Физика твердого тела, 1997, том 39, № 6

Эффекты самосогласованной динамики ансамбля винтовых дислокаций при пластической деформации кристаллов

© *Г.Ф. Сарафанов, И.Л. Максимов* *

Нижегородский государственный педагогический универститет,
603600 Нижний Новгород, Россия
*Нижегородский государственный университет,
603600 Нижний Новгород, Россия

(Поступила в Редакцию 13 января 1997 г.)

Сформулирована система уравнений самосогласованного поля для ансамбля непрерывно распределенных винтовых дислокаций. Показано, что интенсивная релаксация дислокационных зарядов, обусловленная упругим взаимодействием дислокаций, приводит к диффузионной динамике ансамбля. Определены условия возникновения неустойчивости однородного состояния. В двумерном случае описаны эффекты самоорганизации дислокаций и процессы их пространственного упорядочивания.

Экспериментально наблюдаемое большое разнообразие деформационных структур [1,2], их иерархия и особенности возникновения указывают на проявление кооперативных эффектов в процессе пластической деформации кристаллов, связанных с самоорганизацией дислокаций и других дефектов кристаллической решетки [3–5]. В последнее время анализ общих закономерностей поведения неравновесных систем сложной природы, процессов их структурной перестройки проводится, как правило, на основе синергетического подхода [6,7]. Применительно к проблеме формирования неоднородных дислокационных структур впервые подобная схема анализа явлений самоорганизации в ансамбле дислокаций использована в [8,9]. Дальнейшее развитие данного подхода, основанное на системе кинетических уравнений, позволило получить и проанализировать некоторые характерные типы дислокационных структур, а также проследить их эволюцию [10–12].

Тем не менее остаются вопросы, связанные с возможностью самосогласованного описания динамики дислокационного ансамбля и адекватностью используемых моделей пластической деформации. В самосогласованной постановке эволюционные уравнения вытекают из полной системы уравнений упругой среды с дислокациями, если устанавливается связь между скоростью дислокаций и полями их внутренних напряжений [13]. Поскольку данная связь имеет функциональный характер, соответствующая система эволюционных уравнений является интегродифференциальной, а с учетом кинетики дислокационных реакций и существенно нелинейной. Среди работ, посвященных исследованию такого рода эволюционных систем, можно отметить [14–16], которые, однако, не исчерпывают проблему. Так, в работе [14] проводится только линейный анализ системы и для одного типа дислокаций. Нелинейный анализ, позволяющий судить об особенностях временно́й эволюции предполагаемых неоднородных решений, отсутствует. Это неслучайно, поскольку в постановке работ [14–16] наличие интегральных членов (ответственных за самосогласованную динамику) не позволяет провести аналитическое исследование системы из-за крайней сложности ее математической структуры.

В этой ситуации для выявления эффектов, связанных с упругим полем дислокаций, представляется целесообразным рассмотреть эволюцию дислокационной системы на модельном уровне для определенного класса физически обоснованных задач, допускающих строгое рассмотрение. Одним из таких модельных объектов является ансамбль винтовых прямолинейных дислокаций, характеризующийся двумерным кулоновским потенциалом междислокационного взаимодействия [13]. Как будет показано в настоящей работе, для объекта с таким взаимодействием существенно упрощаются исходные эволюционные уравнения, что позволяет использовать известные методы нелинейного анализа для нахождения возможных неоднородных решений.

Поэтому целью настоящей работы явилось детальное исследование самосогласованной динамики ансамбля винтовых дислокаций с учетом процессов локального и упругого их взаимодействия, а также исследование его нелинейной динамики в рамках двухкомпонентной изотропной модели.

