Физика твердого тела, 1997, том 39, № 7

Эффекты несоизмеримости в решеточной модели Гинзбурга–Ландау

© Е.С. Бабаев, С.А. Ктиторов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 28 ноября 1996 г.)

Рассмотрено влияние магнитной трансляционной симметрии на вихревую структуру в сверхпроводящих кристаллах с большим базисом или в искусственной джозефсоновской среде (регулярная решетка сверхпроводящих кластеров), изготовляемой на базе опалов. Решеточная модель Гинзбурга–Ландау с внешним магнитным полем, величина которого меньше верхнего критического поля, сведена к двумерной, в некоторых случаях точно решаемой модели Френкеля–Конторовой, причем кристаллическая решетка играет роль "жесткой подрешетки", в то время как деформированная вихревая решетка — роль "мягкой подрешетки". Показано, что статические волны сдвиговой деформации вихревой решетки являются решениями двумерных уравнений Sine-Gordon с дополнительным условием несжимаемости, вытекающим из квантования потока. Получена зависимость энергии пиннинга от величины магнитного поля, близости к линии перехода и постоянной решетки кристалла.

Решеточная модель Гинзбурга–Ландау (РМГЛ) была предложена [1] для решения известной проблемы неперенормируемости флуктуационной теории сверхпроводников второго рода [2]. С другой стороны, большое число работ посвящено исследованию сложной структуры вихревой решетки высокотемпературных сверхпроводников вблизи верхнего критического поля. Цель нашего подхода к описанию решетки вихрей с помощью РМГЛ — исследование влияния кристаллической решетки сверхпроводящего кристалла с большой постоянной решетки на структуру возникающей вихревой решетки. Как показано далее, в данной модели решетка Абрикосова представляет собой двумерную систему Френкеля–Конторовой [3]. Аналогия нашего подхода с подходом в теории несоизмеримых эпитаксиальных моноатомных слоев на подложке, основанной на модели Френкеля–Конторовой, состоит в следующем: в качестве пробной функции при минимизации свободной энергии в РМГЛ мы используем совокупность зародышей сверхпроводящей фазы, являющихся решением континуальной модели Гинзбурга–Ландау. Они играют роль "адатомов", которые считаются недеформируемыми, но положения которых могут отличаться от положений в идеальной решетке Абрикосова. Как и в модели Френкеля–Конторовой, упругость этой "мягкой подрешетки" может быть найдена без учета влияния дискретности "жесткой подрешетки"; роль последней в данном случае играет кристаллическая решетка кристалла с большим базисом или искусственная периодическая структура. Энергия решеточного пиннинга вычисляется для одного "адатома" — зародыша.

Двумерные системы этого класса последнее время вызывали повышенный интерес. Так, в частности, монослои атомов на подложке трехмерного кристалла-носителя являются одним из самых популярных объектов исследования, в которых реализуется данная ситуация; также можно упомянуть решетки цилиндрических магнитных доменов, пленки Ленгмюра–Блодже, межфазовые и межзеренные границы, кристаллы с волнами зарядовой плотности и т.д.

Теория несоизмеримых структур достигла, однако, наибольших успехов для одномерного случая (см., например, [4,5]). В двумерном же случае теория сталкивается с трудностями в нахождении достаточно простых уравнений, описывающих возникающие в "мягкой подрешетке" сверхструктуры. Покровский и Талапов [6,7] рассмотрели в двумерном случае решения с несоизмеримостью в одном направлении. Современное состояние исследований в этой области систематизировано в [8].

Особенности предложенной нами системы, как показано далее, позволяют получить систему двух уравнений Sine-Gordon, которые описывают возможные периодические сверхструктуры в вихревой решетке или же в случае, когда влияние кристаллической решетки мало, возникающий в решетке вихрей "муар".

