Упругое рассеяние света полупроводниковыми квантовыми точками произвольной формы

И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, С.Т. Павлов*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
* Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия
E-mail: korovin@mail.ioffe.ru, pavlov@sci.lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 16 ноября 2006 г.)

С помощью квантовой теории возмущений теоретически исследовано рассеяние света без изменения частоты на размерно-квантованных объектах пониженной размерности. Вычислено дифференциальное сечение резонансного рассеяния на любых экситонах в любых квантовых точках (КТ). В случае длин световых волн, намного превышающих размер КТ, поляризация и угловое распределение рассеянного света не зависят от формы, размеров и конфигурации КТ. Величина полного сечения в этом случае не зависит от размеров КТ. Если радиационное затухание экситона превосходит нерадиационное, в резонансе полное сечение рассеяния порядка квадрата длины световой волны. Для любых экситонов в любых КТ вычислены величины радиационных затуханий, обусловленных дальнодействующим обменным взаимодействием электронов и дырок.

PACS: 78.67.Hc, 78.35.+c

1. Введение

Измерение упругого рассеяния света размерно-квантованными полупроводниковыми объектами пониженной размерности — квантовыми ямами (КЯ), квантовыми проволоками (КП) и квантовыми точками (КТ) — простой и удобный метод исследования экситонных возбуждений в этих объектах.

Если энергетические уровни экситонов дискретны, то рассеяние резонансно усиливается при совпадении частоты ω_l возбуждающего света с энергией экситона ω_0. Ширина резонансного пика определяется затуханием Γ экситона. То же относится и к поглощению света объектами пониженной размерности.

В работе [1] впервые была обнаружена роль так называемого радиационного затухания γ_r экситонов в процессах отражения света от КЯ. Было показано, что затухание Γ состоит из двух частей, т.е. $\Gamma = \gamma_r + \gamma$, где $\gamma_r(\gamma)$ — радиационное (нерадиационное) затухание экситона. В [2] эта же концепция была распространена на поглощение света КЯ (см. также обзор [3]). Впервые отражение света от структур с КЯ, КП и КТ было рассмотрено в [4].

Теоретически исследовать рассеяние света полупроводниковыми объектами пониженной размерности можно двумя способами. Первый из них назовем полуклассическим, поскольку он сводится к вычислению классических электрических полей, тогда как описание системы электронов в полупроводниковых объектах — квантовое (достаточно упомянуть, что рождению электронно-дырочных пар (ЭДП) соответствуют недиагональные матричные элементы $\mathbf{p}_{cv}$ квазиимпульса). Полуклассический способ описан в [5]. Он состоит в вычислении средних по основному состоянию кристалла плотностей тока и заряда, наведенных возбуждающим электрическим полем и решении уравнений Максвелла как внутри, так и вне объекта с последующим использованием граничных условий для электрических и магнитных полей на границах объекта. Рассеяние с изменением частоты — например, комбинационное — обусловлено флуктуациями плотностей тока и заряда. Подчеркнем, что вычисление плотностей тока и заряда производится с учетом нерадиационных затуханий γ экситонов [5], что позволяет в дальнейшем вычислить не только рассеяние, но и поглощение света полупроводниковыми объектами (при $\gamma = 0$ поглощение света отсутствует). Полуклассический способ при вычислении коэффициентов отражения и поглощения монохроматического света КЯ был использован в [4] и [6–8]. В [9] тот же способ применен к вычислению электрических полей, возникающих при резонансном рассеянии света на экситоне $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ в сферической КТ, состоящей из кубического кристалла класса T_d (например, GaAs) и огражденной бесконечно высоким прямоугольным потенциальным барьером.

Второй способ исследования рассеяния света КЯ, КП и КТ — квантовый, описанный в настоящей работе. Электрическое поле квантуется и используется квантовая теория возмущений. Нами проверено, что в применении к КЯ оба способа дают одинаковые результаты для безразмерного коэффициента отражения света, если рассматривать взаимодействие света с электронами в низшем порядке, что допустимо при условии $\gamma_r \ll \gamma$.