1. Уравнения самосогласованной динамики дислокационного ансамбля

Задача теоретического исследования процессов эволюции дислокационных структур (ДС) может быть сформулирована на основе системы нелинейных эволюционных уравнений для плотности непрерывно распределенных дислокаций $\rho_a(\mathbf{r}, t)$ [4,17]

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_a \mathbf{v}_a = F_a(\rho_1, \rho_2 \, \dots, v_1, v_2 \dots). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$ — средняя скорость скольжения дислокаций, $a = \{s, \alpha, \beta\}$ — обобщенный индекс, различающий дислокации по их подвижности (s), принадлежности к определенной системе скольжения (α), а β нумерует возможное направление вектора Бюргерса дислокации **b** по отношению к **l** (**l** — единичный вектор, касательный к линии дислокации). $F_a(\rho_1, \rho_2 \ \dots, v_1, v_2 \dots)$ — нелинейные функции, определяемые спецификой кинетических механизмов дислокационных реакций. В отношении вида функций F_a необходимо сделать предположение о их "физической реализуемости": точечная система с такой правой частью не должна иметь неограниченно возрастающих решений.

В условиях квазистатического режима деформирования кристалла при вязком скольжении дислокаций средняя скорость скольжения дислокаций представима в виде [4]

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_a + \mu_a \mathbf{f}^a(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{V}_a$ — постоянная составляющая скорости дислокаций, обусловленная напряжением течения σ_e в плоскости скольжения, $f_i^a = e_{ikm} l_k b_n^a \sigma_{mn}^{int}$ — сила Пича–Келера, действующая на единицу длины дислокации со стороны системы дислокационных зарядов, $\mu_a = V_a / b\sigma_e$ — подвижность дислокаций.

Рассмотрим эволюцию ансамбля дислокаций с винтовой ориентацией вектора Бюргерса (такая ситуация характерна, например, для деформации ОЦК-кристаллов [2]). Тогда для силы $\mathbf{f}^a(\mathbf{r}, t)$, учитывая кулоновский характер взаимодействия винтовых дислокаций, имеем [18]

$$\operatorname{div} \mathbf{f}^a(\mathbf{r}, t) = Gb^a \sum_a b^a \rho_a(\mathbf{r}, t), \tag{3}$$

где G — модуль сдвига, $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор ($\mathbf{r} \perp \mathbf{l}$).

Система уравнений (1)–(3) представляет собой совокупность уравнений самосогласованного поля для ансамбля параллельных винтовых дислокаций. Она допускает упрощение, если учесть относительную малость величины, дальнодействующих напряжений по сравнению с напряжением течения. В этом случае уравнения (1)–(3) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_s^\beta}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_s^\beta \mathbf{V}_s^\beta + \mu_s^\beta G b^\beta \rho_s^\beta \sum_{\beta, s} b^\beta \rho_s^\beta = F_s^\beta(\rho_1^\pm, \rho_2^\pm \dots). \tag{4}$$

При записи системы (4) явно введены индексы β и s, причем для рассматриваемого нами случая $s = 1, 2 \dots$ и $\beta = \pm$. Индекс α опущен, поскольку он неявно задается направлением вектора $\mathbf{V}_s^\beta$.

В представленном виде система эволюционных уравнений (4) учитывает упругое взаимодействие дислокаций (последнее слагаемое в левой части) в виде, позволяющем провести нелинейный анализ исследуемой системы известными методами [6,7]. Формально это связано с тем, что дополнительное слагаемое можно органически включить в правую часть системы. Заметим, что с учетом этого обстоятельства результаты отдельных работ, например [12], могут быть легко обобщены на самосогласованный случай.

Рассмотрим вопрос, связанный с возможностью образования диссипативных ДС в рамках системы (4). В аналитической форме такое исследование возможно вблизи точки бифуркации, когда одно из вещественных характеристических чисел соответствующего дисперсионного уравнения обращается в нуль и меняет знак (ДС-неустойчивость [19]).

Введем новые переменные $\rho_s = \rho_s^+ + \rho_s^-$ и $I_s = \rho_s^+ - \rho_s^-$, характеризующие соответственно суммарную и избыточную плотности дислокаций. Сделаем естественное допущение, что в исходной системе (4) существует симметрия относительно знака дислокаций. Тогда для переменных ρ_s и I_s стационарное однородное состояние системы $(\rho_s^+ = \rho_s^- = \bar{\rho}_s)$ запишется в виде $\rho_s = 2\bar{\rho}_s = \rho_{0s}$, $I_s = 0$.

