}, \mathbf{q}_{m2}}$ ,  $S$  — площадь гетероперехода,  $\epsilon_i, \epsilon_f, \epsilon_m$  — энергии,  $f(\mathbf{q}_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  — вероятности заполнения электронами соответствующих состояний.

Из вида матричного элемента  $V_{\text{opt},im(mf)}$  (3) следует, что он принимает ненулевые значения только для четырех промежуточных состояний, совпадающих, с точностью до перестановки индексов, с начальным или конечным состоянием. Легко видеть, что при суммировании по ним вследствие закона сохранения импульса  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4$  слагаемые, не содержащие коэффициента  $b_0$ , описывающего непараболичность спектра, сокращаются. Это означает, что в случае квадратичного закона дисперсии рассматриваемый механизм поглощения не реализуется. Составной матричный элемент пропорционален коэффициенту  $b_0$ :

$$|M|^2 = \left| \sum_m (\dots) \right|^2 = 4A_0^2 b_0^2 \frac{(2\pi)^2 e^4}{\epsilon^2 S^4} \left( \frac{e\hbar}{m_c c} \right)^2 \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \times \left( \frac{1}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3|} \right)^2 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4)^2 \times [(\mathbf{e}_p \mathbf{q}_3)q_3^2 + (\mathbf{e}_p \mathbf{q}_4)q_4^2 - (\mathbf{e}_p \mathbf{q}_1)q_1^2 - (\mathbf{e}_p \mathbf{q}_2)q_2^2]^2. \quad (10)$$

Рассмотрим два предельных случая распределения электронов по состояниям.

1. *Невырожденный электронный газ.* В этом случае числа заполнения будем считать малыми,  $f(\mathbf{q}_j) = (2\pi n \hbar^2 / m_c T) \exp(-q_j^2 / 2m_c T) \ll 1$ , и произведениями, содержащими не больше двух из них, в (9) мы пренебрежем. Соответствующая скобка в (9) еще упрощается, если воспользоваться законом сохранения энергии  $q_3^2 / 2m_c + q_4^2 / 2m_c - q_1^2 / 2m_c - q_2^2 / 2m_c = \hbar\omega$ :

$$\{\dots\} = f(\mathbf{q}_1)f(\mathbf{q}_2) - f(\mathbf{q}_3)f(\mathbf{q}_4) = \left( \frac{4\pi n \hbar^2}{2m_c T} \right)^2 \times \exp \left[ \frac{\hbar^2(q_1^2 + q_2^2)}{2m_c T} \right] \left[ 1 - \exp \left( \frac{-\hbar\omega}{T} \right) \right]. \quad (11)$$

Переходим в выражении (9) от суммирования по начальным и конечным импульсам к интегрированию  $\sum_{\mathbf{q}_j} \rightarrow [S/(2\pi)^2] \int d^2 \mathbf{q}_j$ . При этом интегрирование по  $\mathbf{q}_4$  можно выполнить с помощью одной из  $\delta$ -функций из (10), вторую из них заменяем на  $\delta$ -символ Кронекера:  $\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) = [S/(2\pi)^2] \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} = S/(2\pi)^2$ . Получается шестикратный интеграл, который можно вычислить аналитически (см. Приложение 1).

Коэффициент поглощения  $G$  равен числу переходов в единице объема вещества, деленному на плотность потока фотонов  $Nv = Nc/n_\epsilon$ . Для одинарной квантовой ямы понятие о коэффициенте поглощения бессмысленно, так как экспериментально определяемый коэффициент пропускания  $[1 - \exp(-aG)]$  практически не отличим от единицы. Поэтому для наблюдения поглощения в двумерных системах имеет смысл в качестве образца брать многослойную структуру из большого числа поглощающих слоев (квантовых ям), чередующихся с прозрачными слоями. Если период такой структуры равен  $L$ , то число переходов в единице объема получается из