1. Решеточная модель Гинзбурга–Ландау

Свободная энергия в РМГЛ имеет вид

$$F = \sum_{nm\langle l\rangle} \frac{\alpha a^2}{2}|\psi_{nm}|^2 + \frac{\beta a^2}{4}|\psi_{nm}|^4$$
$$+ ta^2\left[2\psi_{nm}\bar{\psi}_{nm} - \left(\psi_{n+l,\,m}\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int\limits_n^{n+l}A_x dx\right)\bar{\psi}_{nm}\right)\right]$$
$$+ ta^2\left[2\psi_{nm}\bar{\psi}_{nm} - \left(\psi_{n+m,\,l}\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int\limits_m^{m+l}A_y dy\right)\bar{\psi}_{nm}\right)\right], \tag{1}$$

где $\langle l\rangle$ означает, что при суммировании l принимает значения $l = \pm$, ψ_{nm} — параметр порядка на узле nm, a — постоянная решетки, t — межузельный туннельный интеграл. В приближении сильной связи t_{ij} равно t для ближайших соседей и нулю в остальных случаях. Этот функционал был введен в [1] для описания флуктуаций около верхнего критического поля в нормальной фазе.

Континуальный функционал Гинзбурга–Ландау может быть получен из указанного выше предельным переходом к $a \to 0$ и разложением недиагонального члена и вильсоновского множителя в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием членов выше второго порядка

$$F_{\rm cont} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\alpha}{2}|\Phi|^2 + \frac{\beta}{4}|\Phi|^4 + \frac{1}{2m}\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A\right)\Phi\right|^2 \right\}, \tag{2}$$

где $m = \hbar^2/2ta^2$. Следует, однако, заметить, что переход от РМГЛ к континуальному пределу представляет собой деликатную проблему. В частности, если предварительно диагонализировать кинетический член в РМГЛ, который представляет собой оператор Харпера [9,10], учитывающий сильное магнитное поле, то после перехода к континуальному пределу возникает многокомпонентный параметр порядка, и, следовательно, имеется несколько инвариантов четвертого порядка, причем их число растет с увеличением числа компонент. Число компонент равно кратности вырождения харперовских состояний, а число инвариантов было определено в [11]. В данном случае континуальное уравнение Гинзбурга–Ландау рассматривается лишь как "источник" для генерации пробных функций, комбинация которых используется для минимизации свободной энергии в РМГЛ.

2. Пробная функция

Мы рассматриваем здесь решетку Абрикосова при магнитном поле H в окрестности H_{c2} для $H < H_{c2}$ [12,13]. Как мы упоминали, в качестве пробной функции используем решение континуального уравнения Гинзбурга–Ландау. Приближенное решение, полученное Абрикосовым для одного зародыша, помещенного в точку $(R_x,\, R_y)$ с помощью магнитной трансляции, записанное в симметричной калибровке $(\mathbf{A} = (H/2)(-y,\, x,\, 0))$, есть [12,13]

$$\psi = C \exp\frac{i(yR_x - xR_y)}{2l^2} \exp\left(-\frac{(x-R_x)^2 + (y-R_y)^2}{4l^2}\right). \tag{3}$$

Здесь

$$\frac{l}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\Phi_0}{B}} = \sqrt{\frac{hc}{eB}}$$

— магнитная длина, а

$$C = \sqrt{\left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)\left(1 - \frac{1}{2\varkappa^2}\right)}, \tag{4}$$

где

$$\varkappa^2 = \beta\frac{9m^2c^2}{16\pi e^2\hbar}$$

есть отношение глубины проникновения к длине когерентности в данном сверхпроводнике. Совокупность зародышей, транслированных операторами магнитной подгруппы, и составляет вихревую решетку непосредственно при $H < H_{c2}$. Мы положили $C = \text{const}$, что соответствует простейшему случаю квадратной решетки.