В новых обозначениях систему (4) можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} I_s \mathbf{V}_s = \sum_k a_{sk}(\rho_k - \rho_{0k}) + Q_s(\rho_k, I_k), \tag{5a}$$

$$\frac{\partial I_s}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_s \mathbf{V}_s = \sum_k \beta_{sk} I_k + P_s(\rho_k, I_k). \tag{5b}$$

Здесь коэффициенты при линейных членах выражаются следующим образом:

$$a_{sk} = \left.\frac{\partial(F_s^+ + F_s^-)}{\partial \rho_k^+}\right|_{\rho_s^+ = \bar{\rho}_s}, \quad b_{sk} = \left.\frac{\partial(F_s^+ - F_s^-)}{\partial \rho_k^+}\right|_{\rho_s^+ = \bar{\rho}_s},$$

$$\beta_{sk} = b_{sk} - \mu_s G b^2 \rho_{0s}, \tag{6}$$

а Q_s и P_s — нелинейные функции, получаемые разложением в ряд правой части системы (5) в окрестности рассматриваемого стационарного однородного состояния.

Остановимся на анализе устойчивости однородного состояния для случая ансамбля дислокаций двух типов ($s = 1, 2$). Опуская в (5) нелинейные члены, ищем решение линеаризованной системы в виде ($\rho_s - \rho_{0s}$), $I_s \sim \exp\{\lambda t + i\mathbf{kr}\}$. В результате получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений. Из условия существования ее нетривиальных решений находим дисперсионное уравнение

$$L(\lambda, k^2, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{4} A_m(k^2)\lambda^m + F(k^2) = 0, \tag{7}$$

где ε — выделенный нами управляющий параметр (например, деформация) системы (5). В окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon_c$ исследуемой бифуркации $\lambda \to 0$ и в дисперсионном уравнении можно пренебречь высшими степенями по λ, тогда для инкремента λ_u неустойчивой моды находим

$$\lambda_u = \frac{V_1^2 V_2^2 k^4 + Ak^2 + \det a_{ik} \det \beta_{ik}}{\det a_{ik} \operatorname{Sp} \beta_{ik} + \det \beta_{ik} \operatorname{Sp} a_{ik} + Bk^2} = \frac{F(k^2)}{A_1(k^2)}, \tag{8}$$

где

$$A = V_1 V_2 (a_{12}\beta_{21} + a_{21}\beta_{12}) + V_1^2 a_{22}\beta_{22} + V_2^2 a_{11}\beta_{11},$$

$$B = (a_{22} + \beta_{22})V_1^2 + (a_{11} + \beta_{22})V_2^2,$$
$$\det a_{ik} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \det\beta_{ik} = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21},$$
$$\mathrm{Sp}\, a_{ik} = a_{11} + a_{22}, \quad \mathrm{Sp}\,\beta_{ik} = \beta_{11} + \beta_{22}. \tag{9}$$

Требование "физической реализуемости" правых частей системы (5) приводит к условию

$$\begin{aligned} &\det a_{ik} > 0, \quad \det\beta_{ik} > 0, \\ &\mathrm{Sp}\, a_{ik} < 0, \quad \mathrm{Sp}\,\beta_{ik} < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В этом случае $A_1(k^2) < 0$, и, как следует из (8), необходимым условием существования стационарных диссипативных структур является отрицательность свободного члена $F(k^2)$ дисперсионного уравнения (7). Последнее условие реализуется в некотором интервале волновых чисел $[k_{\min}, k_{\max}]$ при

$$V_1V_2(a_{12}\beta_{21} + a_{21}\beta_{12}) + V_1^2 a_{22}\beta_{22} + V_2^2 a_{11}\beta_{11} + 2V_1V_2\sqrt{\det a_{ik}\det\beta_{ik}} \le 0. \tag{11}$$