Безусловно, полуклассический способ имеет ряд преимуществ перед квантовым. Во-первых, он позволяет точно учесть взаимодействие света с электронами, т.е. все процессы переизлучения и перепоглощения света. Точное описание достигается, если в выражении для средних плотностей тока и заряда подставить истинные значения электрических полей. Тогда автоматически получаем, что резонансные вклады экситонов в безразмерные коэффициенты отражения и поглощения света в КЯ и сечения рассеяния в случае КП и КТ содержат множители вида $[(\omega_l - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma^2/4]^{-1}$, где $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \Delta\omega$ — перенормированная энергия экситона [6,8,9].

Во-вторых, полуклассический способ позволяет в принципе точно вычислить поглощение света объектами пониженной размерности. Для случая КЯ эта задача решена в [6–8], в [9] положено $\gamma = 0$, и поглощение света квантовой точкой в результате отсутствует.

В-третьих, полуклассический способ позволяет с легкостью перейти от монохроматического облучения к импульсному и установить связь между формой прошедшего импульса и энергетической структурой КЯ [10–14].

Наконец, в-четвертых, полуклассический способ позволяет учесть разность диэлектрических проницаемостей объектов пониженной размерности и окружающей среды [6,9,12].

Однако квантовый способ имеет одно неоспоримое преимущество — он гораздо проще, особенно в случае КП и КТ, что демонстрируется в настоящей работе.

2. Квантовая теория

Вычислим вероятность поглощения кванта возбуждающего света и испускания кванта рассеянного света. Согласно квантовой теории возмущений,

$$W_i = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i), \tag{1}$$

где $E_i(E_f)$ — энергия начального (конечного) состояния,

$$M_{fi} = \sum_m \frac{\langle f|V|m\rangle\langle m|V|i\rangle}{E_i - E_m + i\delta\hbar} \tag{2}$$

— составной матричный элемент, E_m — энергия промежуточного состояния, $\delta \to +0$.

Взаимодействие системы зарядов с электрическим полем запишем в виде

$$V = -\int d^3r\, \mathbf{d}(\mathbf{r})\, \mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где введена величина плотности поляризации

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{r}_i \rho_i(\mathbf{r}), \quad \rho_i(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{4}$$

Поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ запишем в представлении вторичного квантования ([15], стр. 579)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\left(\frac{2\pi\hbar}{V_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\nu} \sum_{\mathbf{k},\mu} \omega_k^{1/2} \left(c_{\mu\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} - c^+_{\mu\mathbf{k}} \mathbf{e}^*_{\mu\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}}\right), \tag{5}$$

где V_0 — нормировочный объем; $\omega_k = ck/\nu$ — частота; $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\nu = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления, который считаем одинаковым внутри объекта и вне его; $\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}}$ — вектор поляризации; μ — индекс поляризации; $c^+_{\mu\mathbf{k}}(c_{\mu\mathbf{k}})$ — оператор рождения (уничтожения) фотона. В (5) использовано приближение $u_{\mu\mathbf{k}} = c/\nu$, где $u_{\mu\mathbf{k}}$ — групповая скорость света. Поле (5) нормировано так, что энергия в объеме V_0 равна $\Sigma_{\mathbf{k},\mu} \hbar\omega_k(N_{\mu\mathbf{k}} + 1/2)$.

Для полупроводниковых объектов в приближении эффективной массы [5]

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \mathbf{d}^{nd}(\mathbf{r}) = \sum_\eta \left[\mathbf{d}_{cv\eta} F^*_\eta(\mathbf{r}) a^+_\eta + \mathbf{d}^*_{cv\eta} F_\eta(\mathbf{r}) a_\eta\right], \tag{6}$$