Рассмотрим решение для одного зародыша как пробную функцию для РМГЛ, чтобы вычислить вклад в свободную энергию, связанный с влиянием кристаллической решетки. Подставляя функцию (3) в уравнение (1), видим, что свободная энергия одного зародыша представляет собой совокупность тэта-функций со смещенными различным образом аргументами

$$\begin{aligned} F = a^2C^2 \Bigg\{ & \frac{\alpha}{2}P(R_x)P(R_y)\exp\left(-\frac{R_x^2+R_y^2}{2l^2}\right) \\ & + t\Bigg[-P(a-2R_x)P(ia-2R_y) \\ & \times \exp\left(-\frac{R_x^2 + (a-R_x)^2 + 2R_y^2 + 2iaR_y}{4l^2}\right) \\ & - P(a+2R_x)P(ia+2R_y) \\ & \times \exp\left(-\frac{R_x^2 + (a+R_x)^2 + 2R_y^2 - 2iaR_y}{4l^2}\right) \\ & + 2P(R_x)P(R_y)\exp\left(-\frac{R_x^2+R_y^2}{2l^2}\right)\Bigg] \\ & + t\Bigg[-P(a-2R_y)P(ia-2R_x) \\ & \times \exp\left(-\frac{R_y^2 + (a-R_y)^2 + 2R_x^2 + 2iaR_x}{4l^2}\right) \\ & - P(a+2R_y)P(ia+2R_x) \\ & \times \exp\left(-\frac{R_y^2 + (a+R_y)^2 + 2R_x^2 - 2iaR_x}{4l^2}\right) \\ & + 2P(R_y)P(R_x)\exp\left(-\frac{R_x^2+R_y^2}{2l^2}\right)\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$P(X) \equiv \theta_3\left(-i\frac{aX}{2\pi l^2}\Big| i\frac{a^2}{2\pi l^2}\right).$$

Здесь $\theta_3(v|\tau)$ — тэта-функция Якоби,

$$\theta_3(v|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(m^2\tau + 2mv)\pi i. \tag{6}$$

Применяя тождество Якоби

$$\theta_3(v/\tau| - 1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\exp\left(\frac{i\pi v^2}{\tau}\right)\theta_3(v|\tau) \tag{7}$$

и воспользовавшись следующим представлением θ_3:

$$\theta_3(v|\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n\pi v), \quad q = \exp i\pi\tau, \quad (8)$$

полагаем, что в нашем случае $l > a$, и пренебрегаем членами с $n > 1$. В этом случае можем записать (5) в виде

$$F = \pi l^2 C^2 \Big\{ \alpha \Big[1 + 2p\cos(2\pi R_x/a)\Big]\Big[1 + 2p\cos(2\pi R_y/a)\Big]$$
$$- 4t \Big[\exp(-a^2/2l^2)\Big[1 - 2p\cos(2\pi R_x/a)\Big]$$
$$\times \Big[1 + p(e^{-\pi}\cos(2\pi R_y/a) + e^{\pi}\cos(2\pi R_y/a)\Big]$$
$$- \Big[1 + 2p\cos(2\pi R_x/a)\Big]\Big[1 + 2p\cos(2\pi R_y/a)\Big]\Big]$$
$$- 4t \Big[\exp(-a^2/2l^2)\Big[1 - 2p\cos(2\pi R_y/a)\Big]$$
$$\times \Big[1 + p\Big(e^{-\pi}\cos(2\pi R_x/a) + e^{\pi}\cos(2\pi R_x/a)\Big)\Big]$$
$$- \Big[1 + 2p\cos(2\pi R_y/a)\Big]\Big[1 + 2p\cos(2\pi R_x/a)\Big]\Big]\Big\},$$
$$p = \exp(-2\pi^2 l^2/a^2). \quad (9)$$

Вычитая отсюда энергию, полученную в континуальном пределе (при $a \to 0$), получаем добавку к свободной энергии, связанную с дискретностью кристаллической решетки,

$$\Delta F = V_0\big(\cos(2\pi R_x/a) + \cos(2\pi R_y/a)\big), \quad (10)$$

где константа пиннинга V_0 равна

$$V_0 = C^2 \pi l^2 \big(2\alpha + 8t\exp(\pi)\big)\exp(-2\pi^2 l^2/a^2). \quad (11)$$