Равенство в (11) представляет собой ДС-бифуркацию, при которой в критической области ($\varepsilon \sim \varepsilon_c$) интервал $[k_{\min}, k_{\max}]$ стягивается в точку $k_{\min} = k_{\max} = k_c$, где $k_c^2 = (\det a_{ik}\det\beta_{ik})^{1/2}/V_1V_2$. Условие (11) задает требования к точечной части исходной системы уравнений. При его выполнении в системе возможно образование диссипативных структур с характерным пространственным масштабом $L_c = 2\pi/k_c$. Аналогичный анализ, проведенный в рамках однокомпонентной модели ($s = 1$, $\beta = \pm$), показывает, что ДС-неустойчивость невозможна. Отсюда следует, что спонтанное расслоение однородного состояния возможно, если эволюция дислокационного ансамбля описывается, как минимум, двумя типами дислокаций. Отметим, что в системе (4) помимо дрейфовых потоков можно учесть и диффузионные. Иногда учет диффузионных потоков приводит к нетривиальным результатам в рамках однокомпонентных моделей [11,14]. Вместе с тем корректное введение таких потоков в систему (4) требует детального обоснования. Нас же в первую очередь интересуют эффекты, не связанные с привлечением дополнительных соображений.

Система уравнений (5) с математической точки зрения представляет собой систему уравнений гиперболического типа. Между тем интересен случай, когда динамика дислокационного ансамбля принимает диффузионный характер. Анализируя (5), можно заметить, что временны́е масштабы $T_s = |a_{ss}|^{-1}$ и $\tau_s = |\beta_{ss}|^{-1}$ фактически определяют скорости изменения соответственно переменных $\rho_s(\mathbf{r}, t)$ и $I_s(\mathbf{r}, t)$ в окрестности состояния равновесия $\rho_s = \rho_{0s}$, $I_s = 0$. Характерное время T_s можно оценить как $T_s^{-1} = |a_{ss}| \sim V_s h\rho_{0s}$ (где $h = Gb/4\pi\sigma_e$ — радиус захвата дислокаций в дипольные конфигурации [4,13]). С другой стороны, $\tau_s^{-1} = |\beta_{ss}| = |b_{ss}| + \mu_s Gb\rho_{0s}$. Поскольку, за исключением особых случаев, $|b_{ss}| \sim |a_{ss}|$, учитывая, что $\mu_s = V_s/b\sigma_e$, имеем $\tau_s \approx T_s(1 + 4\pi)^{-1} \simeq 0.073T_s$, т.е. $\tau_s \ll T_s$. Поэтому можно утверждать, что переменные I_s, описывающие эволюцию дислокационных зарядов, на временах $t \sim T_s$ успевают достигнуть своих стационарных значений раньше, чем переменные ρ_s успевают заметно измениться. В этой ситуации систему (5) можно линеаризовать по I_s и, воспользовавшись адиабатическим приближением ($|\partial I_s/\partial t| \sim |I_s/T_s| \ll |I_s/\tau_s|$), преобразовать к виду

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \mathrm{div}\, I_s\mathbf{V}_s = \sum_k a_{sk}(\rho_k - \rho_{0k}) + Q_s(\rho_1, \rho_2 \dots), \tag{12a}$$

$$I_s\mathbf{V}_s = -\sum_k D_{sk}(n_v\nabla)\rho_k. \tag{12b}$$

Здесь $D_{sk} = (\beta_{sk}/V_sV_k)^* / \det(\beta_{sk}/V_sV_k)$ — коэффициенты эффективной диффузии, $(\beta_{sk}/V_sV_k)^*$ — присоединенная матрица [20], $\mathbf{n}_v = \mathbf{V}_s/V_s$.

Итак, наличие в системе (5) малого параметра $\tau_s/T_s \ll 1$ позволило перейти в описании динамики дислокационного ансамбля к диффузионной модели (12). Такой переход связан с интенсивной релаксацией избыточного вектора Бюргерса системы винтовых дислокаций и обусловлен в основном их упругим взаимодействием ($|b_{ss}| \ll \mu_s Gb\rho_{0s}$). Последний эффект аналогичен эффекту амбиполярной диффузии для электрически заряженных частиц [21], где часть диффузионного потока частиц связана с электрическим полем, создаваемым системой электронов и ионов.