где верхний индекс nd означает недиагональную часть оператора (имеющую отличные от нуля только недиагональные матричные элементы), $a^+_\eta(a_\eta)$ — оператор рождения (уничтожения) экситона с набором индексов η, $F_\eta(\mathbf{r})$ — волновая функция экситона („огибающая“ волновой функции) при $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_h = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_h)$ — радиус-вектор электрона (дырки), $\mathbf{d}_{cv\eta} = -ie\mathbf{p}_{cv\eta}/(m_0\omega_g)$, m_0 — масса свободного электрона, $\hbar\omega_g$ — ширина запрещенной зоны, $\mathbf{p}_{cv\eta}$ — межзонный матричный элемент квазиимпульса. Подставив (5) и (6) в (3), получаем $V = V_1 + V_2 + \text{h.c.}$, где

$$V_1 = -\frac{e}{m_0\omega_g\nu}\left(\frac{2\pi\hbar}{V_0}\right)^{1/2} \sum_\eta \sum_{\mathbf{k},\mu} a^+_\eta c_{\mu\mathbf{k}} \omega_k^{1/2} (\mathbf{p}_{cv\eta}\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}}) P^*_\eta(\mathbf{k}),$$

$$V_2 = \frac{e}{m_0\omega_g\nu}\left(\frac{2\pi\hbar}{V_0}\right)^{1/2} \sum_\eta \sum_{\mathbf{k},\mu} a^+_\eta c^+_{\mu\mathbf{k}} \omega_k^{1/2} (\mathbf{p}_{cv\eta}\mathbf{e}^*_{\mu\mathbf{k}}) P^*_\eta(-\mathbf{k}), \tag{7}$$

$$P_\eta(\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{kr}} F_\eta(\mathbf{r}). \tag{8}$$

Составной матричный элемент (2) разбивается на две части

$$M_{fi} = M^1_{fi} + M^2_{fi},$$

где

$$M^{1(2)}_{fi} = \sum_m \frac{\langle f|V^+_{1(2)}|m\rangle\langle m|V_{1(2)}|i\rangle}{E_i - E_m + i\delta\hbar}. \tag{9}$$

В начальном состоянии $|i\rangle$ предполагается основное состояние полупроводникового объекта и существование N_l фотонов с волновым вектором $\mathbf{k}_l$ и поляризацией $\mathbf{e}_l$, причем $N_l \gg 1$. В конечном состоянии $|f\rangle$ присутствуют $N_l - 1$ фотонов возбуждающего света и один фотон рассеянного света с волновым вектором $\mathbf{k}_s$ и поляризацией $\mathbf{e}_s$.

В промежуточном состоянии в случае процесса *1* присутствуют $N_l - 1$ фотонов возбуждающего света и экситон с набором индексов η, в случае процесса *2* — N_l фотонов возбуждающего света, один фотон рассеянного света и экситон η.

Для вероятности W_l получаем результат

$$W_l = \frac{(2\pi)^3}{V_0^2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{m_0^2\omega_g^2}\right)^2 \frac{N_l\omega_l\omega_s}{\nu^4} \sum_{\mathbf{k}_s,\mu} \left|\sum_\eta \tilde{A}_\eta\right|^2 \delta(\omega_l - \omega_s), \tag{10}$$

где введено обозначение

$$\tilde{A}_\eta = \frac{(\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_l)(\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_s)^*\,P^*_\eta(\mathbf{k}_l)P_\eta(\mathbf{k}_s)}{\omega_l-\omega_\eta+i\delta} - \frac{(\mathbf{p}^*_{cv\eta}\,\mathbf{e}_l)(\mathbf{p}^*_{cv\eta}\,\mathbf{e}_s)^*\,P_\eta(-\mathbf{k}_l)P^*_\eta(-\mathbf{k}_s)}{\omega_l+\omega_\eta+i\delta}. \qquad (11)$$

Суммирование в правой части (10) проводится по волновым векторам $\mathbf{k}_s$ и поляризациям μ рассеянного излучения.

Будем рассматривать резонансное рассеяние, когда энергии $\hbar\omega_l$ и $\hbar\omega_\eta$ немного превышают ширину запрещенной зоны. Тогда „нерезонансный“ второй член в правой части (11) следует отбросить, поскольку учет его был бы превышением точности.

Переходя от суммирования по $\mathbf{k}_s$ к интегрированию по модулю k_s и используя соотношение $\omega_s = ck_s/\nu$, получим

$$W_l = \left(\frac{e^2}{m_0^2\omega_g^2}\right)^2 \frac{N_l\omega_l^4}{V_0\hbar^2c^3\nu}\sum_\mu\int do_s\left|\sum_\eta A_\eta\right|^2, \qquad (12)$$

где A_η есть резонансный член в формуле (11). Выражение (12) универсально в том смысле, что применимо к любым полупроводниковым объектам пониженной размерности — КЯ, КП и КТ, в том числе в случае помещения этих объектов в постоянное магнитное поле.