Можно переписать зависимость V_0 от H в явном виде

$$V_0 = \pi\big(2\alpha + 8t\exp(\pi)\big)\frac{hc}{eH}\left(1 - \frac{1}{2\varkappa^2}\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{H}{H_{c2}}\right)\exp(-2\pi^2 hc/a^2 eH). \quad (12)$$

Мы получили эффективный потенциал для зародыша сверхпроводящей фазы. Далее следует учесть влияние этого потенциала на вихревую решетку.

3. Влияние пиннинга на решетку Абрикосова

Вблизи H_{c2} решетка Абрикосова получается магнитными трансляциями зародыша сверхпроводящей фазы в предположении однородности магнитного поля, что с хорошей точностью обеспечивается малостью константы C. Оператор магнитной трансляции действует на волновую функцию следующим образом (магнитно-транслированная волновая функция остается собственной функцией (2) [14–16], обеспечивая тем самым трансляционную инвариантность этого функционала):

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{a})\exp\left(-i\frac{\mathbf{h}[\mathbf{a},\mathbf{r}]}{2l^2}\right), \quad (13)$$

где $\hat{T}_{\mathbf{r}}$ — оператор магнитной трансляции на вектор $\mathbf{r}$, а $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, т.е. вдоль оси z, перпендикулярной плоскости решетки. В силу некоммутативности операторов магнитных трансляций

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}\hat{T}_b = \hat{T}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}\exp\left(-i\frac{\mathbf{h}[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{2l^2}\right). \quad (14)$$

Для обеспечения однозначности волновой функции на базисные векторы решетки зародышей должны быть наложены следующие условия [13]:

$$\exp\left(-i\frac{\mathbf{h}[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{2l^2}\right) = 1, \quad (15)$$

что соответствует условию несжимаемости вихревой решетки. Однако, если учесть поправки от членов более высокого порядка к решению линеаризованного уравнения Гинзбурга–Ландау (2) [12], можно получить упругость вихревой решетки по отношению к сдвиговым деформациям. Мы же будем учитывать упругую энергию решетки Абрикосова феноменологически и рассмотрим два случая: треугольной и квадратной решеток Абрикосова.

Рассмотрим сначала квадратную решетку Абрикосова. В этом случае упругая энергия решетки Абрикосова при наличии пиннинга кристаллической решетки или искусственной периодической структуры записывается в виде

$$H_{\mathrm{q}} = \sum_{nm}\Big\{\frac{\lambda_{xxxx}}{2}\big((u_{n+1m} - u_{nm}) + (v_{nm+1} - v_{nm})\big)^2$$
$$- (\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy})(u_{n+1m} - u_{nm})(v_{nm+1} - v_{nm})$$
$$+ \frac{\lambda_{xyxy}}{2}\big[(u_{nm+1} - u_{nm})^2 + (v_{n+1m} - v_{nm})^2$$
$$+ 2(u_{nm+1} - u_{nm})(v_{n+1m} - v_{nm})\big]$$
$$+ V_0\left(\cos\frac{2\pi}{a}(nA + u_{nm}) + \cos\frac{2\pi}{a}(mA + v_{nm})\right)\Big\}, \quad (16)$$

где u_{nm} и v_{nm} — x- и y-компоненты вектора смещения "вихря nm" решетки Абрикосова, A — период решетки Абрикосова.