2. Самоорганизация в ансамбле дислокаций

Полученные на линейной стадии исследования результаты не позволяют выяснить характер эволюции дислокационного ансамбля за точкой бифуркации. Более того, существование выше порога неустойчивости стационарных неоднородных состояний нельзя считать доказанным до тех пор, пока не исследованы полные нелинейные уравнения. Поэтому рассмотрим в рамках диффузионной модели нелинейную эволюцию двухкомпонентного дислокационного ансамбля с учетом следующего обстоятельства.

Экспериментально установлено, что на стадии формирования равноосных ячеистых дислокационных структур, когда в пластической деформации участвует несколько систем скольжения, плотность дислокаций вторичных систем скольжения близка (почти равна) к плотности первичной системы [2]. Это указывает на фактическую эквивалентность систем скольжения. В этой ситуации эволюцию дислокационного ансамбля целесообразно описывать в терминах соответственно общей плотности дислокаций и общего потока дислокационного заряда

$$\rho_s(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \rho_s^\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \mathbf{V}_s^\alpha I_s^\alpha(\mathbf{r}, t). \tag{13}$$

Здесь ρ_s^α и I_s^α — соответственно суммарная и избыточная плотности дислокаций в некоторой системе скольжения α. Тогда обобщенный вариант системы уравнений (12) на случай множественного скольжения в изотропном приближении может быть записан в виде

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{J}_s=\sum_k a_{sk}(\rho_k-\rho_{0k})+Q_s(\rho_1,\rho_2), \tag{14a}$$

$$\mathbf{J}_s=-\sum_k D_{sk}\nabla\rho_k. \tag{14b}$$

Здесь коэффициенты диффузии D_{sk} определяются следующим образом:

$$D_{11}=-\frac{\beta_{22}V_1^2}{2\det\beta_{ik}},\qquad D_{22}=-\frac{\beta_{11}V_2^2}{2\det\beta_{ik}},$$

$$D_{12}=\frac{\beta_{12}V_1V_2}{2\det\beta_{ik}},\qquad D_{21}=\frac{\beta_{21}V_1V_2}{2\det\beta_{ik}}. \tag{15}$$

Система уравнений (14) представляет собой двухкомпонентную изотропную модель эволюции дислокационного ансамбля для случая множественного скольжения дислокаций в плоскостях, перпендикулярных плоскости $(\mathbf{r},\mathbf{l})=0$.

Подставляя (14b) в (14a), получаем замкнутую систему диффузионных уравнений относительно суммарной плотности дислокаций $\rho_s(\mathbf{r},t)$. Заметим, что при изотропном рассмотрении первичной величиной по отношению к эволюции дислокационных зарядов становится поток вектора $\mathbf{J}_s$, а не скалярная величина $I_s=\sum_\alpha I_s^\alpha$ (это аналогично ситуации в континуальной теории дислокаций, когда первичное значение при построении теории приобретает тензор дисторсии вместо вектора смещения точек среды [13]). Поэтому направление вектора $\mathbf{J}_s$ определяется здесь не скоростью дислокаций (как в одномерном случае), а направлением волнового вектора (или комбинацией волновых векторов с соответствующим весом).

Исследование динамики ансамбля дислокаций будем проводить в двумерной области $(L_1,\ L_2)$ с учетом наложенных на систему (14) периодических граничных условий типа условий Борна–Кармана

$$\rho_s(\mathbf{r},t)=\rho_s(\mathbf{r}+\mathbf{L},t), \tag{16}$$

где $\mathbf{L}=\{L_1,L_2\}$ — вектор трансляции. Физически естественно предположить, что L_1 и L_2 имеют характерный масштаб порядка размера зерна для поликристаллов и порядка размера образца для монокристаллов.

