Электрическое поглощение биметаллической цилиндрической частицы

© Э.В. Завитаев

Московский государственный университет леса,
141005 Мытищи, Московская обл., Россия

E-mail: zav.mgul@rambler.ru

(Поступила в Редакцию 5 ноября 2004 г.)

Вычислено сечение поглощения энергии внешнего электрического поля, направленного вдоль оси симметрии биметаллической цилиндрической частицы. Рассмотрен общий случай, когда отношение радиуса ядра к радиусу частицы может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренней и внешней поверхностей металлического слоя частицы. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

PACS: 61.82.Bg, 72.15.Eb

1. Введение

Электромагнитные свойства малых металлических частиц могут существенно отличаться от свойств массивных образцов металла [1]. Если линейный размер R образца металла порядка длины свободного пробега электронов Λ или меньше ее ($R < \Lambda$), то взаимодействие электронов с границей металлического образца начинает оказывать заметное влияние на их отклик на внешнее электромагнитное поле. Следствием этого являются особые оптические свойства образца (металлической частицы). Поэтому, когда выполняется условие $R < \Lambda$, одна из основных оптических характеристик — сечение поглощения — обнаруживает нетривиальную зависимость от отношения R/Λ. При комнатной температуре в металлах с хорошей проводимостью (алюминий, медь, серебро и др.) длина свободного пробега электронов Λ лежит в характерных пределах $10-100$ nm. Размеры же экспериментально исследуемых частиц достигают нескольких nm, т.е. ситуация $R < \Lambda$ реализуется.

В качестве аппарата, способного описывать отклик электронов на внешнее электромагнитное поле с учетом взаимодействия электронов с границей образца, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [2]. В этом случае ограничения на соотношение между длиной свободного пробега электронов и размером образца не накладываются.

Уравнения макроскопической электродинамики применимы лишь в случае „массивных“ образцов: $R \gg \Lambda$. Поэтому известная теория Ми, которая описывает взаимодействие электромагнитной волны с металлическими телами в рамках макроскопической электродинамики, непригодна для описания упомянутого размерного эффекта.

В работах [3,4] была построена теория взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей. Немного ранее в предельном случае $R \ll \Lambda$ на низких частотах (дальний ИК-диапазон) тот же результат, что и в [3], получен в работах [5,6]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле. Альтернативный подход к проблеме предложен и развивается в работах [7,8].

В последнее время возрос интерес к проблеме взаимодействия электромагнитного излучения с несферическими частицами [9]. Ряд работ [10–13] был посвящен описанию взаимодействия электромагнитного излучения с цилиндрической частицей. Отметим также работы, в которых предпринята попытка учета квантовомеханических эффектов в данной проблеме, что особенно существенно при низких температурах [14,15]. В работах [3–6,10–13] теоретически описывалось только магнитное дипольное поглощение мелких металлических частиц. Причем во всех перечисленных выше работах рассматривались только однородные частицы, т.е. не поднимался вопрос о внутренней структуре поглощающих частиц.

Однако в последнее время в литературе появились сообщения об экспериментальных исследованиях частиц со сложной внутренней структурой [16,17]. Такие частицы состоят из диэлектрического (или металлического) ядра, окруженного металлической оболочкой, что, естественно, сказывается на оптических свойствах этих частиц. Важность рассмотрения частиц со сложной внутренней структурой, в частности, отмечается в работе [18].

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов проводимости в неоднородной вытянутой цилиндрической частице (металлическая частица с ядром из другого металла) на переменное электрическое поле плоской электромагнитной волны. По найденной функции распределения удается рассчитать зависимость сечения поглощения от радиуса частицы и частоты, а также от отношения радиуса ядра к радиусу частицы. Отдельно рассмотрен важный случай низких частот внешнего поля и частот объемных столкновений электронов в ядре и оболочке.

2. Математическая модель и расчет

Рассматривается цилиндрическая частица длины L, состоящая из диэлектрического ядра радиуса R_1, окруженного оболочкой из немагнитного металла радиуса R_2 (считаем, что $L \gg R_2$), помещенная в поле плоской электромагнитной волны частоты ω, которая по порядку величины много меньше частоты плазменного резонанса ω_p в металлах ($\omega_p \sim 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}$). Принимается, что направление электрического поля в электромагнитной волне совпадает с осью биметаллического цилиндра. Частица считается малой, что означает $R_2 \ll 2\pi c/\omega$ (c — скорость света в вакууме). Неоднородность внешнего поля волны и скин-эффект не учитываются (предполагается, что $R_2 < \delta$; δ — глубина скин-слоя). В рассматриваемом диапазоне частот при данной ориентации электрического поля вклад токов дипольной электрической поляризации доминирует по сравнению с вкладом вихревых токов, которые индуцируются внешним магнитным полем волны [3]. Поэтому действие внешнего магнитного поля волны не учитывается.

