01;03

О дроблении сильно заряженного пузыря в диэлектрической жидкости на части сравнимых размеров

© А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, А.Н. Жаров

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 20 мая 1997 г.

Проведен анализ условий неустойчивости заряженного газового пузыря в диэлектрической жидкости. Получено, что в отличие от заряженной капли критерий неустойчивости пузыря определяется двумя безразмерными параметрами: параметром Рэлея и отношением давления газа в материнском пузыре к лапласовскому давлению.

Явление дробления заряженных пузырей в диэлектрической жидкости представляет интерес для различных разделов технической физики и химической технологии, а в частности для теории пробоя жидких диэлектриков. Из экспериментов известно, что заряженные пузыри в результате неустойчивости по отношению к поверхностному заряду могут распадаться на несколько мелких пузырей [1]. Тем не менее до сих пор не дано достаточно корректного теоретического обоснования полученных экспериментальных результатов, несмотря на то что механизм развития качественно сходной неустойчивости сильно заряженной жидкой капли теоретически разработан достаточно полно (см. обзор [2]).

1. Рассмотрим сферический заряженный пузырь в непроводящей несжимаемой жидкости, имеющей диэлектрическую проницаемость ε, занимающей бесконечный объем и имеющей повсюду одинаковую температуру T. Пусть R — радиус пузыря, Q — заряд, σ — коэффициент поверхностного натяжения границы раздела жидкость–газ, p — давление газа в пузыре. Зададимся вопросом: при каком радиусе пузыря при $Q = \mathrm{const}$ его потенциальная энергия будем минимальна? Для ответа на него выпишем выражение для потенциальной энергии пузыря

$$U = 4\pi R^2\sigma + \frac{Q^2}{2R} + p\,\frac{4\pi}{3}\,R^3$$

и приравняем нулю производную $\partial U/\partial R$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 8\pi R\sigma - \frac{Q^2}{2R^2} + 4\pi R^2 p = 0.$$

Отсюда легко видеть, что минимальной потенциальной энергии пузыря соответствует состояние, когда

$$W = 1 - \beta, \tag{1}$$

где

$$W = \frac{Q^2}{16\pi R^3\sigma}, \qquad \beta = \frac{Rp}{2\sigma}.$$

2. Зададимся теперь вопросом: при каких значениях параметров W и β сферическая форма пузыря может стать неустойчивой? По аналогии с заряженной каплей несжимаемой жидкости ответить на этот вопрос можно из анализа баланса давлений на поверхности пузыря

$$p + \frac{Q^2}{8\pi R^4} - \frac{2\sigma}{R} = 0.$$

Разделив это соотношение на последнее слагаемое, получим соотношение (1). О неустойчивости пузыря можно говорить, когда сумма давления газа и электрического давления превысит лапласовское, т. е. при

$$W + \beta \geqslant 1. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) отличаются от аналогичных соотношений для сферической заряженной капли [2] наличием параметра β. Следует, однако, учесть, что выполнение критерия неустойчивости заряженной капли несжимаемой жидкости $W \geqslant 1$ [2] в силу несжимаемости означало реализацию неустойчивости сферической формы капли по отношению к основной моде капиллярных колебаний ($n = 2$), т. е. вытягивание капли в сфероид. Для рассматриваемой ситуации пузыря в жидкости выполнение условия (2) означает прежде всего возможность начала изменения радиуса пузыря, т. е. неустойчивость моды с $n = 0$ или неустойчивость пузыря по отношению к радиальным колебаниям; этот процесс может сопровождаться потерей устойчивости по отношению к растворению газа (испарению или конденсации пара) в жидкости. Напомним, что для капли несжимаемой жидкости основная мода $n = 2$, а радиальные колебания с $n = 0$ невозможны в силу постоянства объема капли [3]. Обе эти неустойчивости имеют разные характерные времена развития. Представляется, что при W, близком к единице, инкремент гидродинамической моды ($n = 2$), соответствующей изменению формы капли, превышает инкремент моды с $n = 0$, связанной с характерным временем диффузии молекул газа или пара. В таких условиях пузырь будет вытягиваться в сфероид и по мере увеличения его эксцентриситета делиться на части.

