

01;03;08

САЗЕР (Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

© С.Т. Завтрак, И.В. Волков

Научно-исследовательский институт ядерных проблем при Белорусском государственном университете, 220050 Минск, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 26 октября 1995 г.)

Предложена теоретическая схема сазера (от англ. SASER — Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation). В качестве активной среды используется жидкость с газовыми пузырьками. Накачка осуществляется переменным электрическим полем или механическими колебаниями резонатора. Фазовая группировка первоначально некогерентных излучателей (пузырьков) происходит под действием акустических радиационных сил. Предложенная схема аналогична схеме лазера на свободных электронах. Рассмотрены две модели активной среды. В первой предполагается, что все пузырьки имеют одинаковый радиус. Во второй модели рассмотрено непрерывное распределение пузырьков по радиусам. Рассчитаны стартовые условия для сазеров с прямоугольным и цилиндрическим резонаторами. Показано, что во всех рассмотренных случаях эти условия совпадают с точностью до численного коэффициента. Рассмотрены работа сазера в нелинейном режиме и диаграмма направленности сазера в режиме насыщения.

Введение

В настоящее время существует множество типов лазеров — устройств, генерирующих когерентное электромагнитное излучение за счет вынужденного излучения (или рассеяния) света активной средой. Существующие лазеры охватывают широкий диапазон длин волн — от ультрафиолета до субмиллиметрового. Однако, несмотря на прогресс в лазерной технологии, до сих пор не созданы акустические аналоги лазеров. В то же время проблема создания сазера представляет большой интерес из-за возможности широкого применения таких приборов.

Недавно в ряде работ была предложена теоретическая схема сазера [1–5]. Активной средой являлся жидкий диэлектрик с равномерно распределенными в нем дисперсными частицами. В качестве жидкого диэлектрика могут быть использованы различные типы масел, а также обычная дистиллированная вода. Дисперсными частицами служат газовые пузырьки, полученные путем электролиза. Волна накачки, возбужденная в активной среде, приводит к периодическому изменению объемов дисперсных частиц. Первоначальное распределение частиц пространственно однородно. В результате волны, излучаемые частицами, складываясь с различными фазами, дают в среднем нуль.

Однако если активная среда находится в резонаторе, то в нем может возбудиться стоячая мода. При этом будет происходить группировка частиц под действием акустических радиационных сил. Более того, хорошо известно, что состояние среды с пространственно однородным распределением пузырьков нестабильно не только для стоячей, но и для бегущей волны [6]. Это приводит к автосинхронизации колеблющихся частиц и усилению полезной моды. Предложенная схема аналогична лазеру на свободных электронах (ЛСЭ) [7]. Хорошо известно, что электромагнитное излучение в ЛСЭ создается пучком электронов, движущихся через магнитные периодические системы. Эти системы называются ондуляторами

ми, или вигглерами. Ондуляторы играют роль накачки. Первоначально излучение электронов некогерентно, но затем благодаря взаимодействию с полезной электромагнитной волной они начинают группироваться по фазе. В результате излучение становится когерентным. Это приводит к усилению электромагнитного поля.

В случае пьезоэлектрических излучателей, которые обычно применяются для генерации ультразвука, излучает только рабочая поверхность, следовательно, такие устройства являются двухразмерными рабочими системами. Сазер отличается от таких систем, в частности, тем, что он является трехразмерной системой, поскольку излучает весь объем активной среды.

Отметим, что ранее в ряде работ были предложены альтернативные схемы сазеров. Например, в работе [8] на примере газожидкостной смеси были рассмотрены эффекты автосинхронизации (за счет нелинейности) колебаний системы некогерентных механических осцилляторов монополюсного типа и усиление акустического поля в содержащей их среде. В работе [9] исследовались звуковые колебания в резонаторе Гельмгольца, заполненном перенасыщенным паром. За счет того что конденсация идет более интенсивно, чем испарение, в системе выделяется энергия, часть которой расходуется на усиление акустических колебаний. Однако схемы, предложенные в этих работах, не были реализованы на практике из-за слабого механизма автосинхронизации.

Целью настоящей работы является изложение теоретических основ сазера перед серией экспериментальных работ, планируемых в рамках Российско-Белорусского проекта "Акустический лазер". В этом проекте участвуют Институт гидродинамики им. М. Лаврентьева (СО РАН, Новосибирск), Институт теплофизики (СО РАН, Новосибирск), Институт лазерной физики (СО РАН, Новосибирск), Институт вычислительных технологий (СО РАН, Новосибирск), НИИ ядерных проблем (Белгосуниверситет, Минск) и Институт теплообмена им. М. Лыкова (АН РБ, Минск).

Основные уравнения

Начнем с общего рассмотрения динамики газожидкостной смеси, заполняющий резонатор. Первоначально концентрация пузырьков в жидкости пространственно однородна. Волна накачки, распространяющаяся в такой среде с круговой частотой ω , приводит к появлению дополнительной квазипериодической волны, которая связана с пространственным изменением концентрации пузырьков под действием сил радиационного давления. Амплитуда этой волны, а также концентрация пузырьков медленно меняются по сравнению с периодом колебаний $2\pi/\omega$.