Для достаточно длинного цилиндра электрическое поле волны в большей части объема цилиндра остается неэкранированным. Для оценки параметров, при которых осуществляется этот режим, рассмотрим известное решение для вытянутого эллипсоида в электрическом поле [19]. Мы исходим из того, что достаточно длинный цилиндр можно аппроксимировать вытянутым эллипсоидом. Для этого воспользуемся результатами работы [19], в которой рассчитана напряженность электрического поля внутри вытянутого эллипсоида вращения с полуосями a, b, d ($a > b = d$) (фактически, бесконечного цилиндра), помещенного во внешнее однородное электрическое поле, направленное вдоль оси симметрии эллипсоида,

$$E_{\mathrm{int}} = \frac{E_{\mathrm{ext}}}{1 + (\varepsilon_{\mathrm{int}} - 1)n(\mathrm{e})},$$

$$n(\mathrm{e}) = \frac{1 - \mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}^3}\left[\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}\right) - 2\mathrm{e}\right],$$

где E_{ext} — напряженность внешнего электрического поля, E_{int} — напряженность электрического поля в эллипсоиде, $\varepsilon_{\mathrm{int}}$ — диэлектрическая проницаемость эллипсоида, $n(\mathrm{e})$ — коэффициент, являющийся функцией эксцентриситета эллипсоида e ($\mathrm{e} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$). Если отсутствует экранировка, $E_{\mathrm{int}} \approx E_{\mathrm{ext}}$ и, следовательно, $1 + (\varepsilon_{\mathrm{int}} - 1)n(\mathrm{e}) \approx 1$, что возможно при $|\varepsilon_{\mathrm{int}} n(\mathrm{e})| \ll 1$ (единицей, стоящей в скобках, можно пренебречь, так как диэлектрическая проницаемость металлов очень велика).

Далее, воспользовавшись формулами Друде для частотной зависимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и проводимости металла $\Sigma(\omega)$ [20] (мы считаем, что частота внешнего поля мала по сравнению с частотой объемных столкновений электронов внутри частицы, т.е. $\omega\tau \ll 1$)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i\bigl(4\pi\Sigma(\omega)/\omega\bigr), \quad \Sigma(\omega) = \Sigma(0)/(1 - i\omega\tau),$$

$$\Sigma(0) = e^2 n\tau/m,$$

где e и m — заряд и эффективная масса электрона в металле, n — концентрация электронов проводимости, τ — электронное время релаксации, а также определением эксцентриситета (полуоси b и a, если рассматривать вытянутый эллипсоид как бесконечный цилиндр, отождествляются с радиусом и полудлиной цилиндра: $b = R$, $a = L/2$; в случае вытянутого цилиндра $\mathrm{e} \to 1$), получаем методом последовательных приближений искомое предельное соотношение между радиусом и длиной частицы ($\Gamma = R/L$)

$$\Gamma \ll \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\Sigma(0)}} \Bigg/ \sqrt{\ln\left(\frac{4\pi\Sigma(0)}{\omega}\right)}.$$

Также в работе используются общепринятые физические допущения: электроны проводимости в металлической оболочке и ядре частицы рассматриваются как вырожденный Ферми-газ; описывается их отклик на внешнее переменное электрическое поле с помощью уравнения Больцмана в приближении времени релаксации. В граничных условиях принято, что отражение электронов от поверхностей металлической оболочки и поверхности металлического ядра носит диффузный характер.

Процесс поглощения энергии электромагнитной волны биметаллической цилиндрической частицей можно описать следующим образом: однородное периодическое по времени электрическое поле волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \tag{1}$$

воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (начало координат выбирается на оси частицы), $\mathbf{v}$ — скорость электрона.

Это приводит к возникновению высокочастотного тока

$$\mathbf{j} = e\int \mathbf{v} f\, \frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2e\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \mathbf{v} f_1\, d^3v, \tag{2}$$

где h — постоянная Планка, а также к диссипации в объеме частицы энергии. Энергия $\overline{Q}$, диссипируемая в единицу времени, равна [19]

$$\overline{Q} = \int \overline{(\mathrm{Re}\,\mathbf{E})(\mathrm{Re}\,\mathbf{j})}\, d^3r = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int \mathbf{j}\mathbf{E}^* d^3r. \tag{3}$$

Здесь черта обозначает усреднение по времени, а звездочка — комплексное сопряжение.

В (2) используется стандартная нормировка функции распределения f, при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$. Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [20]

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_f, \\ 0, & \varepsilon_f < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon_f = mv_f^2/2$ — энергия Ферми (v_f — скорость Ферми). Предполагается, что Ферми-поверхность имеет сферическую форму.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной f_0, возникающего под действием поля (1). В линейном приближении по внешнему полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [2,20]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}\,\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{vE})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \tag{4}$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ($f_1 \sim \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации

$$(df_1/dt)_s = -\frac{f_1}{\tau}.$$

Решая уравнение (4) методом характеристик [21], получаем

$$f_1 = A\big(\exp(-\nu t') - 1\big)/\nu, \qquad t' \ge 0, \tag{5}$$

где

$$\nu = 1/\tau - i\omega, \qquad A = e(\mathbf{vE})\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \tag{6}$$

причем ν и A постоянны вдоль траектории (характеристики). Параметр t' в (5) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$.

Будем считать, что электроны не проникают из одного металла в другой и что в оболочке и ядре частицы электрона обладают различными скоростями Ферми (v_f и u_f). Кроме того, в общем случае оболочке и ядру частицы приписывают различные времена релаксации (τ_1 и τ_2), а значит, и различные комплексные частоты рассеяния электронов (ν_1 и ν_2).

