01;03

Зависимость от волнового числа критических условий неустойчивости заряженной пленки жидкости в поле флуктуационных сил

© *Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, М.И. Муничев*

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 20 мая 1997 г.

Показано, что критические условия неустойчивости заряженной свободной поверхности жидкости при фиксированной толщине d жидкой пленки в области существенного влияния флуктуационных сил ($d < 100\,\mathrm{nm}$) сильно зависят от волнового числа и не зависят от вязкости жидкости.

Задача исследования устойчивости тонкой пленки проводящей жидкости на твердой подложке в поле флуктуационных сил (под влиянием расклинивающего давления [1,2]) представляет интерес в связи с приложениями к проблемам функционирования жидкометаллических источников ионов игольчатого типа, вакуумной масс-спектрометрии и теории грозового электричества [3,4].

1. Рассмотрим задачу о расчете спектра капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской заряженной поверхности идеально проводящего жидкого слоя толщины d, плотности ρ, вязкости ν, с коэффициентом поверхностного натяжения γ, в поле тяжести $\mathbf{g}$ и в электростатическом поле $\mathbf{E}$. Пусть верхняя среда обладает диэлектрической проницаемостью ε. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ у поверхности жидкости определяется разностью потенциалов между электродами: нижним, расположенным при $z = -d$, на котором лежит слой смачивающей его жидкости, поддерживающимся при потенциале $\Phi_1 = 0$, и параллельным ему противоэлектродом, отстоящим от поверхности жидкости на b, имеющим потенциал $\Phi_2 = V$.

Пусть в декартовой системе координат с осью z, направленной вертикально вверх $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$ ($\mathbf{n}_z$ — орт декартовой координаты z), ось x определяет направление движения плоской капиллярной волны $\sim \exp(st + ikx)$, а плоскость $z = 0$ совпадает со свободной невозмущенной поверхностью жидкости (s — комплексная частота, k — волновое число, t — время, t — мнимая единица). Пусть функция $\xi(x,t) = \xi_0 \exp(st + ikx)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, вызванное тепловым капиллярным волновым движением весьма малой ($\xi_0 \sim (kT/\gamma)^{1/2}$) амплитуды; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ движения жидкости, вызванное возмущением $\xi(x,t)$, имеет тот же порядок малости. И пусть толщина слоя жидкости такова, что для его устойчивости существенно влияние сил флуктуационной природы, т.е. $d < 100\,\text{nm}$ [1,2]. Поскольку выше принято, что жидкость смачивает подложку, на которой лежит, то флуктуационные силы (расклинивающее давление, действующее на слой со стороны подложки) играют стабилизирующую роль [1,2]. Для проводимого качественного рассмотрения примем, согласно [2], что расклинивающее давление связано с толщиной слоя зависимостью

$$P_d = \frac{A}{(d+\xi)^3}.$$

Значение константы $A \simeq 10^{-13}\,\text{erg}$ определено лишь по порядку величины. Для линеаризации задачи следует использовать линейное по ξ разложение P_a в окрестности $z = 0$:

$$P_d = P_{d0} + P_{d1};$$

$$P_{d0} = \frac{A}{d^3}; \qquad P_{d1} = -\frac{3A}{d^4}\xi.$$

Проводя решение в линейном по малым величинам приближении классическим методом разделения поля скоростей на основании теоремы Гельмгольца на потенциальную и вихревую компоненты, как это сделано в [5], несложно получить дисперсионное отношение для спектра капиллярных движений жидкости в анализируемой системе. В безразмерных переменных, в которых $\rho = \gamma = d = 1$, а физические величины, характеризующие систему, измеряются в единицах своих характерных масштабов

$$g_* = \frac{\gamma}{\rho d}; \qquad A_* = \gamma d; \qquad \nu_* = \sqrt{\frac{\gamma d}{\rho}}; \qquad k_* = \frac{1}{d};$$

$$s_* = \sqrt{\frac{\rho d}{\gamma}}; \qquad W_* = \frac{\gamma}{d}; \qquad b_* = d,$$

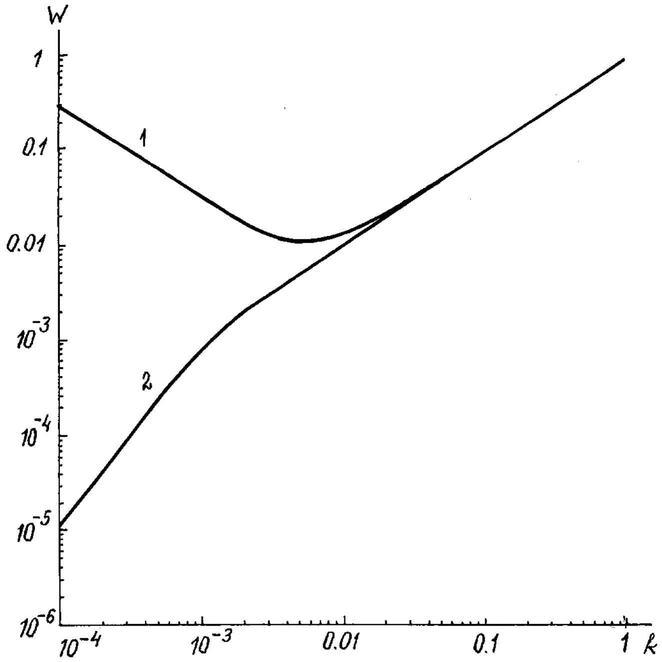

Рис. 1. Граница устойчивости заряженной свободной поверхности жидкости: $Z(k, W) = 0$, рассчитанная при $b = 10$. Кривая *1* получена при учете флуктуационных сил с $A = 10^{-5}$, $g = 10^{-9}$. Кривая *2* получена без учета влияния флуктуационных сил.