В зависимости от соотношения времени релаксации электрического заряда на поверхности пузыря и характерного времени развития неустойчивости можно выделить предельный режим распада пузыря, в котором время релаксации электрического заряда много больше времени развития неустойчивости. В этом случае заряд можно считать вмороженным в поверхность пузыря. Ниже будут рассмотрены закономерности дробления пузыря именно для этого случая.

3. Пусть изначально сферический пузырь, для которого выполняется условие (2), претерпевает неустойчивость, вытягивается в фигуру, близкую к сфероиду, удлинение которого приводит к развитию перетяжечной неустойчивости по плоскости симметрии, перпендикулярной оси симметрии, и к образованию двух равных по объему и симметрично расположенных пузырей, имеющих одинаковые заряды и соединенных перетяжкой. В результате образуются два пузыря с равными радиусами $r_1 = r_2 \equiv r$ и зарядами $q_1 = q_2 \equiv q$, которые затем сжимаются, уменьшая свой объем под действием лапласовых сил, которые у дочерних пузырей больше, чем у родительских. Поскольку сжатие пузырей происходит при постоянной температуре жидкости, и учитывая, что теплоемкость бесконечного объема бесконечна, процесс сжатия будем считать изотермическим. При этом над газом в пузырях совершается работа, приводящая к увеличению потенциальной энергии пузырей.

Полное изменение потенциальной энергии определится выражением

$$\Delta U = 4\pi\sigma(2r^2 - R^2) + \frac{q^2}{\epsilon r} - \frac{Q^2}{2\epsilon R} - \frac{8}{3}\pi r^3 p_* in\left(\frac{2r^3}{R^3}\right),$$

где p_* — давление газа в дочерних пузырях после сжатия. Первое слагаемое в этом выражении соответствует изменению поверхностной энергии лапласовых сил, второе — изменению электрической энергии, третье описывает работу изотермического сжатиях дочерних пузырей.

Будем считать, что давление в пузыре складывается из давления заключенного в нем газа и давления насыщенных паров жидкости при данной температуре. Пренебрегая процессами конденсации и испарения газа в пузырях, примем, что его масса в начальном и конечном пузырях остается неизменной. Выразим массу газа в родительском пузыре — m и дочерних пузырях — m_* из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$m = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\mu p_г}{R_г T}, \quad m_* = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\mu p_{г*}}{R_г T},$$

где μ — молярная масса газа, $R_г$ — газовая постоянная, $p_г$ и $p_{г*}$ — давление газа в материнском и дочерних пузырях соответственно. Тогда уравнение сохранения массы позволяет найти давление газа в дочерних пузырях: $p_{г*} = p_г R^3/(2r^3)$. Давление насыщенных паров в дочерних и материнском пузырях могут считаться равными ввиду того, что они не зависят от объемов пузырей. Таким образом, суммарное давление в дочернем пузыре можно записать в виде: $p_* = p_{г*} + p_н$, где $p_н$ — давление насыщенных паров в материнском пузыре. Или, задавая суммарное давление p в материнском пузыре, получим

$$p_* = p_{г*} - p_г + p = p\left(\gamma\left[\frac{R^3}{2r^3} - 1\right] + 1\right),$$

где $\gamma = p_г/p$. Таким образом, если $\gamma = 1$, то пузырь нужно считать газовым, а если $\gamma = 0$, то пузырь содержит в себе тольк насыщенный пар.