найденного выше числа переходов на единицу площади делением на  $L$ . Таким образом для коэффициента поглощения получим

$$G = \frac{W n_\epsilon}{L N c} = \frac{2^{10} \pi^3 n^2 \lambda_g^4 e^2 T^2 E_B}{n_\epsilon L \hbar c (\hbar\omega)^2 (\hbar\omega)} \times \left( 1 + \frac{5\hbar\omega}{2T} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar\omega}{T} \right) \right], \quad (12)$$

где  $\lambda_g = \hbar / \sqrt{2m_c E_g}$ , а  $E_B = m_c e^4 / 2\hbar^2 \epsilon^2$  — боровская энергия для электрона в кристалле. Здесь мы учли, что  $\gamma \simeq \hbar \sqrt{E_g / 2m_c}$ , а  $b_0 = 2\lambda_g^2$  (см (3)). Для оценки величины поглощения выберем типичные параметры стандартных полупроводников, например GaAs: показатель преломления  $n_\epsilon = 3.5$ , статическая диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 10$ , эффективная масса электрона в зоне проводимости  $m_c = 0.1m_0 = 10^{-28}$  г, температура комнатная  $T = 0.026$  эВ, энергия кванта света  $\hbar\omega = 3 \cdot 10^{-3}$  эВ, двумерная концентрация электронов в квантовой яме  $n = 10^{11}$  см $^{-2}$ , ширина запрещенной зоны  $E_g \simeq 1.6$  эВ, расстояние между ямами  $L = 10^{-4}$  см. Подставляя эти значения в (12), получим оценку  $G \simeq 1$  см $^{-1}$ .

2. *Сильно вырожденный электронный газ.* Если энергия квантов света  $\hbar\omega$  много меньше энергии Ферми  $\epsilon_F = 2\pi \hbar^2 n / m_c$ , то все переходы электронов, связанные с поглощением этого света, должны происходить вблизи уровня Ферми. Если величина "размытости" распределения Ферми–Дирака  $\sim T$  много меньше энергии переходов  $\hbar\omega$ , то при их рассмотрении это распределение можно заменить на "ступеньку":  $f(\mathbf{q}) = 1$  при  $q < q_F = 2\sqrt{\pi n}$  и  $f(\mathbf{q}) = 0$  при  $q > q_F$ . Условие  $T \ll \hbar\omega \ll \epsilon_F$  для фотонов с энергией порядка нескольких мэВ выполняется, например, при концентрации электронов  $n = 10^{12}$  см $^{-2}$  при гелиевых температурах.

Будем решать задачу о нахождении коэффициента поглощения в низшем порядке по малому параметру  $\xi = \hbar\omega / \epsilon_F$ . При поглощении фотона два электрона, рассеиваясь друг на друге, переходят из состояний 1 и 2 в узком слое толщиной порядка  $\xi q_F$  внутри Ферми-поверхности в состояния, соответственно, 3 и 4, в таком же узком слое снаружи от нее. При этом возможны два случая: 1) переданный импульс  $\mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4$  мал по сравнению с  $q_F$  ( $q_5 \sim \xi q_F$ ); 2) переданный импульс  $\mathbf{q}_5$  не мал по сравнению с  $q_F$ , при этом закон сохранения импульса требует, чтобы импульсы  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  были почти противоположными  $|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2| \sim \xi q_F$ . В случае 1)  $q_5$  — малая величина 1-го порядка по  $\xi$ ; все остальные импульсы  $q_{1,2,3,4}$ ,  $q_6 = |\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2|$  сравнимы с  $q_F$ . В случае 2)  $q_5$  тоже сравним с  $q_F$ . В выражение для вероятности перехода (9) входит квадрат кулоновского матричного элемента (8):

$$V_{ee,if}^2 \sim \left( \frac{1}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2|} \right)^2 = \frac{1}{q_5^2} - \frac{2}{q_5 q_6} + \frac{1}{q_6^2}. \quad (13)$$

В случае 1) второе и третье слагаемые в (13), пропорциональные  $\xi^{-1}$  и  $\xi^0$  соответственно, малы по сравнению