Звуковая волна давления, распространяющаяся в газожидкостной смеси, описывается хорошо известным уравнением [6]:

$$\Delta P - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\rho_l \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $P = P(\mathbf{r}, t)$ — волна давления, c_l — скорость звука в чистой жидкости, ρ_l — плотность жидкости, $\tau = \tau(\mathbf{r}, t)$ — локальное газосодержание

$$\tau(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty n(\mathbf{r}, R_0, t) R^3(t) dR_0. \quad (2)$$

В этом уравнении $R(t) = R_0 + R_1(t)$ — текущий радиус пульсирующего пузырька, R_0 — невозмущенный радиус, $n(\mathbf{r}, R_0, t)$ — функция распределения пузырьков по радиусам (величина n определяет число пузырьков со средними радиусами от R_0 до $R_0 + dR_0$ в единице объема жидкости в окрестности точки с радиус-вектором \mathbf{r}). Радиальные колебания пузырька были исследованы во многих работах, например в [10–12]. Если выполняется условие $k_l R_0 \ll 1$ ($k_l = \omega/c_l$ — волновое число в чистой жидкости), то можно использовать уравнение колебаний пузырька в монопольном приближении

$$R_1(t) = -\frac{A}{\rho_l R_0^2 \omega^2} P(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор пузырька, A — амплитуда рассеяния звуковой волны одиночным пузырьком

$$A = \frac{R_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + i\delta}. \quad (4)$$

В этой формуле δ — константа поглощения, ω_0 — резонансная частота пузырька, определяемая известной формулой Миннаэрта [13]

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3\gamma_g \bar{P}_0}{\rho_l}}, \quad (5)$$

где γ_g — постоянная адиабаты для газа, содержащегося в пузырьках (для воздуха $\gamma_g = 4/3$), \bar{P}_0 — статическое давление.

Полагая $R_1(t) \ll R_0$ и подставляя (2) в (1), с учетом (3) можно получить волновое уравнение для газожидкостной смеси

$$\left[\Delta - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha + i\beta) \right] P = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \alpha(\mathbf{r}, R_0, t) = -4\pi \int_0^\infty (\text{Re } A) n(\mathbf{r}, R_0, t) dR_0, \quad (7)$$

$$\beta = \beta(\mathbf{r}, R_0, t) = -4\pi \int_0^\infty (\text{Im } A) n(\mathbf{r}, R_0, t) dR_0. \quad (8)$$

Граничным условием, налагаемым на (6), является требование равенства скоростей колебания поверхности резонатора и среды у этой поверхности. Поступательное движение пузырька дается следующим уравнением [14]:

$$\frac{4\pi}{3} \left(\rho_p + \frac{1}{2} \rho_l \right) R_0^3 \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{D} + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_B. \quad (9)$$

Левая часть этого уравнения содержит обычную массу пузырька $m_p = (4/3)\pi\rho_p R_0^3$ (ρ_p — плотность пузырька) и присоединенную массу жидкости $m_l = (2/3)\pi\rho_l R_0^3$ [15]; \mathbf{U} — поступательная скорость пузырька. Правая часть (9) содержит общую силу, действующую на пузырек. Здесь

$$\mathbf{F}_1 = -4\pi \left(\rho_p + \frac{1}{2} \rho_l \right) R_0^2 \mathbf{U} \frac{dR_l}{dt}$$

— сила сопротивления, связанная с изменением объема частицы (при усреднении $\langle \mathbf{F}_1 \rangle = 0$; \mathbf{F}_2 — выталкивающая сила, которой можно пренебречь для малых частиц; \mathbf{D} — сила вязкостного сопротивления, которая при малых числах Рейнольдса $\text{Re} = 2R_0 U \rho_l / \mu_l$ (μ_l — вязкость жидкости) выражается формулой Стокса

$$\mathbf{D} = -6\pi\mu_l R_0 \mathbf{U} f_\nu, \quad (10)$$

где f_ν — корректирующий множитель ($f_\nu = 2/3$ для пузырьков газа [15]); \mathbf{F}_r — средняя по времени сила радиационного давления, действующая на частицу.

В общем случае выражение для \mathbf{F}_r очень сложно, но в рассматриваемом случае оно может быть представлено в виде [1,3,12]

$$\mathbf{F}_r = -\frac{4\pi}{3} \langle R^3(t) \nabla P(\mathbf{r}, t) \rangle f_r, \quad (11)$$

где множитель f_r имеет следующий вид:

$$f_r = \frac{\left(1 + 2 \frac{\rho_p}{\rho_l} - 3 \frac{\rho_p^2 c_p^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right)}{\left(1 + 2 \frac{\rho_p}{\rho_l} \right)}. \quad (12)$$

Наконец, \mathbf{F}_B — так называемая вторичная сила Беркнеса [16], которая возникает благодаря радиационному

взаимодействию частиц и обычно мала по сравнению с \mathbf{F}_r (первичной силой Беркнеса).

После подстановки всех членов в (9) и усреднения по времени получаем следующее уравнение

$$\xi \mathbf{U} = (\operatorname{Re} A) \nabla |P|^2 - i(\operatorname{Im} A)(P^* \nabla P - P \nabla P^*), \quad (13)$$

где

$$\xi = \xi(R_0) = 6\rho_l \mu_l \omega^2 R_0 f_\nu / f_r. \quad (14)$$

Для получения полной самосогласованной системы уравнений необходимо дополнить (6) и (13) уравнением баланса числа частиц в элементе фазового объема $d^3 \mathbf{r} dR_0$ (мы пренебрегаем коагуляцией частиц)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{U}) = 0. \quad (15)$$

Анализ уравнений

Рассмотрим начальный этап группировки частиц, предполагая отклонение функции распределения $n'(\mathbf{r}, R_0, t)$ от первоначального значения $n_0(R_0)$ малым, т.е.

$$n(\mathbf{r}, R_0, t) = n_0(R_0) + n'(\mathbf{r}, R_0, t), \quad (16)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P_0(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (17)$$

и $|n'| \ll n_0$, $|\Psi| \ll |P_0|$. Здесь $P_0(\mathbf{r}, t) = P_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ — волна накачки, распространяющаяся в активной среде; $P_0(\mathbf{r})$ удовлетворяет волновому уравнению

$$[\Delta + k^2] P_0 = 0, \quad (18)$$

где $k = \sqrt{k_l^2 - (\alpha_0 + i\beta_0)}$ — волновое число в жидкости с газовыми пузырьками; величины

$$\alpha_0 = -4\pi \int_0^\infty (\operatorname{Re} A) n_0(R_0) dR_0, \quad (19)$$

$$\beta_0 = -4\pi \int_0^\infty (\operatorname{Im} A) n_0(R_0) dR_0 \quad (20)$$

описывают соответственно дисперсию и поглощение звука в газожидкостной смеси с пространственно однородным распределением пузырьков. Величина $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в правой части уравнения (17) представляет собой интересующую нас полезную волну давления.