Для однозначного определения функции f_1 необходимо задать для нее граничные условия на цилиндрических поверхностях металлической оболочки и металлического ядра частицы. В качестве таковых принимаем условия диффузного отражения электронов от этих поверхностей [2]. Поскольку электроны, находящиеся в ядре частицы, могут отражаться от его границы (R_1), а электроны, находящиеся в оболочке частицы, могут отражаться от внутренней границы (R_1) и от внешней границы (R_2) металлического слоя, необходимо записать три граничных условия:

$$f_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R_1, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$f_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R_1, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$f_{13}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R_2, \\ \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$ — соответственно компоненты радиус-вектора электрона $\mathbf{r}$ и его скорости $\mathbf{v}$ в плоскости, перпендикулярной оси неоднородного цилиндра.

При отражении электронов, находящихся в ядре частицы, от границы ядра (R_1) параметр t' в выражении (5) определяется как

$$t_1 = \Big\{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + \big[(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_1^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\big]^{1/2}\Big\} \Big/ v_\perp^2. \tag{10}$$

При отражении электрона от внутренней границы (R_1) металлической оболочки частицы параметр t' в (5) определяется как

$$t_2 = \Big\{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp - \big[(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_1^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\big]^{1/2}\Big\} \Big/ v_\perp^2, \tag{11}$$

а при отражении электрона от внешней границы (R_2) металлической оболочки — как

$$t_3 = \Big\{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + \big[(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_2^2 - r_\perp^2)v_\perp^2\big]^{1/2}\Big\} \Big/ v_\perp^2. \tag{12}$$

Это ясно из следующих геометрических соображений. Используя очевидное векторное равенство $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t'$ (где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор электрона в момент отражения от любой из поверхностей внутри цилиндрической частицы) и проектируя его на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, имеем $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_{0\perp} + \mathbf{v}_\perp t'$, где векторы $\mathbf{r}_\perp$, $\mathbf{r}_{0\perp}$ и $\mathbf{v}_\perp$ являются компонентами исходных векторов в плоскости проекции. Возводя обе части последнего равенства в квадрат и разрешив полученное уравнение относительно параметра t', можно получить выражения (10), (11) или (12).

Поэтому уравнение (4) имеет три различных решения в зависимости от места отражения электрона проводимости внутри цилиндрической частицы.

Соотношениями (5), (6), (10)–(12) полностью определены решения f_{11}, f_{12} и f_{13} уравнения (4) с граничными условиями (7)–(9), что позволяет рассчитать ток (2) и диссипируемую мощность (3).

При вычислении интегралов (2), (3) удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат ($r_\perp$, φ, z; полярная ось — ось Z; вектор $\mathbf{E}_0$ параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей ($v_\perp$, α, v_z; полярная ось — ось v_z). Ось цилиндра совпадает с осью Z. Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z-компоненту

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z, \qquad E_z = E_0 \exp(-i\omega t). \tag{13}$$

Соответственно и токи (2) в ядре и оболочке частицы обладают лишь z-компонентой (линии тока являются прямыми, параллельными оси Z)

$$j_{z1} = \frac{3ne^2}{4\pi u_f^3} \frac{E_z}{\nu_1} \int v_z^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f)(1 - \exp(-\nu_1 t')) d^3 v, \quad (14)$$

$$j_{z2} = \frac{3ne^2}{4\pi v_f^3} \frac{E_z}{\nu_2} \int v_z^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_f)(1 - \exp(-\nu_2 t')) d^3 v. \quad (15)$$

Здесь мы учли, что концентрации электронов проводимости в металлах, из которых состоит цилиндрическая частица, определяются как

$$n_1 = 2\Big(\frac{m}{h}\Big)^3 \int f_0 \, d^3 v = 2\Big(\frac{m}{h}\Big)^3 \frac{4}{3} \pi u_f^3,$$

$$n_2 = 2\Big(\frac{m}{h}\Big)^3 \int f_0 \, d^3 v = 2\Big(\frac{m}{h}\Big)^3 \frac{4}{3} \pi v_f^3.$$

При интегрировании выражений (14) и (15) следует иметь в виду, что место отражения электронов внутри частицы определяется углом α $(0 < \alpha < 2\pi)$ в пространстве скоростей.

Для электронов внутри ядра $\alpha = 0{-}2\pi$. Под функцией f_1 в этом случае понимается $f_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ $(t' = t_1)$.

Для электронов внутри металлической оболочки частицы можно выделить три области.

1) Если выполняется неравенство $\alpha_0 \le \alpha \le \pi - \alpha_0$, где угол α_0 определяется выражением

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{r_\perp^2 - R_1^2}}{r_\perp}\right), \quad (16)$$

то траектория электрона не пересекается с ядром и он претерпевает отражение от внешней границы металлического слоя частицы. Под функцией f_1 в этом случае понимается $f_{13}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ $(t' = t_3)$.

2) Если $\pi - \alpha_0 < \alpha \le \pi$, то электроны движутся к ядру частицы, и под функцией f_1 снова понимается $f_{13}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ $(t' = t_3)$.