с первым, пропорциональным  $\xi^{-2}$ , и ими можно пренебречь. В случае 2 все три слагаемых имеют порядок  $\xi^0$ , и нетрудно показать, что вклад переходов с большим переданным импульсом в общее число переходов мал (2-го порядка по  $\xi$ ). Таким образом, в низшем по  $\xi$  порядке нужно учесть только первое слагаемое из случая 1, и число переходов (9) равно

$$W = \frac{4A_0^2 b_0^2 e^4}{(2\pi)^3 \hbar \epsilon^2 (\hbar\omega)^2} \left(\frac{e\hbar}{m_c c}\right)^2 \int d^2\mathbf{q}_1 \int d^2\mathbf{q}_2 \int d^2\mathbf{q}_3 \times \frac{1}{|\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1|^2} \left[ q_3^2(\mathbf{q}_3\mathbf{e}) + q_4^2(\mathbf{q}_4\mathbf{e}) - q_1^2(\mathbf{q}_1\mathbf{e}) - q_2^2(\mathbf{q}_2\mathbf{e}) \right]^2 \delta(\epsilon_f - \epsilon_i - \hbar\omega). \quad (14)$$

Переход от суммирования в (9) к интегрированию и интегрированию по  $\mathbf{q}_4$  проведены так же, как в невырожденном случае. В (14) интегрирование производится по всем возможным конфигурациям с малым переданным при кулоновском взаимодействии импульсом (см. приложение, 2). В итоге для коэффициента поглощения аналогично невырожденному случаю получим

$$G = \frac{W n_\epsilon}{N c L} = \frac{4\chi}{n_\epsilon} \frac{e^2 E_B n \lambda_g^2}{\hbar c E_g L}, \quad (15)$$

где  $\chi = 1.333$  — численный множитель. Отметим, что поглощение не зависит от частоты падающего света. Оценка величины поглощения с теми же параметрами, что и для невырожденного случая (только  $n = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ), дает  $G \simeq 10^{-1} \text{ см}^{-1}$ , т.е. эффект для вырожденной статистики при условии  $\hbar\omega \ll \epsilon_F$  гораздо слабее, чем для статистики Больцмана при  $\hbar\omega \ll T$ .

#### 4. Обсуждение

Наличие эффекта поглощения света свободным электронным газом в случае непараболического закона дисперсии электронов (1) легко объяснить из качественных соображений. Уравнения движения электронов в поле  $\mathbf{E}$  электромагнитной волны (в дипольном приближении) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = e\mathbf{E}(t) - \nabla_i \sum_j V_{ij}, \quad i = 1..N, \quad (16)$$

где  $V_{ij}$  — потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го электронов. В уравнение для суммарного импульса  $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i$  энергия  $V$  не входит:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = eN\mathbf{E}(t). \quad (17)$$

Переходим к фурье-представлению:

$$\mathbf{P} = \frac{eN\mathbf{E}}{i\omega}. \quad (18)$$

Полный ток электронов  $\mathbf{j} = en \sum \mathbf{v}_i = \sigma \mathbf{E}$ . В случае параболической зоны  $\sum \mathbf{v}_i = \mathbf{P}/m_c$  и проводимость  $\sigma$  оказывается чисто мнимой, а это означает, что поглощения нет. В случае закона дисперсии (1)  $\sum \mathbf{v}_i = \mathbf{P}/m_c + (4\gamma^4/E_g^3 \hbar^4) \sum \mathbf{p}_i^3$ . Наличие слагаемого, пропорционального сумме кубов импульсов, и обуславливает возможность поглощения.

В случае больцмановского распределения электронов поглощение за счет электрон-электронного взаимодействия оказывается довольно сильным и несколько большим, чем электрон-фононное (см. [2]). Уменьшение его в 10 раз при переходе к сильно вырожденному газу объясняется тем, что при условии  $\hbar\omega \ll E_F$  только небольшая доля электронов может участвовать в поглощении. При этом зависимость коэффициента поглощения от концентрации электронов переходит от квадратичной для невырожденного газа до линейной для сильно вырожденного. В реальной ситуации ни один из рассмотренных предельных случаев может не реализовываться, и коэффициент поглощения будет принимать средние значения.