Линеаризация уравнений (6), (13) и (15) по n' , Ψ с учетом (18) и подстановка (13) в (15) приводят к следующим уравнениям:

$$\left[\Delta - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \Psi = (\alpha' + i\beta') P_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \left[(\operatorname{Re} A) \Delta (P_0 P_0^* + P_0 \Psi^* + P_0^* \Psi) - i(\operatorname{Im} A) \right. \\ \left. \times (P_0^* \Delta \Psi + \Psi^* \Delta P_0 - P_0 \Delta \Psi^* - \Psi \Delta P_0^*) \right] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\alpha' = -4\pi \int_0^\infty (\operatorname{Re} A) n' dR_0, \quad (23)$$

$$\beta' = -4\pi \int_0^\infty (\operatorname{Im} A) n' dR_0. \quad (24)$$

Как будет показано ниже на примерах сазеров с прямоугольным и цилиндрическим резонаторами, излучение сазера выходит через стенки резонатора, которые перпендикулярны к направлению распространения волны накачки. Следовательно, мы можем пренебречь членом $n_0(\operatorname{Re} A) \Delta (P_0 P_0^*)$ в уравнении (22).

Будем искать функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в следующем виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial Z(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \exp(i\omega t). \quad (25)$$

Тогда из уравнений (21) и (22) можно получить волновое уравнение для распространения полезной моды в активной среде

$$\begin{aligned} \left[\Delta + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial Z}{\partial t} \\ = P_0 \left[F_1 \Delta (P_0 Z^* + P_0^* Z) + F_2 (P_0^* \Delta Z + Z^* \Delta P_0 \right. \\ \left. - P_0 \Delta Z^* - Z \Delta P_0^*) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$F_1 = 4\pi \int_0^\infty \frac{n_0 A (\operatorname{Re} A)}{\xi} dR_0, \quad F_2 = -4\pi i \int_0^\infty \frac{n_0 A (\operatorname{Im} A)}{\xi} dR_0. \quad (27)$$

Сазер с одинаковыми излучателями

Рассмотрим простой случай, когда все пузырьки имеют одинаковые радиусы R_0 и находятся далеко от резонансной области, т.е. R_0 существенно отличается от R_ω , где

$$R_\omega = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{3\gamma_g \bar{P}_0}{\rho_l}} \quad (28)$$

— резонансный радиус пузырька для частоты ω .

В этом случае функция распределения имеет следующий вид:

$$n(\mathbf{r}, \bar{R}_0, t) = N(\mathbf{r}, t) \delta(R_0 - \bar{R}_0). \quad (29)$$

Полагая газосодержание и поглощение в активной среде малым ($\delta \ll 1$), можно оценить величины α_0 , β_0 , F_1 и F_2 . В результате $|\alpha_0| \ll k_l^2$, $\beta_0 \ll |\alpha_0|$,

$$F_1 \approx \frac{\alpha_0^2}{\gamma}, \quad F_2 \approx 0, \quad (30)$$

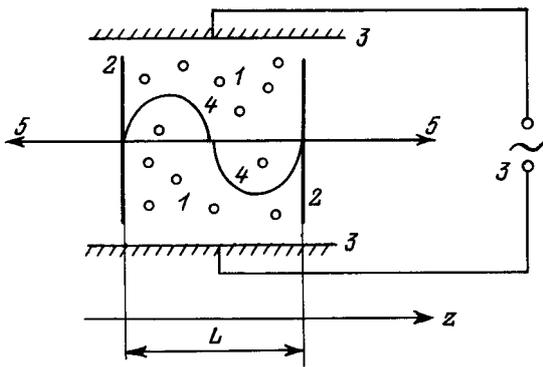


Рис. 1. Схема лазера с электрической накачкой. 1 — активная среда; 2 — твердые стенки резонатора; 3 — электромагнитная система, создающая периодическое электрическое поле; 4 — полезная акустическая мода; 5 — звуковое излучение.

где $\gamma = 24\pi\rho_l\mu_l\omega^2R_0N_0f_v/f_r$, N_0 соответствует n_0 .

С учетом этих оценок уравнение (26) принимает следующий вид:

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\alpha_0^2 P_0}{\gamma} \Delta (P_0 Z^* + P_0^* Z). \quad (31)$$

С а з е р с э л е к т р и ч е с к о й н а к а ч к о й. Схема лазера с электрической накачкой приведена на рис. 1. Активная среда заключена между двумя плоскостями. Излучение происходит вдоль оси z , L — длина резонатора в этом направлении.

Статическое электрическое поле, действующее на жидкость с газовыми пузырьками, приводит к деформации (электрострикции) диэлектриков [17] и, следовательно, к изменению объемов частиц.

Величина эффективного давления, действующего на частицу, равна [17,18]

$$P = \frac{3}{8\pi} \frac{\varepsilon_l E^2 (\varepsilon_l - \varepsilon_p)}{(2\varepsilon_l + \varepsilon_p)}. \quad (32)$$

Здесь ε_l и ε_p — соответственно диэлектрические проницаемости жидкости и частиц, E — напряженность электрического поля. Например, для пузырьков воздуха в дистиллированной воде ($\varepsilon_p \approx 1$, $\varepsilon_l \approx 81$) при $E = 10$ кВ/см величина $P = 0.5$ кПа.