3. Рассеяние света на квантовых точках

Рассмотрим рассеяние света на малом трехмерном полупроводниковом объекте, т. е. на КТ. Объект может быть любой формы (например, сферой, кубом или диском) и ограничен любыми потенциальными (параболическими или прямоугольными) барьерами любой высоты. Все особенности структуры КТ окажут влияние только на вид функции $P_\eta(\mathbf{k})$ для экситона с индексами η. Угловое распределение рассеянного света зависит также от структуры векторов $\mathbf{p}_{cv\eta}$, которые, вообще говоря, являются комплексными. Для кубических кристаллов (класса T_d) эти векторы различны для экситонов, содержащих тяжелые или легкие дырки или дырки из валентной зоны, отщепленной спин-орбитальным взаимодействием [16,17].

Под экситоном понимаем любое состояние ЭДП в КТ, которому соответствует дискретный уровень энергии.

В случае КТ естественно ввести понятие сечения рассеяния. Согласно (12), поток рассеянной энергии в интервал do_s телесного угла в единицу времени равен

$$\hbar\omega_l dW_l = \left(\frac{e^2}{m_0^2\omega_g^2}\right)^2 \frac{N_l\omega_l^5}{V_0\hbar c^3\nu}\sum_\mu\left|\sum_\eta A_\eta\right|^2 do_s. \qquad (13)$$

Поток энергии возбуждающего света на единицу площади в единицу времени равен

$$S_l = \frac{N_l\hbar\omega_l}{V_0}\,\frac{c}{\nu}. \qquad (14)$$

Разделив (13) на (14), получаем дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^4}{c^2\omega_g^4 m_0^4}\sum_\mu\left|\sum_\eta A_\eta\right|^2 do_s. \qquad (15)$$

Выражение (15) описывает угловую зависимость и (без суммы по μ) поляризацию рассеянного излучения. Если частота ω_l близка к энергии ω_η одного из состояний, наблюдается резонансное усиление рассеяния.

Если экситонное состояние вырождено (см. раздел 6), т. е. некоторой совокупности индексов η соответствует одна и та же энергия $\omega_\eta = \omega_0$ и функция $P_\eta(\mathbf{k}) = P(\mathbf{k})$ и от индекса η зависят только векторы $\mathbf{p}_{cv\eta}$, вклад этого состояния в сечение рассеяния равен

$$\frac{d\sigma_0}{do_s} = \sum_\mu \frac{d\sigma_\mu}{do_s}, \qquad (16)$$

$$\frac{d\sigma_\mu}{do_s} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^4}{c^2\omega_g^4 m_0^4}\left|\Xi_\mu(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_s)\right|^2 \frac{\left|P(\mathbf{k}_l)\right|^2\left|P(\mathbf{k}_s)\right|^2}{\left[(\omega_l-\omega_0)^2+\delta^2\right]}, \qquad (17)$$

где

$$\Xi_\mu(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_s) = \sum_\eta(\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_l)(\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_s)^*. \qquad (18)$$

Обозначим через R размер квантовой точки. Точка не должна быть обязательно сферической, она может иметь любую форму, тогда R — наибольший из линейных размеров.

Рассмотрим случай, когда длина световой волны много больше размера R, т. е. $kR \ll 1$. Тогда величина $P(\mathbf{k}_l) \simeq P(0) = \int d^3rF_\eta(\mathbf{r})$ не зависит от волнового вектора $\mathbf{k}$, и резонансный вклад в сечение описывается формулой (17), в которой следует произвести замену $|P(\mathbf{k}_l)|^2\,|P(\mathbf{k}_s)|^2 \simeq |P(0)|^4$.

Можно сделать следующие выводы. При $kR \ll 1$ поляризация и угловое распределение рассеянного света определяются только множителем $|\Xi_\mu(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_s)|^2$, содержащим векторы $\mathbf{p}_{cv\eta}$, т. е. не зависит ни от формы КТ, ни от волновой функции экситона. Величина сечения не зависит от размеров КТ. Разумеется, что от формы и размеров КТ зависит положение уровня E_η.