Приведенный выше расчет был выполнен для случая бесконечно глубокой квантовой ямы. Влияние конечности глубины реальной ямы можно учесть в виде малой поправки к коэффициенту поглощения. Как легко видеть (см. Приложение, 3), качественно, и даже количественно, все результаты, полученные выше, сохраняются.

Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 96-02-17952 и 97-02-18151) и Российской государственной программой "Физика твердотельных наноструктур" (гранты N 97-0003, 97-1035 и 97-2014).

#### Приложение

##### 1. Вычисление интеграла для коэффициента поглощения в случае невырожденной статистики электронов.

Искомый интеграл можно записать в виде (см. (9)–(11))

$$W_1 = \int d^2\mathbf{q}_1 \int d^2\mathbf{q}_2 \int d^2\mathbf{q}_3 \exp[-\alpha(q_1^2 + q_2^2)] \times \left( \frac{1}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3|^2} - \frac{1}{|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4|^2} \right)^2 \times [(\mathbf{e}_p \mathbf{q}_3)q_3^2 + (\mathbf{e}_p \mathbf{q}_4)q_4^2 - (\mathbf{e}_p \mathbf{q}_1)q_1^2 - (\mathbf{e}_p \mathbf{q}_2)q_2^2]^2 \times \delta[(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) - C],$$

где  $\alpha = \hbar^2/2m_c T$ ,  $C = m_c \omega / \hbar$ , а интегрирование по  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  и  $\mathbf{q}_3$  ведется по всей плоскости. Вначале делаем замену переменных  $\mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_6 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{q}_7 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$  с якобианом преобразования, равным 1/2. Интегрируем в полярных координатах  $\mathbf{q}_i = (q_i, \theta_i)$ ,  $i = 5, 6, 7$ , где  $\theta_i$  — угол, отсчитанный от проекции  $\mathbf{e}_p$  орта поляризации света  $\mathbf{e}$  на плоскость  $(y, z)$ . Подынтегральное выражение

симметрично относительно  $q_5$  и  $q_6$ , поэтому можно заменить множитель  $(q_5^{-1} - q_6^{-1})^2$  на  $2(q_5^{-2} - q_5^{-1}q_6^{-1})$ . Далее, после перехода к угловым переменным  $\theta_5$ ,  $\theta = \theta_6 - \theta_5$ ,  $\theta_7$  интегрирование по  $q_5$  (с помощью  $\delta$ -функции), по  $q_7$ ,  $\theta_5$  и  $\theta_7$  производится элементарно. Вводя переменную  $x = q_6^2$ , получим двукратный интеграл:

$$W_1 = \frac{2\pi^2 C \exp(\alpha C)}{\alpha^2} \int_0^\infty dx \int_0^{2\pi} d\theta \times \exp \left[ -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{C^2}{x \cos^2 \theta} + x \right) \right] \left( 4 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right).$$

Интегрирование по  $\theta$  осуществляется с помощью метода дифференцирования по параметру: функция  $f_1(\beta) \equiv \int_0^{2\pi} \exp(-\beta/\cos^2 \theta) / \cos^2 \theta d\theta = 2\sqrt{\pi/\beta} \exp(-\beta)$  (интеграл здесь берется подстановкой  $t = \operatorname{tg} \theta$ ) совпадает, с точностью до знака, с производной по  $\beta$  функции  $f_2(\beta) \equiv \int_0^{2\pi} \exp(-\beta/\cos^2 \theta) d\theta$ . Интегрируя  $f_1(\beta)$ , находим:  $f_2(\beta) = 2\pi \operatorname{erfc}(\sqrt{\beta})$ . После интегрирования по  $x$  с помощью соотношений

$$\int_0^\infty \exp \left( \nu - y - \frac{\nu^2}{4y} \right) \sqrt{y} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + \nu),$$

$$\int_0^\infty \exp(\nu - y) \operatorname{erfc} \left( \frac{\nu}{2\sqrt{y}} \right) dy = 1$$