Возьмем в качестве волны накачки периодически изменяющееся электрическое поле $E = E_0 \cos(\Omega t)$. Электромагнитные волны распространяются в среде со скоростью, намного превышающей скорость звука для данной среды. Следовательно, можно считать, что эффективная волна накачки $P_0(\mathbf{r}, t)$, действующая на пузырьки, не зависит от пространственных координат, т.е.

$$P_0(t) = P_E \exp(i\omega t), \quad (33)$$

где $\omega = 2\Omega$ — частота накачки.

Амплитуду давления P_E можно легко вычислить из формулы (32). Постоянный член в формуле (33) опущен.

Как показано в работах [1,2], результирующая волна давления накачки, распространяющаяся в пространственно-однородной активной среде, имеет следующий вид:

$$P_0(t) = \frac{P_E \exp(i\omega t)}{1 - \frac{\alpha_0 + i\beta_0}{k_l^2}}. \quad (34)$$

Появление нормировочного множителя

$$F = \left(1 - \frac{\alpha_0 + i\beta_0}{k_0^2} \right)^{-1} \quad (35)$$

вызвано присутствием множества дисперсных частиц. В результате уравнение (31) принимает следующий вид (можно считать, что $F \approx 1$):

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\alpha_0^2 P_E^2}{\gamma} \Delta (Z^* + Z). \quad (36)$$

Будем считать, что полезная мода Z является функцией только от одной пространственной координаты z . Если накачка отсутствует ($P_E = 0$), то будем искать решение уравнения (36) в виде $Z \sim \exp(i\omega't - ik_z z)$. Тогда из (36) можно получить характеристическое уравнение

$$k_z^2 = \frac{(\omega + \omega')^2}{c_l^2} - \alpha_0 - i\beta_0. \quad (37)$$

Это уравнение соответствует затухающей (в направлении оси z) волне с круговой частотой $(\omega + \omega')$.

Присутствие в системе волны накачки приводит, во-первых, к появлению обратной волны с круговой частотой $(\omega - \omega')$ и, во-вторых, к динамической неустойчивости рассматриваемой системы. Будем искать решение (36) в следующем виде:

$$Z(z, t) = A \exp(i\omega't - ik_z z) + B \exp(-i\omega't + ik_z^* z). \quad (38)$$

Полагая амплитуду обратной волны малой, т.е. $|B| \ll |A|$, получим

$$k_z^2 \approx \frac{(\omega + \omega')^2}{c_l^2} - \alpha_0 - i \left(\beta_0 + \frac{\alpha_0^2 P_E^2 (\omega + \omega')^2}{\gamma \omega' c_l^2} \right). \quad (39)$$

Из этого уравнения можно найти условие усиления моды с круговой частотой $(\omega + \omega')$ (в этом случае частотный сдвиг ω' должен быть выбран отрицательным)

$$P_E \geq P_{st} = \frac{c_l}{|\alpha_0|(\omega + \omega')} \sqrt{\beta_0 \gamma |\omega'|}. \quad (40)$$

Величина P_{st} соответствует стартовому току в ЛСЭ [7]. Стартовые условия для генерации мод, падающих на

стенку резонатора в направлении оси z , были рассмотрены в работе [2]. Если на стенку резонатора падает волна с круговой частотой $(\omega + \omega')$, то внутри него возбуждаются моды с частотами $(\omega + \omega')$ и $(\omega - \omega')$. В вышеупомянутой работе была получена система алгебраических уравнений, определяющая амплитуды всех волн в резонаторе. Полагая определитель этой системы равным нулю

$$\left(1 + \frac{\rho_l c_l}{\rho_s c_s}\right)^2 \exp(ik_z L) - \left(1 - \frac{\rho_l c_l}{\rho_s c_s}\right)^2 \exp(-ik_z L) = 0, \quad (41)$$

можно найти условия генерации. В этом уравнении ρ_s и c_s — соответственно плотность и скорость звука в излучающих стенках резонатора. Подстановка (39) в (41) дает

$$L \sqrt{\frac{(\omega + \omega')^2}{c_l^2} - \alpha_0} = \pi m \quad m = 1, 2, \dots, \quad (42)$$

$$\frac{\alpha_0^2 P_0^2}{\gamma |\omega'|} \frac{(\omega + \omega')^2}{c_l^2} = \beta_0 + \frac{2}{L} \sqrt{\frac{(\omega + \omega')^2}{c_l^2}} \ln \frac{1 + \frac{\rho_l c_l}{\rho_s c_s}}{1 - \frac{\rho_l c_l}{\rho_s c_s}}. \quad (43)$$

Из уравнения (42) можно найти значения частотного сдвига ω' . Видно, что для генерации необходимо, чтобы в резонаторе возбуждались колебания с целым числом полуволн вдоль оси z . Уравнение (43) определяет значение давления накачки P_0 , начиная с которого происходит генерация. Физический смысл условия (43) ясен. Для начала генерации необходимо преодолеть потери двух типов. Первый тип потерь связан с диссипацией энергии внутри активной среды и определяется соответственно первым членом в правой части (43). Второй тип обусловлен радиационными потерями на торцах резонатора и соответствует второму члену в правой части (43). Как обычно, он обратно пропорционален объему запасенной в резонаторе энергии, т.е. L^{-1} [19].

В пределе $\omega \ll \omega_0$ и $L \rightarrow \infty$ получим

$$P_{st} \approx c_l \sqrt{\delta \mu_l \rho_l |\omega'|}. \quad (44)$$

В случае пузырьков воздуха с радиусами $R_0 = 15$ мкм ($f_0 = \omega_0/2\pi = 200$ кГц) и отношением $\omega'/\omega \approx -0.01$ получается $P_0 = 0.46$ кПа. Однако эта схема сазера обладает одним существенным недостатком, а именно большой величиной амплитуды электрического поля, составляющей, например, для дистиллированной воды десятки кВ/см. Эти значения приближаются к напряженности электрического пробоя жидких диэлектриков [20].