Переходя к континуальному пределу [4,5,8], при условии, что $A = a(1+\delta)$ (где δ — малая величина) (случай, когда $A = a((N/M) + \delta)$, можно свести к тем же уравнениям с точностью до постоянных коэффициентов [8]), получаем

$$H_q = \int \frac{dxdy}{4\pi^2\delta^2}\left\{\frac{\lambda_{xxxx}}{2}(\delta a)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-2\right)^2 - (\lambda_{xxxx}-\lambda_{xxyy})(\delta a)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}-1\right) + \frac{\lambda_{xyxy}}{2}(\delta a)^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}-1\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-1\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}-1\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-1\right)\right] + V_0(\cos u+\cos v)\right\}, \quad (17)$$

где мы считаем компоненты смещения $u = 2\pi\delta n + (2\pi/a)u_{nm}$, $v = 2\pi\delta m + (2\pi/a)v_{nm}$ непрерывными по $x = 2\pi\delta n$, $y = 2\pi\delta m$ ввиду малости δ.

Как уже отмечалось, решетка Абрикосова вблизи верхнего критического поля несжимаема, это означает, что $\lambda \to \infty$ и $(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y) = 0$. Наложив условие несжимаемости на (17), имеем

$$H_q = \int \frac{dxdy}{4\pi^2}\left\{(\lambda_{xxyy}-\lambda_{xxxx})a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}-1\right) + \frac{a^2\lambda_{xyxy}}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}-1\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-1\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-1\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-1\right)\right] + V_0(\cos u+\cos v)\right\}. \quad (18)$$

Варьируя, получаем систему уравнений равновесия

$$\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2(\lambda_{xxyy}+\lambda_{xyxy}-\lambda_{xxxx})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\lambda_{xyxy}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=V_0\sin u,$$
$$\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2(\lambda_{xxyy}+\lambda_{xyxy}-\lambda_{xxxx})\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\lambda_{xyxy}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=V_0\sin v, \quad (19)$$

где уравнения связаны условием

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (20)$$

Следует заметить, что из условия положительной определенности квадратичной формы упругой энергии можно получить следующие условия для коэффициентов:

$$\lambda_{xxxx} > 2\lambda_{xxyy}, \quad \lambda_{xyxy} > 0, \quad \lambda_{xxxx} > 0. \quad (21)$$

Таким образом, в пределех устойчивости система может быть не только эллиптической, но и гиперболической.

В случае треугольной решетки Абрикосова после варьирования получаем систему эллиптических уравнений

$$-\mu\Delta u = V_0\sin u,$$
$$-\mu\Delta v = V_0\sin v, \quad (22)$$

где первое и второе уравнения связаны условием (20).

Рассмотрим сначала гиперболический случай. Гиперболическое уравнение Sine-Gordon имеет хорошо изученные решения в виде солитонов, а также более важные для нас кноидальные решения [17]. Пусть решение для $u(x, y)$ имеет вид $u = u(x-\alpha y)$. Условие несжимаемости накладывает условие на α, т. е. на наклон фазовых фронтов в плоскости XY

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha\frac{\partial v}{\partial y}, \quad (23)$$

или

$$v(x-\alpha y) = -\frac{1}{\alpha}u(x-\alpha y). \quad (24)$$

Поскольку уравнение Sine-Gordon допускает преобразование $u \to -u$, при $\alpha = 1$ уравнение для $u(x, y)$ и $v(x, y)$ совместны. В периодическом случае имеем двоякопериодические решения для u и v. Задавая непериодическую зависимость, например, для $u(x, 0)$, можем определить дальнейшую "эволюцию" в направлении y и наоборот. Поскольку поле деформаций удовлетворяет уравнению Sine-Gordon, мы можем, как обычно, классифицировать многосолитонные решения по их топологическому заряду. Решения с нулевым топологическим зарядом оказываются невыгодными энергетически из-за наличия топологических членов в гамильтониане (18). Знак топологического члена существенно влияет на выбор решения, топологический заряд которого стремится к плюс или минус бесконечности ("пролетные" решения уравнения Sine-Gordon).