Как показывает анализ исследования подобных систем [6,7], в случае, когда термодинамическая ветвь системы претерпевает бифуркацию, поведение системы в окрестности точки неустойчивости определяется набором незатухающих коллективных переменных (мод), называемых параметрами порядка системы [6]. Следуя этой логике, представим искомое решение системы (14) в виде

$$\rho_s(\mathbf{r},t)=\rho_{0s}+\sum_{j,\mathbf{k}}v_s^j\Big[\xi_{\mathbf{k}}^j(t)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})+\text{c.c.}\Big]. \tag{17}$$

В разложении (17) коллективные переменные $\xi_{\mathbf{k}}^j(t)$ — неизвестные пока функции времени, $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})=\exp(i\mathbf{kr})$ — ортогональные собственные функции матричного оператора $L(\Delta)=\{a_{sk}+D_{sk}\Delta\}$, а волновой вектор $\mathbf{k}$ с учетом граничных условий (16) принимает дискретные значения $\mathbf{k}=\{2\pi n_1/L_1,\ 2\pi n_2/L_2\}$, $n_{1,2}=\pm1\ \pm2\ldots$, v_s^j — компоненты левого собственного вектора матрицы $L(k^2)$ ($v_1^j=(\lambda_k^j-L_{22})/L_{21}$, $v_2^j=1$).

Собственные значения λ_k^j соответствуют характеристическим числам дисперсионного уравнения линеаризованной системы (14). Отсюда вытекает, что в области точки ДС-бифуркации ($\varepsilon\sim\varepsilon_c$, $|\mathbf{k}|\ \sim\ k_c$) для инкремента λ_u неустойчивых мод справедливо выражение $\lambda_u\simeq -F(k^2)/A_1(k_c^2)>0$, по форме совпадающее с (8). При этом $k_c=[A/2\det D_{ik}]^{1/2}$ — критическое значение волнового вектора, в окрестности которого $F(k^2)<0$.

Далее, применяя стандартную процедуру [6], получаем систему уравнений для параметров порядка, которую можно представить в потенциальной форме

$$\frac{\partial\xi_{\mathbf{k}}}{\partial t}=-\frac{\partial V}{\partial\xi_{\mathbf{k}}^*}, \tag{18}$$

где

$$V=-\sum_{|\mathbf{k}|=k_c}\bigg[\lambda_u|\xi_{\mathbf{k}}|^2+\frac{G}{2}\bigg(\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}'}\xi_{\mathbf{k}''}\xi_{\mathbf{k}}^*+\text{c.c.}\bigg)+B\,|\xi_{\mathbf{k}}|^2\sum_{|\mathbf{k}|=k_c}|\xi_{\mathbf{k}}|^2\bigg],$$

$$G(k_c)=\sum_{s,n,m=1}^{2}w_s^+(k_c)C_{nm}^s v_n^+(k_c)v_m^+(k_c),$$

$$B(k_c)=\sum_{s,n,m,f=1}^{2}w_s^+(k_c)D_{nmf}^s v_n^+(k_c)v_m^+(k_c)v_f^+(k_c)<0. \tag{19}$$

Здесь w_s^+ выражаются через v_s^+ и являются компонентами правого собственного вектора матрицы $L(k^2)$, а C_{nm}^s и D_{nmf}^s соответственно являются коэффициентами при квадратичных и кубических членах разложения функций Q_s в ряд. Величина B, по предположению, отрицательна, что обычно имеет место для систем с физически реализуемой кинетикой [6,7,19].

Решив систему уравнений (18) и определив $\xi_{\mathbf{k}}^j(t)$, можно построить по формуле (17) решение исходной системы для суммарной плотности дислокаций $\rho_s(\mathbf{r},t)$. Соответствующее выражение для избыточной плотности дислокаций с учетом соображений, приведенных выше, можно представить в виде

$$I_s = -\frac{1}{V_s}\sum_m \sum_{j,\mathbf{k}} D_{sm} v_s^j(k)\,|\mathbf{k}|\left[i\xi_{\mathbf{k}}(t)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \text{c.c.}\right]. \quad (20)$$

Минимуму потенциала V отвечают три стационарных состояния равновесия. Тривиальное состояние равновесия, соответствующее однородному состоянию системы (14), является устойчивым при $\lambda_u < 0$. При $\lambda_u > 0$ всегда устойчивым является одномодовое решение $\xi_{\mathbf{k}_1} = \sqrt{2\lambda_u/|B|} = \xi_0$. Здесь все моды, за исключением одной, параметризуемой волновым вектором $\mathbf{k}_1$, подавлены. Вид получающейся в этом случае пространственной структуры может быть определен подстановкой $\xi_{\mathbf{k}_1}$ в (17), (20).