4. Радиационное затухание экситонов

Хорошо известно (см., например, [1–8]), что при условии $\nu = \nu_1$ точный учет взаимодействия электронов с электромагнитным полем, а также учет нерадиационных затуханий γ_η экситонов приводят к тому, что в (11) множитель $(\omega_l - \omega_\eta + i\delta)^{-1}$ заменяется на $\left(\omega_l - \tilde{\omega}_\eta + i(\gamma_{r\eta} + \gamma_\eta)/2\right)^{-1}$, где $\gamma_{r\eta}$ — радиационное затухание, $\hbar\tilde{\omega}_\eta$ — перенормированная энергия экситона. Вычисление радиационного затухания производится по формуле (1). Матричный элемент $M_{fi} = \langle f|V|i\rangle$ соответствует прямому переходу из начального состояния, в котором присутствует экситон η и нет фотонов, в конечное состояние, в котором возбуждения в кристалле отсутствуют, но рожден фотон с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией μ. Используя формулы (3)–(6), получаем

$$\gamma_{r\eta} = \frac{4\pi^2}{\hbar}\,\frac{e^2}{m_0^2\omega_g^2\nu^2V_0}\sum_{\mathbf{k},\mu}\omega_k\left|\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}}\right|^2\left|P_\eta(\mathbf{k})\right|^2\delta(\omega_\eta-\omega_k). \tag{19}$$

Заменив суммирование по $\mathbf{k}$ интегрированием, получаем результат

$$\gamma_{r\eta} = \frac{e^2\omega_\eta^3\nu}{2\pi\hbar\,m_0^2\omega_g^2c^3}\sum_\mu\int do_{\mathbf{k}_\eta}\left|\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}_\eta}\right|^2\left|P_\eta(\mathbf{k}_\eta)\right|^2, \tag{20}$$

где $\mathbf{k}_\eta$ — вектор, модуль которого равен $k_\eta = \omega_\eta\nu/c$. Формула (20) применима к любым экситонам в КЯ, КП или КТ при произвольных величинах параметра $k_\eta R$, где R ширина КЯ, диаметр КП или КТ. Для КТ при условии $k_\eta R \ll 1$ получаем

$$\gamma_{r\eta} = \frac{e^2\omega_\eta^3\nu\left|P_\eta(0)\right|^2}{2\pi\hbar m_0^2\omega_g^2c^3}\sum_\mu\int do_{\mathbf{k}_\eta}\left|\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}_\eta}\right|^2, \tag{21}$$

откуда следует, что радиационное затухание экситона не зависит от размеров КТ.

5. Оценка величины сечения рассеяния в резонансе

С учетом поправки к энергии экситона, а также радиационных и нерадиационных затуханий с помощью (16) и (17) получаем формулу для сечения рассеяния света любой КТ вблизи резонанса $\omega_l = \tilde{\omega}_0$:

$$\sigma_0 = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\frac{\omega_l^4}{\omega_g^4m_0^4c^2}\left|P(\mathbf{k}_l)\right|^2\left[(\omega_l-\tilde{\omega}_0)^2+(\gamma_r+\gamma)^2/4\right]^{-1}$$
$$\times\int do_s\left|P(\mathbf{k}_s)\right|^2\sum_\mu\left|\Xi(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_s)\right|^2. \tag{22}$$

Для оценки величины радиационного затухания используем (20). Предположим, что $\gamma \ll \gamma_r$. Тогда

$$\sigma_0(\omega_l = \tilde{\omega}_0) = \frac{c^2x}{\omega_l^2\nu^2} = k_l^{-2}x, \tag{23}$$

где $x \simeq 1$. Из (23) следует, что в том случае, когда радиационное затухание экситона превышает нерадиационное, что может выполняться в совершенных объектах, сечение рассеяния без изменения частоты в резонансе порядка квадрата длины волны падающего света. Этот результат справедлив как при условии $k_lR \ll 1$, так и в случае $k_lR \geq 1$ для любых КТ, в которых существуют экситонные уровни энергии.

