

01;03

Колебательная неустойчивость сильно заряженной капли

© Д.Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 10 июня 1997 г.

Получено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной вязкой капли электропроводной жидкости в электропроводной среде с учетом эффекта релаксации заряда и показано, что такая капля может претерпевать колебательную неустойчивость.

Исследование закономерностей реализации неустойчивости сильно заряженных капель представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в физике, геофизике и технологии [1,2]. Хорошо известна и подробно исследована аperiodически реализующаяся рэлеевская неустойчивость капли по отношению к собственному заряду [1,2]. Что же касается колебательной неустойчивости сильно заряженной капли, то она практически не исследована, хотя косвенные экспериментальные указания на возможность ее реализации имеются [3,4].

Рассмотрим систему, состоящую из двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ и кинетическими вязкостями $\nu^{(1)}$ и $\nu^{(2)}$. В отсутствие влияния сил тяжести в результате действия сил поверхностного натяжения, коэффициент которого обозначим через γ , внутренняя жидкость, к которой отнесем индекс (1), примет форму сферической капли с радиусом R . Внешнюю жидкость, идентифицируемую индексом (2), будем считать безграничной. На поверхности раздела двух жидкостей находится заряд Q , который поддерживается неизменным за счет тока, текущего между точечным электродом в центре капли и концентрическим сферическим электродом, находящимся во внешней среде, на весьма большом расстоянии от границы раздела. Влиянием электродов на течения сред в проводимом модельном расчете будем пренебрегать. Примем, что жидкость в капле обладает проводимостью σ_1 и диэлектрической проницаемостью ε_1 , а среда является проводящей с характеристиками σ_2 и ε_2 . Будем искать дисперсионное уравнение для капиллярных движений в системе методом, описанным в [5].

Система уравнений гидродинамики, описывающая движения жидкости внутри капли и в окружающей среде, линеаризованная в окрестности равновесного сферического состояния, имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(j)}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho^{(j)}} \nabla p^{(j)} + \nu^{(j)} \Delta \mathbf{u}^{(j)}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{(j)} = 0; \quad j = 1; 2;$$

$$r = R: \quad u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)}; \quad u_{\varphi}^{(1)} = u_{\varphi}^{(2)}; \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} = \frac{\partial \xi}{\partial t};$$

$$\begin{aligned} \Pi_{1\theta} + \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(1)} \right] \\ = \Pi_{2\theta} + \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(2)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{1\varphi} + \rho^{(1)} \nu^{(1)} \left[\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\varphi}^{(1)} \right] \\ = \Pi_{2\varphi} + \rho^{(2)} \nu^{(2)} \left[\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\varphi}^{(2)} \right]; \end{aligned}$$

$$-p^{(1)} + 2\rho^{(1)} \nu^{(1)} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + p_{\gamma} - p_E = -p^{(2)} + 2\rho^{(2)} \nu^{(2)} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r};$$

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) d\Omega = 0; \quad \int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) \mathbf{e}_r d\Omega = 0.$$

Здесь за ξ , \mathbf{u} , p обозначены возмущения формы границы раздела, поля скоростей и поля давлений соответственно, p_{γ} — возмущение давления сил поверхностного натяжения [6].

$$p_{\gamma}(\xi) = -\frac{\gamma}{R^2} (2 + \Delta_{\Omega}) \xi;$$

p_E — возмущение давления электрического поля P_E , связанное с возмущением границы раздела ξ [7]; $\Pi_{j\theta}$, $\Pi_{j\varphi}$ — электрические составляющие касательной компоненты тензора напряжений, вызванные токами заряда, перераспределяющегося при деформации поверхности капли.

$$P_E = \frac{1}{8\pi} [\varepsilon_1 E_{2n}^2 - \varepsilon_2 E_{1n}^2] + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{E_{2\tau}}{8\pi}; \quad \Pi_{j\tau} = \frac{\varepsilon_j}{4\pi} E_{jn} E_{j\tau}; \quad j = 1; 2.$$

E_{jn} и $E_{j\tau}$, $j = 1; 2$ — нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля; \mathbf{n} ; $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{e}_\theta$, \mathbf{e}_φ — единичные векторы нормали и двух касательных к поверхности капли.