В эллиптическом случае имеется значительно меньше результатов. Наиболее детальные исследования для случая однокомпонентного топологического члена $q(\partial\varphi/\partial x)$

$$H = \int dxdy\left(\frac{1}{2}\{(\partial_x\varphi)^2+(\partial_y\varphi)^2\}+(1-\cos\varphi)+q\partial_x\varphi\right) \quad (25)$$

можно найти в работе [18]. В случае двухкомпонентного топологического члена главную роль играют слагаемые, делающие выгодным образование двумерной структуры дефектов вихревой решетки, имеющих определенный топологический заряд.

Заметим, что понятие топологического заряда обобщается и на случай эллиптической модели Sine-Gordon [19].

Полученные нами системы уравнений, описывающие двумерные несоизмеримые структуры с несоизмеримостью в двух направлениях, в отличие от уравнений, фигурирующих в теории двумерных структур с одномерной несоизмеримостью, весьма сложны и на сегодняшний день детально не исследовались. Детальное их исследование будет приведено в следующей работе.

Итак, мы показали, что вихревые решетки вблизи H_{c2} в кристаллах с большим базисом или в изготовляемых с недавнего времени опалах с решеткой регулярных включений сверхпроводящей фазы с периодом порядка 1000 Å [20] могут образовывать сложные двумерные несоизмеримые структуры, которые описываются системой эллиптических или при определенных параметрах гиперболических уравнений Sine-Gordon, связанных условием несжимаемости, вытекающим из квантования потока. Показано, что случай гиперболической системы является точно решаемым. Надо заметить, что в случае опалов с решеткой регулярных включений сверхпроводящей фазы исследованные эффекты могут наблюдаться экспериментально уже при достаточно низких магнитных полях.

В случае слоистых сверхпроводниковых структур легкость скольжения несоизмеримых структур в латеральном направлении может привести к запутыванию вихрей.

Настоящая работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 5Б 34.1Ф.).

Список литературы

[1] S.A. Ktitorov, Yu.V. Petrov, B.N. Shalaev. Physica **B 169**, *2*, 603 (1991).
[2] E. Brezin, D.R. Nelson, A. Thiaville. Phys. Rev. **B 31**, *12*, 7124 (1985).
[3] Я.И. Френкель, Т. Конторова. ЖЭТФ **8**, *1*, 89 (1938).
[4] В.Л. Покровский, А.Л. Талапов. ЖЭТФ **75**, *3*, 1151 (1978).
[5] G. Theodorou, T.M. Rice. Phys. Rev. **B 18**, *6*, 2840 (1978).
[6] В.Л. Покровский, А.Л. Талапов. ЖЭТФ **78**, *1*, 270 (1980).
[7] V.L. Pokrovsky, A.L. Talapov. Phys. Rev. Lett. **42**, *1*, 65 (1979).
[8] И.Ф. Люксютов, А.Г. Наумовец, В.Л. Покровский. Двумерные кристаллы. Наук. думка. Киев (1988).
[9] P.G. Harper. Proc. Phys. Soc. Lond. **A 68**, *2*, 874 (1955).
[10] D.R. Hofstadter. Phys. Rev. **B 14**, *5*, 2239 (1976).
[11] S.A. Ktitorov, Yu.V. Petrov, B.N. Shalaev, V.S. Sherstinov. Int. J. Mod. Phys. **B 6**, *3*, 1209 (1992).
[12] А.А. Абрикосов. ЖЭТФ **32**, *6*, 1442 (1957).
[13] В.Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М. (1976).
[14] E. Brown. Phys. Rev. **A 4**, *4*, 1038 (1964).
[15] J. Zak. Phys. Rev. **A 6**, *6*, 1602 (1964).
[16] H.J. Fischbeck. Phys. Stat. Sol. **3**, *3*, 1082 (1963).
[17] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Наука, М. (1980).
[18] A.B. Borisov, V.V. Kiselev. Physica **D 31**, *1*, 49 (1988).
[19] G. Leibbrandt. Phys. Rev. **B 15**, *7*, 3353 (1977).
[20] V.N. Bogomolov, Y.A. Kumzerov, S.G. Romanov. Physica **C 208**, *1*, 371 (1992).