получим окончательный результат:

$$W_1 = \frac{2^7 \pi^3 m_c^4 T^4}{\hbar^8} \left( 1 + \frac{5\hbar\omega}{2T} \right).$$

## 2. Вычисление интеграла для коэффициента поглощения в случае вырожденной статистики электронов.

В интеграле из (14) (обозначим его через  $W_2$ ) сделаем замену переменных  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \rightarrow \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1$ . Будем вычислять интеграл, используя полярные координаты  $\mathbf{q}_i = (q_i, \theta_i)$ ,  $i = 1, 2, 5$  с осью, направленной вдоль орта  $\mathbf{e}_p$ . В области интегрирования величины  $q_1$  и  $q_2$  близки к  $q_F$ , а  $q_5$  много меньше  $q_F$ . Вычисления будем проводить в 1-м порядке по  $q_5/q_F \sim \xi$ . Угол  $\theta_5$  принимает все значения от 0 до  $2\pi$ . При заданном малом переданном импульсе  $\mathbf{q}_5$ , из условия нахождения импульсов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  внутри окружности Ферми, а импульсов  $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_5$  и  $\mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_5$  — вне ее, легко получить область интегрирования по  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$ . Угол  $\theta_1$  изменяется от  $\theta_5 - \pi/2$  до  $\theta_5 + \pi/2$ , а угол  $\theta_2$  от  $\theta_5 + \pi/2$  до  $\theta_5 + 3\pi/2$ . В 1-м порядке по  $\xi$  интегрирование по  $q_1$  и  $q_2$  можно заменить подстановкой в подынтегральное выражение  $q_F$  вместо  $q_1$  и  $q_2$  и его умножением на длину отрезков интегрирования  $q_5 \cos(\theta_1 - \theta_5)$  и  $-q_5 \cos(\theta_2 - \theta_5)$ . Пренебрегая членами, содержащими

$q_5^2$ , мы можем преобразовать  $\delta$ -функцию в (14) к виду

$$\delta(\dots) = \frac{m}{\hbar^2} \delta[\mathbf{q}_5(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_5) - C] = \frac{m}{\hbar^2} \delta[2q_5 q_F \sin[(\theta_1 - \theta_2)/2] \cos \theta_{125} - C],$$

где  $\theta_{125} = (\theta_2 + \theta_1 - \pi)/2 - \theta_5$  — угол между векторами  $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_5$ . В том же приближении квадратную скобку в (14) преобразуем к виду

$$[\dots] = q_5 q_F^2 [\cos(\theta_5 - 2\theta_1) - \cos(\theta_5 - 2\theta_2)].$$

В получившемся выражении

$$W_2 = -\frac{m_c q_F^6}{\hbar^2} \int dq_5 \int_0^{2\pi} d\theta_5 \int_{\theta_5 - \pi/2}^{\theta_5 + \pi/2} d\theta_1 \int_{\theta_5 + \pi/2}^{\theta_5 + 3\pi/2} d\theta_2 q_5^3 \times \cos(\theta_1 - \theta_5) \cos(\theta_2 - \theta_5) \times [\cos(\theta_5 - 2\theta_1) - \cos(\theta_5 - 2\theta_2)]^2 \times \delta \{ 2q_5 q_F \sin[(\theta_1 - \theta_2)/2] \cos \theta_{125} - C \}$$

проводим интегрирование по  $q_5$  с помощью  $\delta$ -функции, переходим к новым угловым переменным  $\theta_5, \theta_8 = \theta_1 - \theta_5, \theta_9 = \theta_2 - \theta_5$ , производим элементарное интегрирование по  $\theta_5$  и получаем

$$W_2 = \frac{\chi m_c q_F^2 C^3}{\hbar^2},$$

где введена числовая константа

$$\chi = -2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_8 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta_9 \times \frac{\cos \theta_8 \cos \theta_9 [1 - \cos 2(\theta_8 - \theta_9)]}{(\cos \theta_8 - \cos \theta_9)^4} = 1.333.$$