Искомое дисперсионное уравнение получается в виде

$$\det a_{ij} = 0; \quad 1 \leq i, j \leq 5; \quad (1)$$

$$a_{11} = 1; \quad a_{12} = -1; \quad a_{13} = f_m^{(1)}(x_1) + (m+1);$$

$$a_{14} = f_m^{(2)}(x_2) + m; \quad a_{15} = 0;$$

$$a_{21} = 2(m-1)\rho^{(1)}\nu^{(1)} + \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2(\varepsilon_j, \sigma_j)} \cdot \frac{(m(m+1))^2}{Z_m} \cdot (1 - R_0^{(2m+1)});$$

$$a_{22} = 2(m+2)\rho^{(2)}\nu^{(2)};$$

$$a_{23} = \rho^{(1)}\nu^{(1)} \left[-2f_m^{(1)}(x_1) + x_1^2 + 2(m-1)(m+1) \right]$$

$$+ \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{g_2(\varepsilon_j, \sigma_j)} \cdot \frac{(m(m+1))^2}{Z_m}$$

$$\times \left(1 - R_0^{(2m+1)} \right) \left\{ f_m^{(1)}(x_1) + (m+1) \right\};$$

$$a_{24} = -\rho^{(2)}\nu^{(2)} \left[2f_m^{(2)}(x_2) + x_2^2 + 2m(m+2) \right];$$

$$a_{25} = \frac{Q^2(\sigma_2 - \sigma_1)}{4\pi(g_2(\varepsilon_j, \sigma_j))^2} \cdot \frac{m(m+1)}{Z_m} g_3(\mu_j, \sigma_j);$$

$$a_{31} = m; \quad a_{32} = (m+1); \quad a_{33} = m(m+1);$$

$$a_{34} = -m(m+1); \quad a_{35} = 0; \quad a_{41} = m;$$

$$a_{42} = 0; \quad a_{43} = m(m+1); \quad a_{44} = 0; \quad a_{45} = -S;$$

$$a_{51} = \rho^{(1)} \left[S + 2m(m-1)\nu^{(1)} \right] - \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{g_2(\varepsilon_j, \sigma_j)} \cdot \frac{m(m+1)}{Z_m} \cdot g_5(\varepsilon_j, \sigma_j);$$

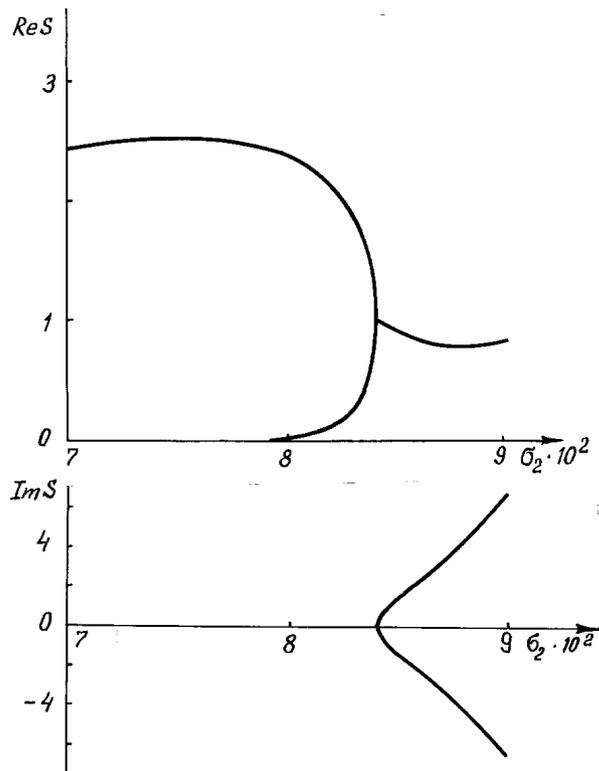
$$a_{52} = -\rho^{(2)}S - 2(m+1)(m+2)\rho^{(2)}\nu^{(2)};$$

$$a_{53} = 2\rho^{(1)}\nu^{(1)}m(m+1) \left[f_m^{(1)}(x_1) + (m-1) \right]$$

$$- \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{g_2(\varepsilon_j, \sigma_j)} \cdot \frac{m(m+1)}{Z_m} \cdot g_5(\varepsilon_j, \sigma_j) \left\{ f_m^{(1)}(x_1) + (m+1) \right\};$$