6. Пример. Экситоны $\Gamma_6 \times \Gamma_7$ в кубических кристаллах класса T_d

В качестве примера рассмотрим экситон, образованный электроном из дважды вырожденной зоны проводимости Γ_6 и дыркой из дважды вырожденной валентной зоны Γ_7, отщепленной спин-орбитальным взаимодействием. Такой экситон рассмотрен в работе [9], с результатами которой будем сопоставлять наши результаты.

Согласно обозначениям из [17], волновые функции электронов имеют структуру

$$\Psi_{e1} = iS\uparrow, \qquad \Psi_{e1} = iS\downarrow, \tag{24}$$

а волновые функции дырок

$$\Psi_{h1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(X-iY)\uparrow - \frac{1}{\sqrt{3}}Z\downarrow,$$
$$\Psi_{h2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(X+iY)\downarrow + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\uparrow. \tag{25}$$

Комбинируя функции (24) и (25) попарно, получаем четырежды вырожденное экситонное состояние, для которого векторы $\mathbf{p}_{cv}$ равны

$$\mathbf{p}_{cv1} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y),$$
$$\mathbf{p}_{cv2} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y),$$
$$\mathbf{p}_{cv3} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_z,$$
$$\mathbf{p}_{cv4} = -\frac{p_{cv}}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_z, \tag{26}$$

где введен скаляр $p_{cv} = i\langle S|\hat{p}_x|X\rangle$; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — орты вдоль кристаллографических осей.

Будем рассматривать круговую поляризацию возбуждающего и рассеянного света, т. е. положим

$$\mathbf{e}_l^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{xl} \pm i\mathbf{e}_{yl}), \quad \mathbf{e}_s^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{xs} \pm i\mathbf{e}_{ys}), \tag{27}$$

где орты $\mathbf{e}_{xl}$ и $\mathbf{e}_{yl}$ перпендикулярны оси z_l вдоль вектора $\mathbf{k}_l$, орты $\mathbf{e}_{xs}$ и $\mathbf{e}_{ys}$ перпендикулярны оси z_s вдоль вектора $\mathbf{k}_s$.

Направление вектора $\mathbf{k}_l$ относительно кристаллографических осей считаем произвольным. Оно описывается углами ϑ_l, φ_l, где ϑ_l — угол между выбранной нами кристаллографической осью z и вектором $\mathbf{k}_l$. Аналогично направление вектора $\mathbf{k}_s$ описывается углами ϑ_s, φ_s.

Прямое вычисление величины $\Xi(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_s)$, определенной в (22), приводит к результатам

$$\Xi(\mathbf{e}_l^+, \mathbf{e}_s^+) = \Xi^*(\mathbf{e}_l^-, \mathbf{e}_s^-)$$
$$= \frac{p_{cv}^2}{3}\Big\{(1 + \cos\vartheta_l \cos\vartheta_s)\cos(\varphi_s - \varphi_l)$$
$$+ \sin\vartheta_l \sin\vartheta_s + i(\cos\vartheta_l - \cos\vartheta_s)\sin((\varphi_s - \varphi_l)\Big\}, \quad (28)$$

$$\Xi(\mathbf{e}_l^+, \mathbf{e}_s^-) = \Xi^*(\mathbf{e}_l^-, \mathbf{e}_s^+)$$
$$= \frac{p_{cv}^2}{3}\Big\{(1 - \cos\vartheta_l \cos\vartheta_s)\cos(\varphi_s - \varphi_l)$$
$$- \sin\vartheta_l \sin\vartheta_s + i(\cos\vartheta_l - \cos\vartheta_s)\sin((\varphi_s - \varphi_l)\Big\}. \quad (29)$$