## 3. Учет конечности глубины квантовой ямы.

Пусть квантовая яма имеет конечную глубину  $U$ . Тогда волновая функция электрона на нижнем уровне в этой яме имеет вид

$$\Psi(x) = \begin{cases} C \exp(\chi x), & x < 0, \\ B \sin(kx + \delta), & 0 < x < a, \\ C \exp[\chi(a - x)], & x > a. \end{cases}$$

В случае бесконечной ямы  $B = \sqrt{2/a}$ ,  $C = 0$ ,  $k = \pi/a$ ,  $\delta = 0$ . Поправки к этим величинам в низших порядках по малому параметру  $\gamma_0 = \sqrt{2\hbar^2/m_c U a^2}$  (для обычных полупроводниковых гетероструктур  $a \sim 10^{-6}$  см,  $U \sim 0.3$  эВ,  $m_c \sim 10^{-28}$  г, параметр  $\gamma_0 \sim 0.2$  можно считать малым) найдем с помощью известных уравнений для прямоугольной квантовой ямы  $ka = \pi n - 2 \arcsin \sqrt{\hbar^2 k^2 / 2m_c U}$ , ( $n = 1$ )

и  $\sin \delta = \sqrt{\hbar k / 2m_c U}$ , граничных условий в точках  $x = 0, a$  и условия нормировки волновой функции. Получим, пренебрегая всеми членами разложения по  $\gamma_0$ , начиная с  $\gamma_0^3$ :  $k = \pi(1 - \gamma_0 + \gamma_0^2)/a$ ,  $\delta = \pi(\gamma_0 - \gamma_0^2)/2$ ,  $B^2 = 2(1 - \gamma_0 + \gamma_0^2)/a$ ,  $C = \gamma_0 B$ . В данной работе явный вид волновой функции движения электрона по оси  $x$  используется только при вычислении интеграла  $J(q_p)$  (7). Проведя громоздкое интегрирование и упростив ответ аналогично тому, как это было сделано с (7), получим, что кулоновский матричный элемент (8) в низшем порядке по  $\gamma_0$  умножается на  $(1 - \gamma_0^2)$ . Таким образом, влияние конечности ямы на коэффициент поглощения описывается просто умножением его на  $(1 - \gamma_0^2)^2 = (1 - 2\gamma_0^2)$ . Теперь формулы (12) и (15) можно переписать в виде

$$G = \frac{W n_\epsilon}{L N c} = \frac{2^{10} \pi^3 n^2 \lambda_g^4 e^2 T^2 E_B}{n_\epsilon L \hbar c (\hbar \omega)^2 (\hbar \omega)} \times \left(1 + \frac{5\hbar \omega}{2T}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{T}\right)\right] \left(1 - \frac{4\hbar^2}{m_c U a^2}\right)$$

для невырожденного случая, и

$$G = \frac{4\chi e^2 E_B n \lambda_g^2}{n_\epsilon \hbar c E_g L} \left(1 - \frac{4\hbar^2}{m_c U a^2}\right)$$

для вырожденного случая.

## Список литературы

- [1] L.E. Vorobiev, S.N. Danilov et al. *23rd Int. Conf. on the Physycs of Semiconductors* (Berlin, Germany, 1996) v. 3, p. 1887.
- [2] В.Л. Гуревич, Д.А. Паршин, К.Э. Штенгель. ФТТ, **30**, 1466 (1988).
- [3] К. Зеегер. *Физика полупроводников* (М., Мир, 1977) с. 445.
- [4] E.O. Kane. *J. Phys. Chem. Sol.*, **1**, 249 (1957).

Редактор Л.В. Шаронова

## Interband light absorption in quantum wells at the expense of electron-electron collisions

G.G. Zegrya, V.E. Perlin

A.F. Ioffe Physicotechnical Institute,  
Russian Academy of Sciences,  
194021 St. Petersburg, Russia