3) Наконец, если $0 < \alpha \le \alpha_0$, то электроны движутся от ядра частицы, а под функцией f_1 понимается $f_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ $(t' = t_2)$.

Легко заметить, что в первых двух случаях интегралы можно объединить.

Сечение поглощения электромагнитного излучения σ находим, разделив среднюю диссипируемую мощность $\overline{Q}$ (см. (3)) на средний поток энергии в волне $cE_0^2/8\pi$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{8\pi}{cE_0^2} \operatorname{Re}\left\{ \int j_z E_z^* \, d^3 r \right\},$$

или, учитывая (14) и (15), после несложных преобразований получаем

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (17)$$

где

$$\sigma_1 = \operatorname{Re}\left\{ \frac{24\pi n_1 e^2 L}{mc u_f^3 \nu_1} \int_0^{R_1} r_\perp \, dr_\perp \times \int_0^{u_f} \int_0^{\pi} v_\perp \sqrt{u_f^2 - v_\perp^2} (1 - \exp(-\nu_1 t_1)) dv_\perp \, d\alpha \right\}, \quad (18)$$

$$\sigma_2 = \operatorname{Re}\left\{ \frac{24\pi n_2 e^2 L}{mc v_f^3 \nu_2} \int_{R_1}^{R_2} r_\perp \, dr_\perp \times \int_0^{v_f} \int_0^{\alpha_0} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} (1 - \exp(-\nu_2 t_2)) dv_\perp \, d\alpha \right\}, \quad (19)$$

$$\sigma_3 = \operatorname{Re}\left\{ \frac{24\pi n_2 e^2 L}{mc v_f^3 \nu_2} \int_{R_1}^{R_2} r_\perp \, dr_\perp \times \int_0^{v_f} \int_{\alpha_0}^{\pi} v_\perp \sqrt{v_f^2 - v_\perp^2} (1 - \exp(-\nu_2 t_3)) dv_\perp \, d\alpha \right\}. \quad (20)$$

(Движение электронов симметрично относительно любой диаметральной плоскости, в которой лежит точка их положения на траектории, поэтому можно считать, что угол α в пространстве скоростей изменяется от 0 до π, и удваивать результат интегрирования по этой переменной).

Введем новые переменные

$$\xi = \frac{r_\perp}{R_2}, \qquad \rho = \frac{v_\perp}{v_f},$$

$$z = \nu_2 \frac{R_2}{v_f} = \Big(\frac{1}{\tau_2} - i\omega\Big)\frac{R_2}{v_f} = x - iy,$$

$$\kappa = \frac{R_1}{R_2}, \quad \gamma = \frac{u_f}{v_f}, \quad \delta = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Здесь $x = R_2/\tau v_f$ — отношение радиуса частицы R_2 к длине свободного пробега электронов Λ, $y = R_2\omega/v_f$ — отношение частоты внешнего поля ω к частоте рассеяния электронов на поверхности частицы v_f/R_2. Например, для частицы с оболочкой из алюминия ($v_f = 2.02 \cdot 10^6$ m/s), когда $R_2 = 10$ nm, безразмерной частоте $y = 3$ соответствует круговая частота внешнего поля $\omega = y v_f/R_2 \approx 0.6 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$.

Затем преобразуем формулы (10)–(12) и (16)

$$t_1 = \frac{R_2}{v_\perp}\mu, \quad \mu = \xi\cos\alpha + \sqrt{\kappa^2 - \xi^2 \sin^2\alpha},$$

$$t_2 = \frac{R_2}{v_\perp}\psi, \quad \psi = \xi\cos\alpha - \sqrt{\kappa^2 - \xi^2 \sin^2\alpha},$$

$$t_3 = \frac{R_2}{v_\perp}\eta, \quad \eta = \xi\cos\alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2\alpha},$$

$$\alpha_0 = \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\xi^2}}\right).$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp = r_\perp v_\perp \cos\alpha$ (все электроны на поверхности Ферми внутри металлического ядра частицы движутся со скоростями, равными u_f, а все электроны на поверхности Ферми внутри металлического слоя частицы движутся со скоростями, равными v_f).

Выражая характеристики металлического ядра частицы (ν_1 и n_1) через характеристики металлической оболочки частицы ($\nu_2 = \nu$, $n_2 = n$, $\tau_2 = \tau$), имеем

$$\nu_1 = \nu + \frac{1-\delta}{\delta\tau} = \left(\frac{x}{\delta} - iy\right)\frac{v_f}{R_2} = z'\,\frac{v_f}{R_2},$$

$$n_1 = n\gamma^3.$$

Тогда формулы (18)–(20) принимают следующий вид:

$$\sigma_1 = \mathrm{Re}\left\{\frac{24\pi n e^2 R_2^3 L}{m c v_f}\int\limits_0^{\kappa}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{\pi}\rho\sqrt{\gamma^2-\rho^2}\;\frac{(1-\exp(-z'\mu/\rho))}{z'}\,d\rho\,d\alpha\right\},$$

$$\sigma_2 = \mathrm{Re}\left\{\frac{24\pi n e^2 R_2^3 L}{m c v_f}\int\limits_{\kappa}^{1}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\alpha_0}\rho\sqrt{1-\rho^2}\;\frac{(1-\exp(-z\psi/\rho))}{z}\,d\rho\,d\alpha\right\},$$

$$\sigma_3 = \mathrm{Re}\left\{\frac{24\pi n e^2 R_2^3 L}{m c v_f}\int\limits_{\kappa}^{1}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{1}\int\limits_{\alpha_0}^{\pi}\rho\sqrt{1-\rho^2}\;\frac{(1-\exp(-z\eta/\rho))}{z}\,d\rho\,d\alpha\right\}.$$