Возводя (28) и (29) по модулю в квадрат, получаем

$$\left|\Xi(\mathbf{e}_l^+, \mathbf{e}_s^+)\right|^2 = \left|\Xi(\mathbf{e}_l^-, \mathbf{e}_s^-)\right|^2 = \frac{p_{cv}^4}{9}(1 + \cos\theta)^2, \quad (30)$$

$$\left|\Xi(\mathbf{e}_l^+, \mathbf{e}_s^-)\right|^2 = \left|\Xi(\mathbf{e}_l^-, \mathbf{e}_s^+)\right|^2 = \frac{p_{cv}^4}{9}(1 - \cos\theta)^2, \quad (31)$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{k}_l$ и $\mathbf{k}_s$. Заметим, что при распространении света вдоль кристаллографической оси z, т.е. $\mathbf{k}_l$ вдоль оси z, при поляризации $\mathbf{e}_l^+$ — возбуждается только экситон с $\eta = 1$ с $\mathbf{p}_{cv1} = (p_{cv}/\sqrt{3})(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)$, а при поляризации $\mathbf{e}_l^-$ — возбуждается только экситон с $\eta = 2$ с $\mathbf{p}_{cv2} = (p_{cv}/\sqrt{3}) \times (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)$. Однако при произвольном направлении света относительно кристаллографических осей возбуждаются все четыре экситона. Подставляя (30) и (31) в (17), получаем следующие результаты для дифференциальных сечений рассеяния

$$\frac{d\sigma^{++}}{do_s} = \frac{d\sigma^{--}}{do_s} = \Sigma_0 \frac{(1 + \cos\theta)^2}{9}, \quad (32)$$

$$\frac{d\sigma^{+-}}{do_s} = \frac{d\sigma^{-+}}{do_s} = \Sigma_0 \frac{(1 - \cos\theta)^2}{9}, \quad (33)$$

где верхний индекс $++$ означает поляризацию падающего (рассеянного) света $\mathbf{e}_l^+(\mathbf{e}_s^+)$ и т.д.,

$$\Sigma_0 = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^4 p_{cv}^4}{\omega_g^4 m_0^4 c^2} \frac{\left|P(\mathbf{k}_l)\right|^2 \left|P(\mathbf{k}_s)\right|^2}{\left((\omega_l - \omega_0)^2 + \delta^2\right)}. \quad (34)$$

Суммируя по поляризациям рассеянного света, получаем

$$\frac{d\sigma^+}{do_s} = \frac{d\sigma^-}{do_s} = \frac{2}{9}\Sigma_0(1 + \cos^2\theta), \quad (35)$$

где верхний индекс $+(-)$ означает поляризацию возбуждающего света $\mathbf{e}_l^+(\mathbf{e}_l^-)$. Наконец, полное сечение рассеяния $\sigma^+ = \sigma^-$ получается в результате интегрирования по углам, определяющим направление вектора $\mathbf{k}_s$. Множитель $|P(\mathbf{k}_l)|^2$ может обусловить зависимость сечения рассеяния (дифференциального и полного) от направления распространения света, например, если КТ представляет собою диск. В частном случае, когда величина $P(\mathbf{k})$ зависит только от модуля k, т.е.

$$P(k_l) = P(\mathbf{k}_s) = \mathscr{P}(\mathbf{k}_l R), \quad (36)$$

величина Σ_0 не зависит от направления векторов $\mathbf{k}_l$ и $\mathbf{k}_s$. Но и в этом случае, как следует из (34) и (35), рассеяние не является изотропным. При условии (36) интегрирование по углам, определяющим направление вектора $\mathbf{k}_s$, легко выполняется, и для полного сечения получаем результат

$$\sigma^+ = \sigma^- = \frac{32\pi}{27}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\omega_l^4 p_{cv}^4}{\omega_g^4 m_0^4 c^2} \frac{\left|\mathscr{P}(k_l R)\right|^4}{\left((\omega_l - \omega_0)^2 + \delta^2\right)}. \quad (37)$$

Например, используя „огибающую“ волновой функции (см., например, [9])

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\sin^2(\pi r/R)}{r^2} \theta(R - r), \quad (38)$$

получаем

$$\mathscr{P}(kR) = \frac{2}{kR}\int_0^\pi dx\, \sin\left(\frac{kRx}{\pi}\right)\frac{\sin^2 x}{x}, \quad \mathscr{P}(0) = 1. \quad (39)$$

При условии $k_l R \ll 1$ в выражениях (34) и (37) полагаем $P(\mathbf{k}) \simeq P(0)$ и получаем результаты, применимые в случае малых КТ любой формы, размеров и конфигурации к рассеянию на экситонах в кубических кристаллах класса T_d, в состав которых (экситонов) входит дырка из отщепленной валентной зоны. В случае тяжелых или легких дырок в составе экситонов получаются другие результаты, обусловленные другой структурой векторов $\mathbf{p}_{cv\eta}$. При условии $k_l R \geq 1$ может быть существенно, что мы не учитываем разности диэлектрических проницаемостей внутри и вне КТ.