Далее мы будем рассматривать схемы сазеров, свободные от этого недостатка. В этих схемах волна накачки возбуждается с помощью резонатора [4,5].

Сазер с прямоугольным резонатором. Схема сазера с прямоугольным резонатором представлена на рис. 2. Активная среда ограничена плоскостями $x = 0, h_1$; $y = 0, h_2$; $z = 0, h_3$. Стенки, задаваемые

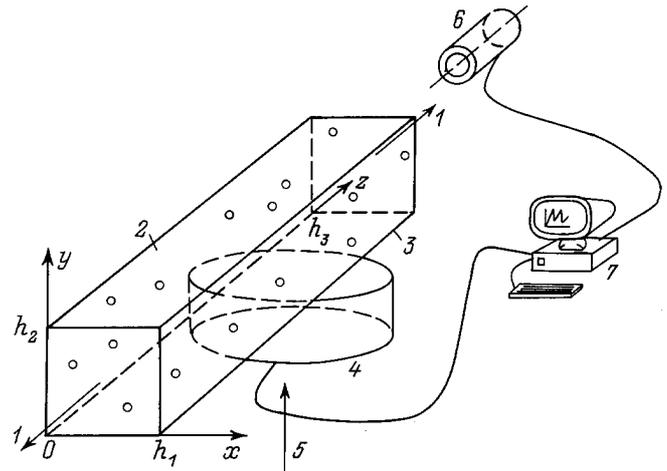


Рис. 2. Схема сазера с прямоугольным резонатором. 1 — звуковое излучение, 2 — активная среда, 3 — прямоугольный резонатор, 4 — пьезоэлектрический излучатель, 5 — механическая накачка, 6 — система мониторинга, 7 — контролирующий и управляющий компьютер.

плоскостями $x = 0, h_1$; $y = 0, h_2$, считаем для упрощения расчетов абсолютно твердыми. Накачка осуществляется за счет периодических пульсаций стенки, задаваемой плоскостью $y = 0$.

Решая уравнение (18), находим (учитывая, что $k \approx k_l$)

$$P_0(\mathbf{r}) = P_0(y) = P_0 \begin{pmatrix} \cos k_l y \\ \sin k_l y \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Для выполнения граничных условий будем полагать, что круговая частота ω подобрана так, чтобы в резонаторе возбуждалась только одна стоячая мода, т.е. $P_0(y) = P_0 \cos k_l y$, причем $k_l h_2 = \pi m$, где m — целое число.

Применим к анализу уравнения (31) метод усреднения [21]. Решение уравнения (31) может быть записано в виде фурье-разложения

$$Z(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(z, t) + \Phi_1(z, t) \begin{pmatrix} \cos k_l y \\ \sin k_l y \end{pmatrix} + \Phi_2(z, t) \begin{pmatrix} \cos 2k_l y \\ \sin 2k_l y \end{pmatrix} + \dots \quad (46)$$

Усреднение (31) по y дает в первом приближении ($Z \approx \Phi_0(z, t)$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + \beta_0) \right] \frac{\partial \Phi_0(z, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_0^2}{2\gamma} P_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_l^2 \right) [\Phi_0(z, t) + \Phi_0^*(z, t)], \quad (47)$$

Решая уравнение (47) тем же методом, что и (36), можно получить выражение для стартового давления P_{st} (в пределе $\omega \ll \omega_0$ и $h_3 \rightarrow \infty$)

$$P_{st} \approx c_l \sqrt{2\mu_l \rho_l \delta |\omega'|}. \quad (48)$$

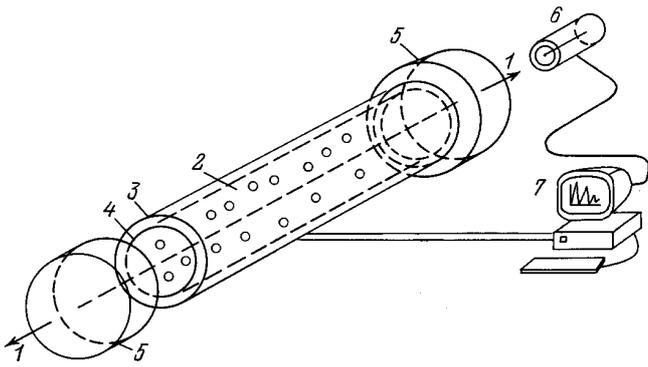


Рис. 3. Схема сазера с цилиндрическим резонатором. 1 — звуковое излучение, 2 — активная среда, 3 — внешняя поверхность цилиндрического резонатора, 4 — внутренняя поверхность цилиндрического резонатора, 5 — торцы резонатора, 6 — система мониторинга, 7 — контролирующий и управляющий компьютер.

Сазер с цилиндрическим резонатором. Схема сазера с цилиндрическим резонатором изображена на рис. 3. Активная среда заключена в цилиндр радиуса R , ограниченный на торцах плоскостями $z = 0$ и $z = L$ (используем цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль оси цилиндра). Боковые стенки периодически пульсируют с частотой ω , т.е.

$$R(t) = R + a \exp(i\omega t), \quad (49)$$

где a — амплитуда колебаний, $|a| \ll R$.

Излучение выходит через торцы цилиндра. Полагая $k \approx k_l$, можно найти волну накачки из уравнения (18)

$$P = P_0 J_0(k_l r) \exp(i\omega t), \quad (50)$$

где J_n — функция Бесселя порядка n .