Отсюда имеем

$$\rho_1 = \rho_{01} + v_1^+\sqrt{8\lambda_u/|B|}\cos(\mathbf{k}_1\mathbf{r}),$$

$$I_1 = -k_c v_1^+\sqrt{8\lambda_u/|B|}\sin(\mathbf{k}_1\mathbf{r}),$$

$$\rho_2 = \rho_{02} + \sqrt{8\lambda_u/|B|}\cos(\mathbf{k}_1\mathbf{r}),$$

$$I_2 = -k_c\sqrt{8\lambda_u/|B|}\sin(\mathbf{k}_1\mathbf{r}), \quad (21)$$

где $v_1^+ = -(a_{22} - D_{22}k_c^2)/(a_{21} - D_{21}k_c^2)$.

Трехмодовое стационарное решение $\xi_{\mathbf{k}_1} = \xi_{\mathbf{k}_2} = \xi_{\mathbf{k}_3} = \xi_{01}$ $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0)$ оказывается устойчивым при

$$0 < \lambda_u < \lambda^* = 8G^2/|B|. \quad (22)$$

Этому решению отвечает пространственная структура гексагонального вида, получающаяся подстановкой ξ_{01} в (17) и (20):

$$\rho_1 = \rho_{01} + 2\xi_{01}v_1^+(k_c)\left[\cos k_c x + \cos k_c\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \cos k_c\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right],$$

$$I_1 = -2k_c\xi_{01}v_1^+\left[\cos k_c x + \cos k_c\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \cos k_c\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right],$$

$$\rho_2 = \rho_{02} + 2\xi_{01}\left[\cos k_c x + \cos k_c\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \cos k_c\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right],$$

$$I_2 = -2k_c\xi_{01}\left[\cos k_c x + \cos k_c\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \cos k_c\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right]. \quad (23)$$

Здесь одно из направлений $\mathbf{k}_i$ выбрано ориентированным вдоль оси $0x$. Заметим, что реализация той или иной ориентации векторов, образующих правильный треугольник, произвольна и связана со спонтанным нарушением симметрии.

Итак, в системе локально устойчивыми являются как одномодовый, так и трехмодовый режимы. Первый является следствием конкуренции мод и приводит к одномерно-неоднородной структуре (21), второй — результат кооперации неустойчивых мод, приводит к возникновению гексагональной структуры (23). Возникает вопрос: какая из этих двух структур реализуется в момент достижения системой точки бифуркации, соответствующей неустойчивости однородного состояния? Решить этот вопрос можно, если учесть в системе флуктуации и вычислить вероятность нахождения системы в том и другом состояниях. Наиболее вероятным будет состояние, обладающее более глубоким минимумом потенциальной функции для системы (18).

Вычисление потенциала V по формуле (19) показывает, что для одномодового режима в состоянии равновесия минимум V достигается при $V_{\min}^{(1)} = -\lambda_u^2/|B|$, а для трехмодового — при $V_{\min}^{(3)} = -5\xi_{01}^2(|B|\xi_{01}^2/4 - \lambda_u)$. Из условия $V_{\min}^{(3)} < V_{\min}^{(1)}$, подставляя соответствующие значения, получаем

$$\lambda_u < \lambda_0 \simeq 0.0518G^2/|B|.$$

Сравнивая последнее выражение с (22), нетрудно видеть, что $\lambda_0 \ll \lambda^*$. Таким образом, гексагональная конфигурация более вероятна в момент возникновения неустойчивости при $0 < \lambda_u < \lambda_0$. В интервале $\lambda_0 < \lambda_u < \lambda^*$ более вероятным является режим установления одномодовой конфигурации, а при $\lambda_u > \lambda^*$ переключение в режим одномодовой конфигурации происходит с необходимостью, поскольку гексагональная структура становится неустойчивой. Интересно отметить, что такая смена режимов и наблюдаемых структур аналогична ситуации, возникающей в гидродинамике при термоконвективной неустойчивости (неустойчивости Бенара), когда по мере увеличения числа Релея из однородного состояния образуется гексагональная структура, которая затем переходит в цилиндрическую (одномодовую) [6].