$$\begin{aligned}
a_{54} &= \rho^{(2)} \nu^{(2)} 2m(m+1) \left[f_m^{(2)}(x_2) + (m+2) \right]; \\
a_{55} &= (m-1)(m+2) + \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(g_2(\varepsilon_j, \sigma_j))^2} \cdot \frac{g_4(\mu_j, \varepsilon_j, \sigma_j, b)}{Z_m}; \\
f_m^{(1)}(x_1) &\equiv x_1 \frac{i_{m+1}(x_1)}{i_m(x_1)}; \quad f_m^{(2)}(x_2) \equiv x_2 \frac{k_{m-1}(x_2)}{k_m(x_2)}; \\
\lambda_j &\equiv S\varepsilon_j + 4\pi\sigma_j; \quad \mu_j \equiv \lambda_j + m(m+1)D_s\varepsilon_j; \quad Q \equiv 4\pi\kappa_0; \\
d_1(y_j) &\equiv y_1 m + y_2(m+1) + (y_1 - y_2)(m+1)R_0^{(2m+1)}; \quad y_j = \mu_j, \varepsilon_j, \lambda_j; \\
Z_m &= d_1(\lambda_j) + m(m+1) \left[D_s d_1(\varepsilon_j) + Qb \left(1 - R_0^{(2m+1)} \right) \right]; \\
g_1 &\equiv (2\lambda_1 - \lambda_2)\sigma_2 - \lambda_2\sigma_1; \\
g_2 &\equiv \varepsilon_2\sigma_1 - \varepsilon_1\sigma_2; \quad h_1 \equiv \varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_2 - g_2; \\
\eta_1 &\equiv g_1(\lambda_j, \sigma_j) + m(m+1)D_s h_1; \\
g_3 &\equiv \left[\left((m+2)\lambda_1 + m\lambda_2 \right) \sigma_2 - \lambda_2\sigma_1 \right] \\
&\quad + \left[\left((m-1)\lambda_1 - m\lambda_2 \right) \sigma_2 + \lambda_2\sigma_1 \right] R_0^{(2m+1)}; \\
h_3 &\equiv h_1 \left(1 - R_0^{(2m+1)} \right) + \sigma_2 d_1(\varepsilon_j); \quad \eta_3 \equiv g_3 + m(m+1)D_s \cdot h_3; \\
g_4 &\equiv \varepsilon_2\sigma_1 \left\{ (m+1)\eta_3 - (m-1)\sigma_1 \right. \\
&\quad \times \left. \left[d_1(\mu_j) + m(m+1)Qb \left(1 - R_0^{(2m+1)} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \varepsilon_1\sigma_2 \left\{ \left[m + (m+1)R_0^{(2m+1)} \right] \eta_1 + 2\sigma_2 d_1(\mu_j) \right. \\
&\quad \left. - \sigma_2 m(m+1)Qb \left[(m-2) + (m+3)R_0^{(2m+1)} \right] \right\}; \\
g_5 &\equiv [(m+1)\varepsilon_2\sigma_1 + m\varepsilon_1\sigma_1] - (m+1)g_2 R_0^{(2m+1)}; \quad x_j = \sqrt{\frac{S}{\nu_j}};
\end{aligned}$$

$i_m(x)$, $k_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно.



Зависимости вещественной $\text{Re}S = \text{Re}S(\sigma_2)$ и мнимой $\text{Im}S = \text{Im}S(\sigma_2)$ компонент комплексной частоты от проводимости внешней среды σ_2 при $\sigma_1 = 10^4$; $m = 2$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.002$; $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 10^{-3}$; $\varepsilon_1 = 50$; $\varepsilon_2 = 5$; $b = 10^{-2}$; $D_s = 10^{-5}$; $W = 22$.

Результаты численного расчета по уравнению (1) приведены на рисунке в виде зависимостей вещественной и мнимой компонент комплексной частоты от проводимости внешней среды σ_2 . Несложно видеть, что при закритическом по Рэлею заряде капли имеется область значений σ_2 , в которой существует колебательная неустойчивость.

Заключение. Сильно заряженная капля электропроводной жидкости в электропроводной среде способна претерпевать колебательную неустой-

чивость, что может быть связано с опережением по фазе (вследствие перераспределения заряда при капиллярных колебаниях) давления электрического поля по сравнению с капиллярными волнами.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 3. С. 19–28.
- [2] Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 7. С. 1–8.
- [3] Billings J.J., Holland D.G. // J. Geoph. Res. 1969. V. 74. N 8. P. 6881–6886.
- [4] Zeleny J. // Phys. Rev. 1914. V. 3. N 2. P. 69–91.
- [5] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН № 27. Ярославль, 1994. 126 с.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [7] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.