Будем искать решение (31) в виде разложения по функциям Бесселя

$$Z(\mathbf{r}, t) = W_0(z, t) J_0(k_r r) + W_1(z, t) J_1(k_r r) + W_2(z, t) J_2(k_r r) + \dots \quad (51)$$

Волновое число k_r можно найти из граничного условия

$$\left. \frac{\partial J_0(k_r r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (52)$$

т.е. $k_r = \mu/R$, где μ — любой из нулей $J_1(x)$.

Усреднение уравнения (31) по r с учетом того, что $k_l R \ll 1$, дает в первом приближении ($Z(\mathbf{r}, t) \approx W_0(z, t) J_0(k_r r)$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_r^2 + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\alpha_0^2 P_0^2}{\gamma} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_r^2 \right] (\Phi + \Phi^*). \quad (53)$$

Как и в предыдущих случаях, выражение для стартового давления принимает вид

$$P_{st} \approx c_l \sqrt{2\delta \mu_l \rho_l |\omega'|}. \quad (54)$$

Сазер с неодинаковыми излучателями

Для упрощения расчетов в предыдущих разделах считалось, что дисперсные частицы имеют форму шариков, причем одинаковых радиусов. Газовые пузырьки действительно имеют сферическую форму, однако, как показывают многочисленные экспериментальные данные (см., например, [22,23]), распределение пузырьков по радиусам носит сложный характер. Как правило, это распределение характеризуется следующей зависимостью:

$$n(\mathbf{r}, R_0, t) \approx a R_0^{-3}. \quad (55)$$

Константа a определяет локальное газосодержание жидкости

$$\tau(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi a}{3} R_{\max}, \quad (56)$$

где R_{\max} — максимальный радиус пузырьков.

Используя метод, описанный в работах [5,24], можно приближенно вычислить параметры α_0 , β_0 , F_1 и F_2 (полагая $\delta \ll 1$). В результате

$$F_1 \approx F_2 \approx \frac{\pi^2 n_0(R_\omega) R_\omega^3}{\xi(R_\omega) \delta},$$

$$\alpha_0 \approx 0 \text{ и } \beta_0 \approx 2\pi^2 R_\omega^2 n_0(R_\omega).$$

Таким образом, для широкой функции распределения $n_0(R_0)$ резко уменьшается вклад пузырьков в действительную часть k , т.е. в скорость звука ($k \approx k_l$). Величина β_0 , определяющая затухание звуковых волн в среде с пространственно однородным и не меняющимся со временем распределением пузырьков, не зависит от добротности $Q = 1/\delta$ отдельных пузырьков. Дело в том, что с ростом Q увеличивается потребление энергии отдельным пузырьком (за счет его более сильной раскачки), но число пузырьков, взаимодействующих с гармоническим полем, уменьшается (из-за сужения резонансной кривой).

Полагая $|\beta_0| \ll k_l^2$ и учитывая полученные оценки для параметров α_0 , β_0 , F_1 и F_2 , получаем из (26) следующее:

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial Z}{\partial t} = 2F_1 P_0 \left(P_0 \Delta Z + Z^* \Delta P_0 + \nabla P_0 \nabla (Z + Z^*) \right). \quad (57)$$

Теперь покажем на примерах сазеров с прямоугольным и цилиндрическим резонаторами, что неодинаковость радиусов пузырьков не меняет стартовые условия для сазера. Схемы сазеров аналогичны рассмотренным для случая одинаковых пузырьков (рис. 2,3).

Сазер с прямоугольным резонатором. Используя метод усреднения, получаем из (57)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = F_1 P_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k_l^2 \Phi_0^* \right). \quad (58)$$

Решая это уравнение, как и в предыдущем случае, получим выражение для стартового давления накачки

$$P_{st} \approx \frac{c_l}{(\omega + \omega')} \sqrt{\frac{\beta_0}{F_1} |\omega'|} \approx \frac{c_l}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega}\right)} \sqrt{8\mu_l \rho_l \delta |\omega'|}. \quad (59)$$

Как видно из (59), зависимость P_{st} от всех параметров совпадает с полученной ранее с точностью до численного коэффициента.

Сазер с цилиндрическим резонатором. Усредняя уравнение (57) по r , можно найти (полагая $k_l R \ll 1$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_r^2 + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \right] \frac{\partial W_0}{\partial t} = 2F_1 P_0^2 \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial z^2} - k_r^2 W_0 - k_l^2 W_0^* \right). \quad (60)$$

Отсюда с помощью несложных вычислений можно найти выражение для стартового давления

$$P_{st} \approx \frac{c_l}{(\omega + \omega')} \sqrt{\frac{\beta_0}{2F_1} |\omega'|} \approx \frac{2c_l}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega}\right)} \sqrt{\mu_l \rho_l \delta |\omega'|}, \quad (61)$$

которое совпадает с ранее полученным.

Сазер в нелинейном режиме работы

В предыдущих [1–5] и настоящей работах до сих пор исследовался процесс автофазировки газовых пузырьков на начальном этапе работы сазера. При этом предполагалось, что изменения пространственной концентрации пузырьков n' малы по сравнению с начальным значением n_0 . Здесь мы отказываемся от этого предположения и рассмотрим работу сазера в произвольные моменты времени. В качестве примера рассмотрим сазер с электрической накачкой. Применим к системе уравнений (6), (13) и (15) процедуру усреднения Боголюбова–Митропольского [21] по высокочастотной составляющей $\exp(i\omega t)$. Для упрощения расчетов пузырьки будем считать одинаковыми. Тогда укороченные уравнения принимают вид

$$\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) P + 4\pi n A P = -4\pi n A P_E, \quad (62)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\alpha_0 P_E}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{\partial}{\partial z} (P + P^*) \right). \quad (63)$$

Решение уравнения (62) будем искать в виде стоячей волны

$$P = P_0(t) \cos k_L z, \quad (64)$$

где k_L определяется из условия резонанса [2] $k_L = (\pi m)/L$, $m = 1, 2, \dots$; L — длина резонатора.