Итак, рассмотрена устойчивость однородного состояния в рамках предложенной системы эволюционных уравнений. Показано, что неустойчивость, приводящая к расслоению однородного состояния, возможна, если эволюция дислокационного ансамбля описывается, как минимум, двумя типами дислокаций, находящимися в различных динамических состояниях. Особенность данного вывода заключается в том, что при анализе учитываются только дрейфовые дислокационные потоки. Диффузионные потоки, обычно включаемые в систему эволюционных уравнений для обеспечения ДС-неустойчивости [8–11,14] и требующие особого обоснования, здесь не рассматриваются.

Показано, что интенсивная релаксация избыточного вектора Бюргерса системы винтовых дислокаций, связанная с их упругим взаимодействием, обеспечивает возможность упрощения исходной системы и обусловливает эффективную диффузионную динамику дислокационного ансамбля для суммарной плотности дислокаций $\rho_s(\mathbf{r}, t)$. В двухкомпонентном случае это приводит к появлению в системе слагаемых, ответственных за перекрестную эффективную диффузию. Такого рода слагаемые обычно игнорируются при построении распределенных дислокационных моделей. Между тем, как отмечается в [19], системы с такой динамикой допускают возможность ДС-неустойчивости даже в отсутствие активной кинетики дислокаций ($a_{ss} < 0$). Этот новый тип неустойчивости может оказаться важным для объяснения возникновения неоднородных дислокационных структур для некоторых режимов пластической деформации кристаллов.

Для двухкомпонентной изотропной модели с перекрестной диффузией проведен нелинейный анализ и описаны возможные эффекты спонтанного возникновения диссипативных дислокационных структур. Специфика данного анализа заключается в том, что он позволяет получать решения не только для суммарной, но и для избыточной плотности дислокаций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-18185), а также правительства РФ совместно с Международным научным фондом (проект N R8J300).

Список литературы

[1] Б.И. Смирнов. Дислокационная структура и упрочнение кристаллов. Л. (1981). 275 с.
[2] В.И. Трефилов, В.Ф. Моисеев, Э.П. Печковский, И.Д. Горная, А.Д. Васильев. Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических материалов. Киев (1987). 245 с.
[3] Кооперативные деформационные процессы и локализация деформации. Киев (1989). 320 с.
[4] Г.А. Малыгин. ФТТ **37**, *1*, 3 (1995).
[5] В.С. Иванова, А.С. Баланкин, И.Ж. Бунин, А.А. Оксогоев. Синергетика и фракталы в материаловедении. М. (1994). 383 с.
[6] Г. Хакен. Синергетика. М. (1980). 406 с.
[7] Г. Николис, И. Пригожин. Самоорганизация в неравновесных системах. М. (1979). 512 с.
[8] E.C. Aifantis. Mater. Sci. Eng. **81**, 563 (1986).
[9] D. Walgraef, E.C. Aifantis. J. Appl. Phys. **58**, *2*, 668 (1985).
[10] J. Kratochvil. Rev. Phys. Appl. **23**, *4*, 419 (1988).
[11] Г.А. Малыгин. ФТТ **31**, *7*, 43 (1989).
[12] И.Л. Максимов, Г.Ф. Сарафанов. Письма в ЖЭТФ **61**, *5*, 405 (1995).
[13] А.М. Косевич. Дислокации в теории упругости. Киев (1978). 220 с.
[14] Ш.Х. Ханнанов. ФММ **78**, *2*, 31 (1994).
[15] H. Zorski. Int. Sol. Stauct. **4**, 959 (1968).
[16] А.Л. Гайков, А.Е. Романов. ФТТ **33**, *9*, 2772 (1991).
[17] Ш.Х. Ханнанов. ФММ **46**, *4*, 708 (1978).
[18] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. М. (1971). 512 с.
[19] В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно. Автоволновые процессы. М. (1987). 240 с.
[20] А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М. (1975). 432 с.
[21] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. М. (1979). 528 с.