дисперсионное уравнение имеет вид

$$4qk^2\left(k^2+q^2\right)+\left(k^2+q^2\right)^2\left(k\,\mathrm{sh}(k)\,\mathrm{sh}(q)-q\,\mathrm{ch}(k)\,\mathrm{ch}(q)\right)$$
$$+4k^3q\big(q\,\mathrm{sh}(k)\,\mathrm{sh}(q)-k\,\mathrm{ch}(k)\,\mathrm{ch}(q)\big)$$
$$-\frac{Z(k,W)}{\nu^2}\big(q\,\mathrm{ch}(q)\,\mathrm{sh}(k)-k\,\mathrm{ch}(k)\,\mathrm{sh}(q)\big)=0; \qquad (1)$$

$$q^2\equiv k^2+a\nu; \quad Z(k,W)\equiv kg+3Ak+k^3-Wk^2\mathrm{cth}(kb).$$

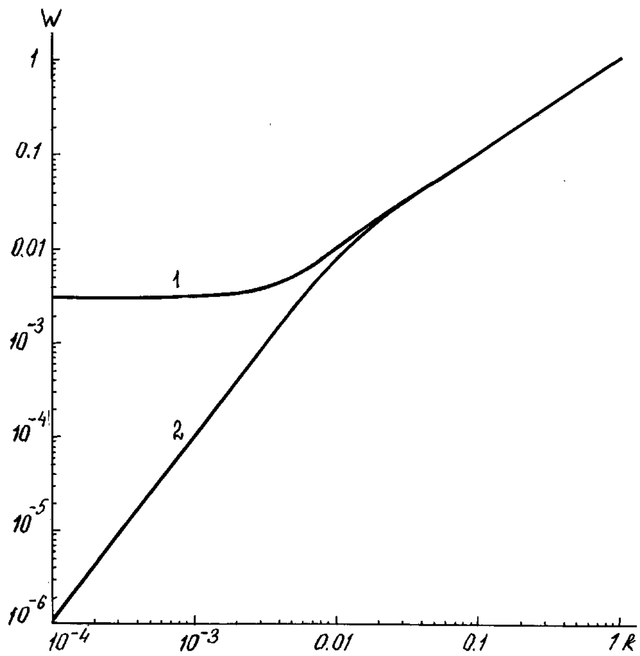

Рис. 2. Граница устойчивости заряженной свободной поверхности жидкости: $Z(k,W) = 0$, рассчитанная при $b = 100$. Кривая *1* получена при учете флуктуационных сил с $A = 10^{-5}$, $g = 10^{-9}$. Кривая *2* получена без учета влияния флуктуационных сил.

2. Условием проявления неустойчивости заряженной свободной поверхности жидкости системы является условие $Z(k,W) \leqslant 0$ [6,7]:

$$Z(k,W) \equiv kg + 3Ak + k^3 - Wk^2 \mathrm{cth}(kb) < 0.$$

Очевидно, что уравнение $Z(k,W) = 0$ определяет границу между устойчивыми $(Z(k,W) \geqslant 0)$ и неустойчивыми $(Z(k,W) < 0)$ состояниями системы. На рис. 1 и 2 представлены кривые, соответствующие границе устойчивости при различных значениях расстояния до верхнего электрода b при учете и без учета расклинивающего давления. Из рисунков видно, что при длине волны $\lambda < 10d$ критические условия практически не зависят от флуктуационных сил. Наличие расклинивающего давления существенно сказывается на критических условиях неустойчивости свободной поверхности лишь в области длин волн, значительно превышающих толщину пленки, но именно в этом случае, как видно из рисунков, критические условия оказываются в сильной зависимости от расстояния между электродами b. Из рис. 1 и 2 следует, что в рассмотренных ситуациях влияние флуктуационных сил на критические условия неустойчивости заряженной поверхности жидкости следует исследовать при значениях волновых чисел $k \lesssim 0.01$.

Из рисунков видно, что учет действия флуктуационных сил приводит к уменьшению интервала волновых чисел неустойчивых длин волн со стороны больших k на величину, определяемую параметром W. Флуктуационные силы способны обеспечить устойчивость движения в жидкой пленке во всем диапазоне k, если значение $W < 10^{-2}$, а расстояние до верхнего электрода $b = 10^5$ (рис. 1), а также при $W < 10^{-3}$, когда $b = 10^2$ (рис. 2). Из рис. 1 следует, что если $b = 10^5$, то, по крайней мере для $10^{-2} < W \leqslant 2 \cdot 10^{-2}$, множество неустойчивых длин волн оказывается ограниченным со стороны малых k.

Заключение. При $b = 10^2$ влияние расклинивающего давления проявляется: в снижении критического значения k, при котором движение в системе становится устойчивым, и ограничении со стороны малых значений диапазона изменений параметра W, допускающего существование неустойчивых длин вол. Если $b = 10^5$, последний эффект проявляется более сильно. Наблюдается также ограничение множества значений k неустойчивых длин волн со стороны весьма малых волновых чисел.

Список литературы

[1] *Дерягин Б.В.* Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 205 с.

[2] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкости. Л.: Наука, 1975. 592 с.

[3] *Габович М.Д.* // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.

[4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

[5] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.

[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред М.: Наука, 1992. 661 с.

[7] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Муничев М.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. № 10. С. 84–89.