Умножая уравнение (62) на $\cos k_L z$ и усредняя теперь уже по пространственной переменной, получаем

$$\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi A n_{2L} \right) P_0(t) = -4\pi n_{1L} A P_E, \quad (65)$$

где обозначено

$$\langle n \cos k_L z \rangle \equiv \frac{1}{2} n_{1L}(t), \quad (66)$$

$$\langle n \cos^2 k_L z \rangle \equiv \frac{1}{2} n_{2L}(t). \quad (67)$$

Уравнение (63) в результате подстановки (64) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\sigma(t) \frac{\partial}{\partial z} (n \sin k_L z), \quad (68)$$

$$\sigma(t) = \frac{\alpha_0 P_E (P_0(t) + P_0^*(t))}{\gamma} k_L^2. \quad (69)$$

Решение уравнения (68), отвечающее начальному условию $n(z, 0) = n_0$, имеет вид

$$n = \frac{n_0 G(t)}{\cos^2 \frac{k_L z}{2} + G^2(t) \sin^2 \frac{k_L z}{2}}, \quad (70)$$

где

$$G(t) = \exp\left(-\int_0^t \sigma(t') dt'\right). \quad (71)$$

При этом, естественно, выполняется условие $n = n_0$. Вычисление средних значений (66)–(67) сводится к табличным интегралам

$$\langle n \cos k_L z \rangle \equiv \frac{1}{2} n_{1L}(t) = -\frac{1 - G(t)}{1 + G(t)} n_0, \quad (72)$$

$$\langle n \cos^2 k_L z \rangle \equiv \frac{1}{2} n_{2L}(t) = -\frac{1 + G^2(t)}{(1 + G(t))^2} n_0. \quad (73)$$

На начальном этапе (при малых t)

$$G(t) \approx 1 - \int_0^t \sigma(t') dt', \quad (74)$$

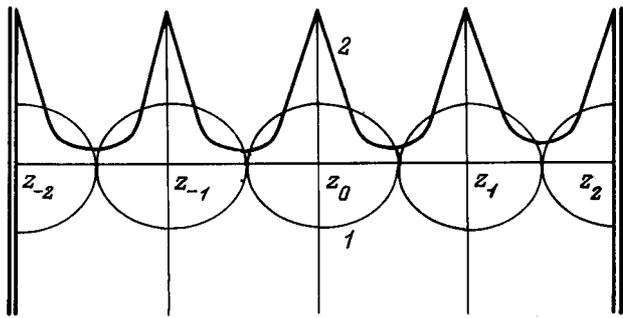


Рис. 4. Пространственная группировка пузырьков. 1 — полезная акустическая мода, 2 — пространственная плотность распределения пузырьков.

Подставляя (74) в (72), (73), находим следующий вид уравнения (65):

$$\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_0 - i\beta_0\right) P_0(t) = -\frac{\alpha_0^2 P_E^2 k_L^2}{\gamma} \int_0^t (P_0(t') + P_0^*(t')) dt'. \quad (75)$$

Если искать решение этого уравнения в обычном виде (см. [38])

$$P(t) = A^+ \exp(i\omega' t) + A^- \exp(-i\omega' t), \quad (76)$$

(здесь ω' — вообще говоря, комплексная величина, т.е. $\omega' = \text{Re}(\omega') + i \text{Im}(\omega')$), то из (75) при условии $A^- \ll A^+$ нетрудно получить

$$\text{Re}(\omega') \approx -\frac{c_l^2}{2\omega} \left(\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - \alpha_0 \right) - k_L^2 \right), \quad (77)$$

$$\text{Im}(\omega') \approx \frac{c_l^2}{2\omega} \left(\beta_0 + \frac{\alpha_0^2 k_L^2 P_E^2}{\gamma \text{Re}(\omega')} \right). \quad (78)$$

Реальная часть ω' (77) определяет отстройку круговой частоты накачки ω от резонансной частоты резонатора $\omega_L = k_L c_l$, мнимая часть ω' (78) — инкремент усиления полезной моды [1–3]. Таким образом, на начальном этапе не получается ничего нового по сравнению с результатами предыдущих работ [1–3].

Пространственная группировка пузырьков происходит вблизи плоскостей, в которых их скорость равна нулю (рис. 4). Из выражения (68) видно, что эти плоскости определяются уравнениями $k_L z = \pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Однако не все эти плоскости являются устойчивыми. Это определяется поведением знака радиационной силы вблизи указанных плоскостей [24]. Последний в свою очередь зависит от соотношения фаз между волной накачки P_E и полезной модой P , а также между резонансной частотой пузырька и частотой накачки. Нетрудно, однако, видеть, что устойчивые и неустойчивые плоскости определяются из уравнения $z_m = 2\pi m/k_L$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Ниже будет показано, что в пределе насыщения параметр G стремится к бесконечности. При этом всюду, кроме устойчивых плоскостей, плотность распределения пузырьков $n \sim G^{-1} \rightarrow 0$ (см. формулу (70)). Вблизи же устойчивых плоскостей функция $\sin(k_L z/2)$ стремится к нулю. Поэтому распределение пузырьков принимает δ -образный характер (рис. 4). После подстановки средних значений (72), (73) уравнение (65) принимает вид

$$\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - (\alpha_0 + i\beta_0) \frac{2(1 + G^2(t))}{(1 + G(t))^2}\right) P_0(t) - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\alpha_0 P_E \frac{2(1 - G(t))}{(1 + G(t))}. \quad (79)$$

Введем следующее обозначение:

$$\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - \alpha_0 \equiv \delta_L \frac{\omega^2}{c_l^2}. \quad (80)$$

