

01;03

Исследование влияния величины сфероидальной деформации на устойчивость капли, заряженной ниже рэлеевского предела

© В.А. Коромыслов, Ю.Д. Рахманова, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 21 марта 1997 г.

На основе принципа минимизации потенциальной энергии изолированной капли идеальнопроводящей невязкой жидкости показана возможность неустойчивости деформированной капли при докритическом по Рэлею заряде.

В теории грозового электричества приходится иметь дело с капельками жидкости, заряженными ниже рэлеевского предела, которые в нормальных условиях устойчивы по отношению к собственному заряду. Однако известно [1], что в силу аэродинамических условий около 40% облачных капель обладает вытянутой сфероидальной формой. В связи с этим представляется интересным выяснить влияние величины сфероидальной деформации капли на критические условия развития неустойчивости капли, заряженной ниже рэлеевского предела.

Рассмотрим вытянутую сфероидальную заряженную каплю идеальной жидкости с поверхностным зарядом Q , коэффициентом поверхностного натяжения σ , радиусом равновеликого сферического объема R . Такая капля будет иметь энергию

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \sigma S, \quad (1)$$

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\operatorname{arch}(a/b)}; \quad S = 2\pi ab \sqrt{1 - e^2} + \frac{\arcsin e}{e}; \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

где C — емкость вытянутого сфероида, S — площадь поверхности вытянутого сфероида, e — его эксцентриситет. Очевидно, что объем

капли в процессе деформации не меняется:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi ab^2 = \text{const.} \quad (2)$$

При виртуальном бесконечно медленном растягивании капли она может самопроизвольно распаться на две, три и т. д. дочерних капли [2–4]. Возможен и другой механизм ее распада [5,6], когда увеличение плотности заряда на вершинах сфероида приведет к неустойчивости высоких мод капиллярных волн, которые сформируют на вершинах эмиссионные выступы, с которых начнется сброс избыточного заряда в виде большого количества высокодисперсных сильно заряженных капелек. Зависимость полной потенциальной энергии сфероидальной капли U от эксцентриситета e имеет два минимума: первый соответствует недеформированной капле сферической формы, второй — капле на грани распада. Логично предположить, что максимум энергии приходится на такое значение эксцентриситета, начиная с которого реализуется один из каналов распада [2–6].

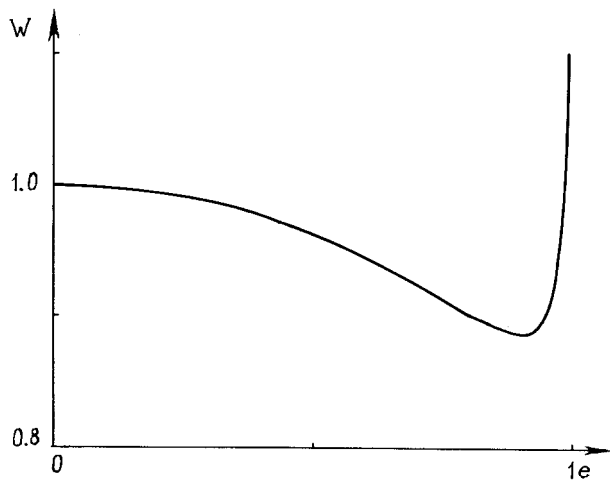
Найдем значение величины эксцентриситета капли e в этой точке.

Из выражений (1), (2) получим выражение для потенциальной энергии вытянутой заряженной сфероидальной капли [7]:

$$U = \frac{Q^2}{2R} \operatorname{arch} (1 - e^2)^{-1/2} \frac{(1 - e^2)^{-1/3}}{e} + 2\pi R^2 \left[(1 - e^2)^{1/3} + \frac{\arcsin e}{e(1 - e^2)^{1/6}} \right]. \quad (3)$$

Чтобы получить экстремальное значение эксцентриситета для еще устойчивой по отношению к собственному заряду капли, но находящейся на грани разрыва, приравняем нулю производную энергии U по эксцентриситету e , из которой после несложных преобразований можно получить зависимость критического значения параметра Рэлея $W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}$, характеризующего устойчивость капли, от эксцентриситета:

$$W = \frac{1}{4} \left((2e^2 - 3)e + \frac{\arcsin e}{(1 - e^2)^{1/2}} (3 - 4e^2) \right) \times (3e - \operatorname{arch} (1 - e^2)^{-1/2} (3 - e^2))^{-1}. \quad (4)$$



Зависимость от эксцентриситета e величины параметра Рэлея W , критического для деления сильно деформированной заряженной капли: $W = W(e)$. Неустойчивые состояния лежат выше приведенной кривой.

На рисунке приведена кривая зависимости $W = W(e)$, рассчитанная по формуле (4). Геометрическое место точек, лежащих ниже данной кривой, соответствует значениям параметра Рэлея, при которых капля остается устойчивой при сфероидальной деформации. Геометрическое место точек, лежащих выше данной кривой, соответствует значениям параметра Рэлея, при котором капля будет неустойчивой при данной деформации. Из рисунка видно, что при значении параметра Рэлея $W \geq 1$ капля будет неустойчива при любых значениях величины эксцентриситета. При $W \leq 0.89$ самопроизвольный распад капли вследствие развития электрогидродинамической неустойчивости не возможен.

Таким образом, можно предположить, что распад капли, заряженной ниже рэлеевского предела, будет происходить по обычному [2–5] сценарию: при достижении некоторой виртуальной деформации капля начнет самопроизвольно вытягиваться до величины эксцентриситета $e \approx 0.8$ [6], после чего, в зависимости от вязкости капли [3], произойдет распад капли либо на несколько частей сравнимых размеров, либо путем эмиссии большого числа сильнозаряженных высокодисперсных капелек.

Список литературы

- [1] *Облака и облачная атмосфера. Справочник* / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеоздат. 648 с.
- [2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Григорьева И.Д., Лазарянц А.Э., Мухина Е.И.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 4. С. 25–31.
- [3] *Коромыслов В.А., Григорьева И.Д.* // ЭОМ. 1995. № 3. С. 55–58.
- [4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1989. Т. 61. N 3. С. 19–28.
- [5] *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1991. V. 23. № 11. P. 1361–1370.
- [6] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. London. 1964. V. 280. P. 383–397.
- [7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.