Сечение поглощения (17) представим в виде

$$\sigma = \sigma_0(F_1 + F_2 + F_3),$$

где

$$\sigma_0 = \frac{24\pi n e^2 R_2^3 L}{m c v_f}, \tag{21}$$

$$F_1 = \mathrm{Re}\left\{\int\limits_0^{\kappa}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{\pi}\rho\sqrt{\gamma^2-\rho^2}\,\frac{(1-\exp(-z'\mu/\rho))}{z'}\,d\rho\,d\alpha\right\}, \tag{22}$$

$$F_2 = \mathrm{Re}\left\{\int\limits_{\kappa}^{1}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\alpha_0}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\frac{(1-\exp(-z\psi/\rho))}{z}\,d\rho\,d\alpha\right\}, \tag{23}$$

$$F_3 = \mathrm{Re}\left\{\int\limits_{\kappa}^{1}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{1}\int\limits_{\alpha_0}^{\pi}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\frac{(1-\exp(-z\eta/\rho))}{z}\,d\rho\,d\alpha\right\}. \tag{24}$$

Формулы (22)–(24) позволяют рассчитать безразмерное сечение поглощения биметаллической цилиндрической частицы

$$F(x,y,\kappa,\gamma,\delta) = F_1(x,y,\kappa,\gamma,\delta) + F_2(x,y,\kappa,\gamma,\delta)$$
$$+ F_3(x,y,\kappa,\gamma,\delta) \tag{25}$$

и сечение поглощения электромагнитного излучения

$$\sigma = \sigma_0 F(x,y,\kappa,\gamma,\delta). \tag{26}$$

Когда $\kappa = 0$ или 1 (так как частица однородная, $\gamma = 1$ и $\delta = 1$), из (25) следует, что

$$F(x,y) = \mathrm{Re}\left\{\int\limits_0^{1}\xi\,d\xi \right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\pi}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\frac{(1-\exp(-z\eta/\rho))}{z}\,d\rho\,d\alpha\right\}.$$

Это выражение совпадает с результатом для электрического поглощения однородной вытянутой цилиндрической частицы из металла.

Отдельно можно выделить случай сложной частицы из одного вещества ($\gamma = 1$, $\delta = 1$), когда оболочка и ядро частицы разделены бесконечно тонким слоем диэлектрика. В этом случае дополнительное рассеяние электронов на поверхности, разделяющей ядро и оболочку, приводит к отличию физических свойств такой частицы от свойств однородной цилиндрической частицы из металла. Случай $\gamma = 0$ соответствует частице с диэлектрическим ядром.

Численный расчет $F(x,y,\kappa,\gamma,\delta)$ представлен на рис. 1–4 (для упрощения анализа полученных результатов все рисунки выполнены в предположении $\tau_1 = \tau_2$).

3. Поглощение в низкочастотном и высокочастотном режимах

Подробно остановимся на случае, когда частота внешнего поля ω и частота столкновений электронов в объеме металла $(1/\tau)$ низки по сравнению с чатотой столкновения электронов с цилиндрическими поверхностями внутри частицы. Другими словами, рассмотрим случай $|z| \ll 1$.

Экспоненты, входящие в выражения (22)–(24), можно в этом случае разложить по известной формуле Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами разложения. В результате чего получаем

$$F_1 = \int\limits_0^{\kappa}\xi\,d\xi$$
$$\times\int\limits_0^{\gamma}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{\gamma^2-\rho^2}\Big(\xi\cos\alpha + \sqrt{\kappa^2-\xi^2\sin^2\alpha}\Big)d\rho\,d\alpha,$$

$$F_2 = \int_{\kappa}^{1} \xi\, d\xi$$

$$\times \int_0^1 \int_0^{\alpha_0} \sqrt{1-\rho^2}\Big(\xi\cos\alpha - \sqrt{\kappa^2 - \xi^2 \sin^2\alpha}\Big) d\rho\, d\alpha,$$

$$F_3 = \int_{\kappa}^{1} \xi\, d\xi$$

$$\times \int_0^1 \int_{\alpha_0}^{\pi} \sqrt{1-\rho^2}\Big(\xi\cos\alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2\alpha}\Big) d\rho\, d\alpha.$$

Полученные выражения удается рассчитать аналитически. Далее приводится готовый результат

$$F_1 = \frac{\pi}{3}\,\gamma^2\kappa^3,$$

$$F_2 = \frac{\pi}{4}\bigg[\frac{1}{2}\,\kappa(1-\kappa^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{1-\kappa}^{\sqrt{1-\kappa^2}} \sqrt{2\kappa^2 - \kappa^4 - 1 - \psi^4 + 2\psi^2(1+\kappa^2)}\, d\psi\bigg],$$

$$F_3 = \frac{\pi}{4}\bigg[\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\,\kappa + \frac{1}{6}\,\kappa^3$$

$$-\frac{1}{2}\int_{1-\kappa}^{\sqrt{1-\kappa^2}} \sqrt{2\kappa^2 - \kappa^4 - 1 - \eta^4 + 2\eta^2(1+\kappa^2)}\, d\eta\bigg].$$