Величина δ_L характеризует отстройку частоты накачки от резонансной частоты резонатора. Из уравнения (79) можно найти максимальное значение амплитуды полезной моды, которое может быть достигнуто в сазере. Оно находится из условия обращения в нуль производной от давления полезной моды по времени

$$P = \frac{\frac{2\alpha_0}{k_l^2}}{\delta_L - \frac{1}{k_l^2}(\alpha_0 + 2i\beta_0)} P_E. \quad (81)$$

Отсюда четко видно, что для выполнения условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) \rightarrow \infty \quad (82)$$

необходимо, чтобы было

$$\delta_L < \frac{\alpha_0}{k_l^2}. \quad (83)$$

Оценка (81) носит качественный характер, поскольку не учитывает коагуляцию пузырьков, группирующихся вблизи указанных плоскостей. При коагуляции пузырьки объединяются в более крупные и всплывают. В результате этого давление полезной моды должно быстро уменьшиться. Ясно поэтому, что формула (81) может иметь физический смысл только как оценка максимума давления, создаваемого сазером.

Диаграмма направленности сазера в режиме насыщения

Рассмотрим сазер с цилиндрическим резонатором; все пузырьки имеют одинаковый радиус. В режиме насыщения можно считать, что в активной среде расположено большое число излучателей поршневого типа на расстоянии $(2\pi)/k$ друг от друга.

Излучение поршневых излучателей в дальней зоне, где справедливо приближение Фраунгофера, описывается хорошо известным уравнением [19]

$$\phi(r, \theta) = -\frac{R^2}{r} \frac{J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \exp(-ikr) u_0. \quad (84)$$

Здесь $\phi(r, \theta)$ — потенциал скорости (мы используем цилиндрические координаты); R — радиус излучателя; u_0 — амплитуда его колебаний.

В случае сазера результирующий потенциал $\phi_{\text{res}}(r, \theta)$ представляет собой сумму потенциалов от каждой плоскости группировки пузырьков. Поскольку нас интересует излучение сазера вдали от резонатора, то можно считать, что для каждой плоскости изменяется только фазовый множитель $\exp(ikr)$ в формуле (84), т.е.

$$\phi_{\text{res}}(r, \theta) = -\frac{R^2}{r} \frac{J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \sum_{s=1}^N \exp(-ikr_s) u_0, \quad (85)$$

где N — число плоскостей; величина

$$r_s \approx r \left(1 + \frac{2\pi(s-1)}{kr} \cos \theta \right) \quad (86)$$

представляет собой расстояние между s -й плоскостью и точкой наблюдения ($r_1 = r$).

Рассмотрим диаграмму направленности для сазера. Интенсивность излучаемой волны пропорциональна квадрату потенциала (85). Если число плоскостей N достаточно велико, то можно легко показать, что интенсивность излучения в основном направлении ($\theta = 0$) увеличится в N^2 раз по сравнению с излучением одной плоскости, а боковые лепестки диаграммы направленности будут подавляться.

Таким образом, излучение сазера характеризуется высокой направленностью излучения по сравнению с обычными поршневыми излучателями.

Заключение

Итак, рассмотрены основные принципы работы сазера. Неравенство излучателей не играет роли при расчете стартовых условий. Основной вклад в усиление полезной моды дают пузырьки с резонансными частотами, близкими к частоте накачки. Следует отметить, что выражение для стартового давления не зависит от числа излучателей в отличие, например, от обычных лазеров. На первый взгляд, это кажется довольно странным, но это не так. Дело в том, что, с одной стороны, полезная мода возрастает с ростом числа частиц, а с другой стороны, при этом также возрастает поглощение звука. Оба эти фактора нейтрализуют друг друга. Пузырьки играют основную роль в диссипации энергии в сазере, т.е. $\beta_0 \sim m_0$. В реальности, β_0 содержит не только "пузырьковый" член, но и другие, например член, зависящий от вязкости жидкости. Однако эти дополнительные вклады малы по сравнению с "пузырьковым".

Список литературы

- [1] *Zavtrak S.T.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 2480–2484.
- [2] *Zavtrak S.T.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 3767–3769.
- [3] *Завтрак С.Т.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 6. С. 123–132.
- [4] *Zavtrak S.T., Volkov I.V.* // Ultrasonics. 1995. In press.
- [5] *Zavtrak S.T., Volkov I.V.* // J. Acoust. Soc. Am. 1995. In press.
- [6] *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 276 с.
- [7] *Маршалл Т.* Лазеры на свободных электронах. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 240 с.
- [8] *Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Соустова И.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1129–1136.
- [9] *Котосов А.Н., Немцов Б.Е.* // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 123–129.
- [10] *Yosioka K., Kavasima Y.* // Acustica. 1995. Vol. 5. N 3. P. 167–173.
- [11] *Клей К., Медвин Г.* Акустическая океанография. М.: Мир, 1980. 580 с.
- [12] *Алексеев В.Н.* // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 129–136.
- [13] *Minnaert M.* // Philos. Mag. 1933. Vol. 16. N 17. P. 235–243.
- [14] *Левковский Ю.Л.* Структура кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1978. 222 с.
- [15] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1990. 736 с.
- [16] *Заболотская Е.А.* // Тр. ИОФАН. Нелинейные волновые процессы. 1989. Т. 18. С. 121–165.
- [17] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 664 с.
- [18] *Завтрак С.Т., Коробко Е.В.* // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 5. С. 944–949.
- [19] *Кайно Г.* // Акустические волны. М.: Мир, 1990, 656 с.
- [20] *Solytar L., Walsh D.* // Lectures on the Electrical Properties of Materials. Oxford, 1988. P. 345.
- [21] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958. 354 с.
- [22] *Гаврилов Л.Р.* Физические основы ультразвуковой технологии. М.: Наука, 1970. 256 с.
- [23] *Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Сутин А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. Вып. 17. С. 423–425.
- [24] *Завтрак С.Т.* // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 31–36.