Условие устойчивости дочерних пузырей может быть получено приравниванием нулю первой производной от изменения потенциальной энергии по радиусу дочернего пузыря при $q = \text{const}$. С учетом выражения для давления газа это условие запишется в виде

$$\frac{2\sigma}{r} - p\left(\gamma\left[\frac{R^3}{2r^3} - 1\right] + 1\right) - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon r^4} = 0.$$

Учитывая, что заряд дочернего пузыря в два раза меньше заряда исходного, и разделив все уравнение на первое слагаемое, получаем уравнение, определяющее безразмерный радиус $X = r/R$ устойчивого дочернего пузыря:

$$4X^3 - \beta\gamma(2X - 4X^4) - 4X^4\beta - W = 0. \tag{3}$$

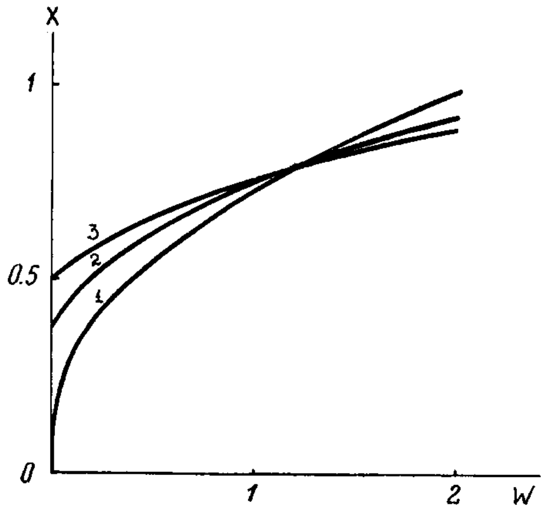

Рис. 1. Зависимость безразмерного радиуса дочерних пузырей X от безразмерного параметра Рэлея W при $\beta = 0.5$: *1* — $\gamma = 0$; *2* — $\gamma = 0.5$; *3* — $\gamma = 1$.

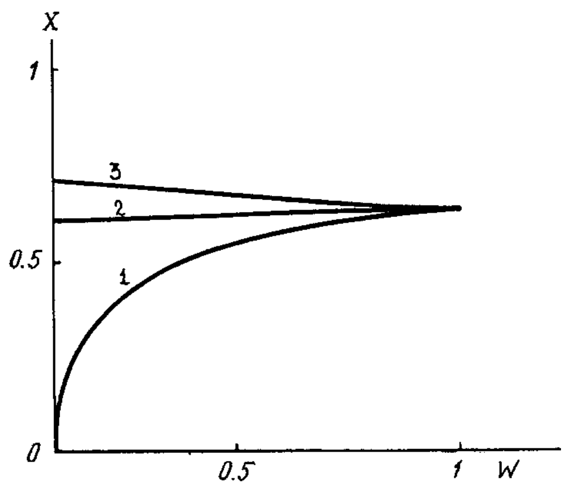

Рис. 2. Зависимость, аналогичная приведенной на рис. 1, рассчитанная при $\beta = 1 - W$. Кривая *1* соответствует $\gamma = 0$, кривая *2* — $\gamma = 0.5$, кривая *3* — $\gamma = 1$.

Расчеты по уравнению (3) показывают, что с увеличением параметра Рэлея W для материнского пузыря при $\beta = \text{const}$ размеры дочерних пузырей также увеличиваются. Зависимость безразмерного радиуса пузыря от параметра Рэлея представлена на рис. 1. Как видно из хода кривых, присутствие газа в пузыре оказывает существенное влияние на размеры дочерних пузырей, увеличивая из размеры при $W \leqslant 1.2$ и уменьшая при $W \geqslant 1.2$.

На рис. 2 приведена аналогичная рис. 1 зависимость обезразмеренного радиуса дочерних капель от параметра Рэлея W, но в данном случае взята зависимость для критического значения $W + \beta = 1$. Видно, что дочерние пузыри чисто газового материнского пузыря уменьшаются с ростом W и имеют минимальное значение для вакуумного пузыря. Для чисто парового пузыря наблюдается обратная ситуация — с ростом W происходит рост дочерних пузырей, несмотря на то что количество пара уменьшается.

Таким образом, для неустойчивого пузыря для малых W наличие насыщенного пара в пузырях будет приводить к уменьшению дочерних пузырей за счет конденсации пара, для больших же, напротив, к их росту за счет испарения.

Список литературы

[1] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Trans. Far. Soc. 1964. V. 60. P. 211–226.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 730 с.