Тогда для расчета сечения поглощения получаем следующую формулу:

$$\sigma = \sigma_0\,\frac{\pi}{4}\bigg[\frac{4}{3} - \kappa - \frac{1}{3}\,\kappa^3 + \frac{4}{3}\,\gamma^2\kappa^3$$

$$-\int_{1-\kappa}^{\sqrt{1-\kappa^2}} \sqrt{2\kappa^2-\kappa^4-1-\eta^4 + 2\eta^2(1+\kappa^2)}\, d\eta\bigg]. \quad (27)$$

Рассмотрим возможные предельные случаи.

a) Если внутри частицы имеется металлическое ядро, радиус которого во много раз меньше радиуса частицы, т.е. когда $\kappa \ll 1$, можно найти поправку к поглощению, отбросив в (27) одно слагаемое, пропорциональное κ^3 (вклад интеграла пренебрежимо мал),

$$\sigma \approx \sigma_0\,\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\,\kappa + \gamma^2\kappa^3\right). \quad (28)$$

В случае металлической частицы без ядра $(\kappa \to 0)$ из (28) следует, что

$$\sigma = \frac{8\pi^2 n e^2 R_2^3 L}{m c v_f}.$$

Это выражение совпадает с результатом для низкочастотного электрического поглощения однородной вытянутой цилиндрической частицы из металла.

b) В случае тонкой металлической оболочки, когда $\kappa \to 1$, для нахождения поправки к поглощению по формуле (27) необходимо выполнить разложение в ряд по параметру $(1-\kappa) \ll 1$. Сечение поглощения определяется в этом случае как

$$\sigma \approx \sigma_0\,\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{6(1-\kappa)} + \gamma^2\Big(4\kappa - \frac{8}{3}\Big)\right].$$

В случае металлической частицы без ядра $(\kappa = 1)$ (так как частица однородная, $\gamma = 1$) из (27) с учетом (21) снова получается выражение, совпадающее с результатом для низкочастотного поглощения однородной цилиндрической частицы.

В случае, когда $|z| \gg 1$, существует асимптотика выражения (25). Пренебрегая членами с экспонентами ввиду их быстрого затухания и выполнив алгебраические преобразования, приходим к следующему выражению для безразмерного сечения поглощения $F(z)$:

$$F(z) = \mathrm{Re}\bigg\{\frac{1}{z'}\int_0^{\kappa} \xi\, d\xi \int_0^{\gamma}\int_0^{\pi} \rho\,\sqrt{\gamma^2-\rho^2}\, d\rho\, d\alpha$$

$$+\frac{1}{z}\int_{\kappa}^{1} \xi\, d\xi \int_0^1\int_0^{\pi} \rho\,\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho\, d\alpha\bigg\}.$$

Это выражение легко интегрируется

$$F(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z'(x,y)}\,\frac{\pi}{6}\,\gamma^3\kappa^2 + \frac{1}{z(x,y)}\,\frac{\pi}{6}\,(1-\kappa^2)\right\}.$$

В результате проведенных преобразований получаем следующее выражение для сечения поглощения (26):

$$\sigma(z) = \sigma_0\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z'(x,y)}\,\frac{\pi}{6}\,\gamma^3\kappa^2 + \frac{1}{z(x,y)}\,\frac{\pi}{6}\,(1-\kappa^2)\right\}$$

$$= \sigma_0\,\frac{\pi}{6}\left\{\frac{\gamma^3\delta x}{x^2+y^2\delta^2}\,\kappa^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\,(1-\kappa^2)\right\}. \quad (29)$$

В случае металлической частицы без ядра ($\kappa = 0$ или 1) это выражение соответствует классическому результату (формула Друде) [20] для однородной цилиндрической частицы из металла

$$\sigma(z) = \sigma_0\,\frac{\pi}{6}\,\frac{x}{x^2+y^2}.$$

В случае тонкой металлической оболочки, когда $\kappa \to 1$, для нахождения поправки к поглощению по формуле (29) удобно сделать подстановку $\kappa = 1 - \varepsilon$, где ε — малая величина $(\varepsilon \to 0)$, а также воспользоваться формулами приближенного вычисления.

Действительно, поскольку $1-\kappa^2 = 1-(1-\varepsilon)^2 \approx 1-(1-2\varepsilon) = 2\varepsilon = 2(1-\kappa)$, а $\kappa^2 = (1-\varepsilon)^2 \approx 1-2\varepsilon = 1-2(1-\kappa) = 2\kappa - 1$, сечение поглощения определяется в этом случае по формуле

$$\sigma \approx \sigma_0\,\frac{\pi}{3}\left\{\frac{\gamma^3\delta x}{x^2+y^2\delta^2}\Big(\kappa - \frac{1}{2}\Big) + \frac{x}{x^2+y^2}\,(1-\kappa)\right\}.$$

4. Анализ результатов

Безразмерное сечение поглощения F зависит от комбинации четырех безразмерных величин: x, y, κ и γ (величина δ на поведение безразмерного сечения поглощения F влияет слабо). Учет того обстоятельства, что в вытянутой цилиндрической частице (напомним, что $L \gg R_2$) есть металлическое ядро, естественно, приводит к результатам, отличающимся от результатов для однородной вытянутой цилиндрической частицы.

