01;03

Расчет нестационарной теплопроводности при малых числах Фурье (Fo < 0.001)

© *В.С. Логинов, А.Р. Дорохов, Н.Ю. Репкина*

Томский политехнический университет

Поступило в Редакцию 25 октября 1996 г.

Полагая, что при малых числах Фурье теплоперенос определяется тепловой емкостью прогреваемого слоя толщиной $\delta = \sqrt{a \cdot \tau}$, получено уравнение температурного поля, решение которого выполняется в конечных квадратурах и имеет достаточно простой вид. Проведено сопоставление результатов расчета по предложенной зависимости с точными решениями А.В. Лыкова, из которых следует возможность получения приемлемой точности расчетов при Fo < 0.001 и Bi < 20. При этом значения безразмерной температуры не зависят от формы тела и расчет по предлагаемой зависимости можно выполнять для пластины, цилиндра или шара.

В различных технологиях и тенических устройствах все большее применение находят быстропротекающие тепловые процессы. Это импульсные методы обработки тонких пленок, перспективные конструкции струйных принтеров и т. п. Существенно , что характерные времена теплового процесса при этом составляют 0.01–1 мс. Расчет теплопереноса теплопроводностью при столь малых временах проводится различными методами.

Во-первых, численными методами, во-вторых, различными аналитическими методами (метод Фурье, метод Лапласа и т. п.). Каждый из этих методов в принципе позволяет достигнуть требуемой точности вычислений, дело заключается лишь в возможности практической реализации и доступности для широкого круга инженерных работников.

Область малых чисел Фурье (Fo $<$ 0.001), характерная для быстропротекающих тепловых процессов, является весьма ”неудобной” для применения аналитических методов. Так, например, в методе Фурье существенно возрастает число членов ряда, который необходимо вычислять для достижения приемлемой степени точности. Сложно оперировать с интегралом вероятностей в методе Лапласа при выполнении практических расчетов. Поэтому представляет определенный интерес нахождение новых методов и приемов решения нестационарных задач теплопроводности для быстропротекающих процессов.

Здесь рассматривается приближенный метод такого расчета, основанный на следующих допущениях.

Опыт диагностики теплового режима плазменных струй [1] позволяет считать достаточно обоснованной методику, основанную на использовании так называемых датчиков теплового потока. Простейшая теория такого датчика, называемого емкостным датчиком, основана на применении соотношения для теплового потока

$$q = C \cdot \rho \cdot \delta \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}. \tag{1}$$

Здесь C, ρ — теплоемкость и плотность материала датчика; δ — толщина пластины чувствительного элемента датчика.

Рассмотрим фундаментальное уравнение теплопроводности

$$\rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathrm{div}(q). \tag{2}$$

Следующий шаг в преобразовании уравнения (2) заключается обычно в том, что для теплового потока принимается так называемая "гипотеза Фурье":

$$q = -\lambda \cdot \mathrm{grad}(T), \tag{3}$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала.

Подставляя (3) в (2), получаем известное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Здесь $a = \lambda/(\rho \cdot C)$ — температуропроводность тела.

Можно предположить, что для малых времен может быть оправданным принять в формуле (2) выражение для теплового потока (1). Тогда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right). \tag{5}$$

Обозначив $\Psi = \frac{\partial T}{\partial \tau}$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции Ψ, решение которого имеет вид

$$\Psi(x,\delta) = C_1 \cdot \exp\left(\frac{x}{\delta}\right). \tag{6}$$

Примем в уравнении (6) $\delta = \sqrt{a\tau}$, тогда при граничном условии третьего рода и начальном условии при $\tau = 0 \quad T = T_0$ получим выражение

$$\theta(X,\mathrm{Fo}) = \frac{\vartheta(x,\tau)}{\vartheta_0} = \frac{T(x,\tau) - T_ж}{T_0 - T_ж} = 1 - \frac{\exp[(X-1)/\sqrt{\mathrm{Fo}}\,]}{1 + [1/(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\,)]}. \tag{7}$$

Здесь определены параметры: $\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{R^2}$ — число Фурье; $\mathrm{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$ — число Био; $X = \frac{x}{R}$ — безразмерная координата.

Для определения возможности применимости полученного выражения для расчета температурного поля при малых числах Фурье расчет по этому уравнению сопоставлялся с решением, приведенным в [2].

Результаты сопоставления для числа Фурье $\mathrm{Fo} = 0.0003$ и различных чисел Био приведены в таблице. Как видно, имеется незначительное различие расчета по формуле (7) с точным решением, однако более громоздким.

Практическая польза полученного решения заключается в том, что оно позволяет получить непосредственную оценку величины теплового потока при малых Fo. Получаем

$$q = -\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \sqrt{\frac{\lambda\rho C}{\tau}}\left\{\vartheta_0\Big[-\theta(X,\mathrm{Fo}) + 1\Big]\right\}. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что решение (7) удовлетворяет предельным случаям: при $\mathrm{Fo} \to 0$ $\theta(X,\mathrm{Fo}) \to 1$; при $\mathrm{Fo} \to \infty$ $\theta(X,\mathrm{Fo}) \to 0$.

В таблице приведено сравнение результатов расчетов безразмерной температуры по формуле (7) с расчетами ([2], с. 209, ф-ла (40)). Как видно, до значений чисел Био $\mathrm{Bi} = 20$ расчет по приближенной формуле (7) обеспечивает вполне удовлетворительную точность расчета. Причем этот вывод справедлив для всех тел канонической формы (пластина, шар, цилиндр).

Сравнение расчета по формуле (7) с точными решениями [2]

Bi	Формула (7)	Данные [2]		
	Fo = 0.0003	пластина	цилиндр	шар
0.1	0.998	0.999	0.999	0.999
0.5	0.991	0.996	0.991	0.991
1	0.983	0.980	0.987	0.981
4	0.935	0.927	0.925	0.926
10	0.852	0.833	0.830	0.831
20	0.743	0.705	0.701	0.703

Аналогичные сравнения были сделаны при других числах Фурье. В качестве верхней границы области применимости полученной формулы может быть принято значение $\mathrm{Fo} \leqslant 0.001$.

Исходя из факта согласия приближенного и точного решений для определенной области чисел Био и Фурье, можем сделать некоторые заключения и о справедливости тех допущений, которые были сделаны при выводе исходного уравнения, в результате решения которого получена формула (7).

Принципиальным здесь, конечно, являются два обстоятельства — это "специфическая" запись выражения для теплового потока в виде (1) и определение выражения для масштаба δ. Это позволяет снизить порядок получаемого дифференциального уравнения. Аналогичные преобразования и допущения сделаны в [3] при расчете теплового потока, однако при этом порядок дифференциального уравнения, наоборот, повышен до третьей степени относительно температуры. Можно считать для исследуемого диапазона безразмерных параметров, определяющих процесс нестационарного теплообмена теплопроводностью, сделанные допущения вполне оправданными.

Список литературы

[1] *Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.* Тепловая защита / Под ред. А.В. Лыкова. М.: Энергия, 1976. 392 с.

[2] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 599 с.

[3] *Галин Н.М., Кириллов Л.П.* Тепломассообмен (в ядерной энергетике): Учебн. пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1987. 376 с.