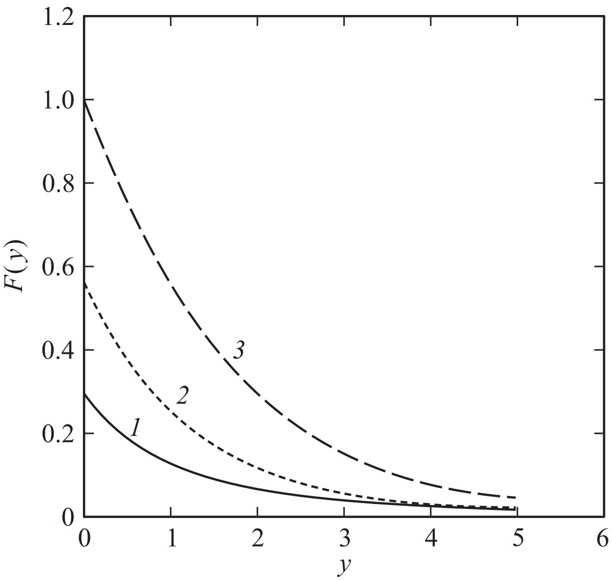

Рис. 1. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты $y = R_2\omega/v_f$ (ω — угловая частота внешнего поля, v_f — скорость Ферми электронов в оболочке частицы). $x = 0$, $\kappa = 0.7$. $\gamma = 0.5$ (*1*), 1 (*2*) и 1.5 (*3*).

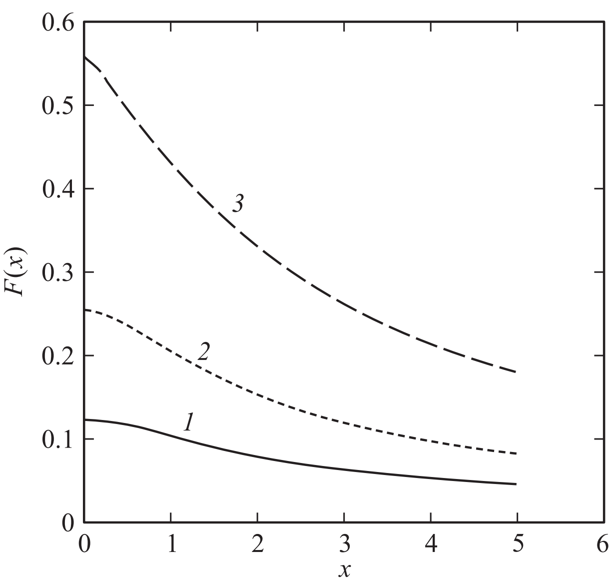

Рис. 2. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x = R_2/\tau_2 v_f$ (τ_2 — электронное время релаксации оболочки). $y = 1$, $\kappa = 0.7$. $\gamma = 0.5$ (*1*), 1 (*2*) и 1.5 (*3*).

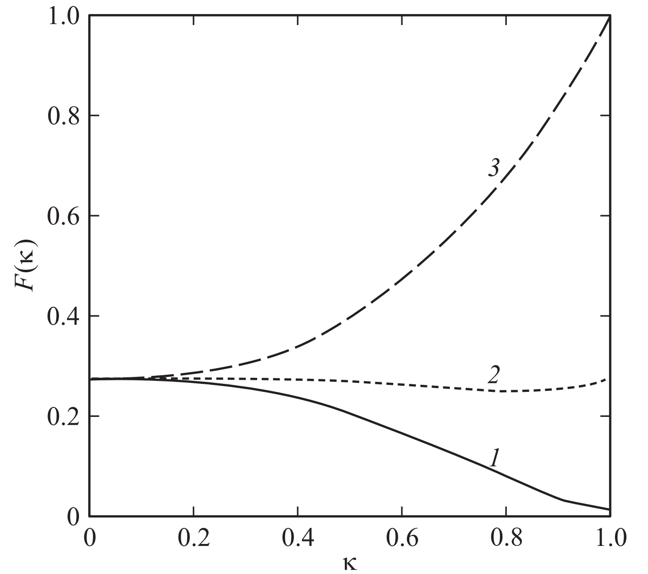

Рис. 3. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от отношения радиуса ядра к радиусу частицы $\kappa = R_1/R_2$. $y = 1$, $x = 0$. $\gamma = 0.5$ (*1*), 1 (*2*) и 1.5 (*3*).

Это связано с тем, что кроме поверхностного рассеяния электронов внутри цилиндрической оболочки частицы появляется дополнительное поверхностное рассеяние электронов внутри ядра.

На рис. 1 представлены зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной частоты внешнего поля y. Этот рисунок соответствует случаю фиксированных безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и отношения радиуса ядра к радиусу частицы κ, при этом отношение скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы γ разное для каждой кривой. Из анализа хода кривых следует, что на всех частотах безразмерное сечение поглощения доминирует по величине для частиц, у которых максимально отношение скоростей Ферми в ядре и оболочке. При больших безразмерных частотах внешнего поля ($y > 5$) все три зависимости сливаются, так как имеет место макроскопическая асимптотика.

На рис. 2 приведены графики зависимости безразмерного сечения поглощения F от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x. Если постоянны безразмерная частота внешнего поля y и отношение радиуса ядра к радиусу частицы κ, то при любых x безразмерное сечение поглощения доминирует по величине для частиц с наибольшим отношением скоростей Ферми в ядре и оболочке γ.

Для анализа зависимости безразмерного сечения поглощения F от отношения радиуса ядра к радиусу частицы κ воспользуемся рис. 3. Этот рисунок показывает, что при малых значениях κ ($\kappa < 0.2$) безразмерное сечение поглощения слабо зависит от отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы γ. Если значения κ велики ($\kappa > 0.2$), изменение отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке заметно сказывается на поведение величины F.

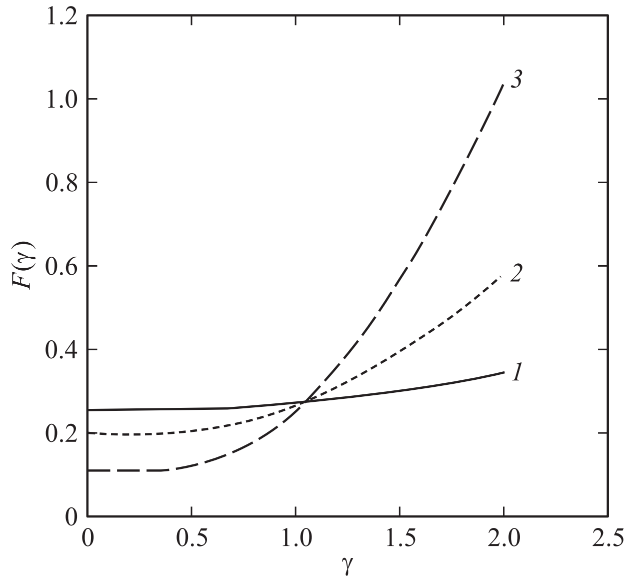

Рис. 4. Зависимость безразмерного сечения поглощения F от отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы $\gamma = u_f/v_f$. $y = 1$, $x = 0$, $\kappa = 0.3$ (*1*), 0.5 (*2*) и 0.7 (*3*).

На рис. 4 отображена зависимость безразмерного сечения поглощения F от отношения скоростей Ферми в ядре и оболочке частицы γ в случае разных отношений радиуса ядра к радиусу частицы κ (считается, что у всех частиц одинакова безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x и что частицы находятся во внешнем электромагнитном поле некоторой фиксированной частоты). Из рисунка видно, что, если скорость Ферми электронов в оболочке частицы превосходит скорость Ферми электронов в ее ядре ($\gamma < 1$), величина F больше для частицы, у которой минимален объем ядра (меньше κ). Если же скорость Ферми электронов в ядре превосходит скорость Ферми электронов в оболочке ($\gamma > 1$), то безразмерное сечение поглощения F больше для частицы, у которой объем ядра максимален (больше κ).

Список литературы

[1] Ю.И. Петров. Физика малых частиц. Наука, М. (1984).
[2] Дж. Займан. Электроны и фононы. М. (1962).
[3] А.Г. Лесскис, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖЭТФ **83**, *1*, 310 (1982).
[4] А.Г. Лесскис, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. Поверхность *11*, 115 (1987).
[5] H.J. Trodahl. Phys. Rev. B **19**, 1316 (1979).
[6] H.J. Trodahl. J. Phys. C: Sol. State Phys. **15**, 7245 (1982).
[7] Е.А. Бондарь. Опт. и спектр. **75**, *4*, 837 (1993).
[8] Е.А. Бондарь. Опт. и спектр. **80**, *1*, 89 (1996).
[9] П.М. Томчук, Б.П. Томчук. ЖЭТФ **112**, *2*, 661 (1997).
[10] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖТФ **71**, *11*, 114 (2001).
[11] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. Опт. и спектр. **92**, *5*, 851 (2002).
[12] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖТФ **73**, *3*, 16 (2003).
[13] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖЭТФ **124**, *5*, 1112 (2003).
[14] R.J. Kubo. Phys. Soc. Jap. **17**, 975 (1962).
[15] Э.А. Маныкин, П.П. Полуэктов, Ю.Г. Рубежный. ЖЭТФ **70**, *6*, 2117 (1976).
[16] R.D. Averitt, S.L. Westcott, N.J.J. Halas. J. Opt. Soc. Am. B **16**, *10*, 1824 (1999).
[17] A. Henglein. J. Phys. Chem. B **104**, *10*, 2201 (2000).
[18] А.И. Сидоров. Опт. журн. **70**, *2*, 9 (2003).
[19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1992).
[20] У. Харрисон. Теория твердого тела. Мир, М. (1972).
[21] Р. Курант. Уравнения с частными производными. Мир, М. (1962).