Вычислим радиационное затухание для экситонов с векторами $\mathbf{p}_{cv\eta}$ из (26). В выражение (21) входит множитель $S_{\eta\mu} = |\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}}|^2$. Используя (26), получаем следующие результаты

$$S_{1+} = S_{2-} = \frac{p_{cv}^2}{6}(1 + \cos\vartheta)^2,$$

$$S_{1-} = S_{2+} = \frac{p_{cv}^2}{6}(1 - \cos\vartheta)^2,$$

$$S_{3+} = S_{3-} = S_{4+} = S_{4-} = \frac{p_{cv}^2}{6}\sin^2\vartheta, \quad (40)$$

где индексы от 1 до 4 соответствуют экситонным состояниям (26), индексы $+$ или $-$ описывают круговые поляризации $\mathbf{e}_\mathbf{k}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{x'} \pm i\mathbf{e}_{y'})$, если вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси z', ϑ — угол между осью z

кристалла и направлением $\mathbf{k}$. Суммируя величины $S_{\eta\mu}$ по поляризациям, получаем

$$S_1 = S_2 = \frac{p_{cv}^2}{3}\,(1+\cos^2\vartheta),$$

$$S_3 = S_4 = \frac{p_{cv}^2}{3}\,\sin^2\vartheta, \tag{41}$$

где $S_\eta = \Sigma_\mu |\mathbf{p}_{cv\eta}\,\mathbf{e}_{\mu\mathbf{k}}|^2$. Подставляя (41) в (21), получаем

$$\gamma_{r1} = \gamma_{r2} = \frac{e^2\omega_\eta^3 p_{cv}^2 \nu}{6\pi\hbar m_0^2\omega_g^2 c^2}\int do_{\mathbf{k}}(1+\cos^2\vartheta)|P(\mathbf{k})|^2,$$

$$\gamma_{r3} = \gamma_{r4} = \gamma_{r1}/2, \quad k = \omega_0\nu/c. \tag{42}$$

В случае (36), интегрируя по углам, определяющим направление $\mathbf{k}$, получаем

$$\gamma_{r1} = \gamma_{r2} = \frac{8}{9}\,\frac{e^2\omega_\eta^3 p_{cv}^2\nu}{\hbar m_0^2\omega_g^2 c^3}\,\big|\mathscr{P}(kR)\big|^2, \tag{43}$$

$$\gamma_{r3} = \gamma_{r4} = \gamma_{r1}/2. \tag{44}$$

В случае $kR \ll 1$ для радиационных затуханий экситонов $\Gamma_6\times\Gamma_7$ в КТ любой формы, конфигурации и размеров получаем выражения (44), в которых множитель $|\mathscr{P}(kR)|^2$ заменен на $|P(0)|^2$. Результат (43) при $P(0) = 1$ совпадает с формулой (6) из [9], если в последней положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \nu^2$.

7. Выводы

С помощью квантовой теории возмущений в низшем порядке по взаимодействию света с электронами вычислено число переходов в единицу времени с поглощением кванта l падающего света и испусканием кванта s рассеянного света. Результат применим к любым полупроводниковым объектам пониженной размерности — КЯ, КП или КТ — в условиях размерного квантования (см. (12)). В случае КЯ полученное выражение позволит вычислить безразмерный коэффициент отражения света, в случае КП — сечение рассеяния на единицу длины, в случае КТ — сечение рассеяния размерности cm^2.

Получена формула (17) для дифференциального сечения резонансного рассеяния на любом экситоне в квантовой точке любой формы, конфигурации и размеров.

При условии $kR \ll 1$, где k — модуль волнового вектора света, R — размер КТ, поляризация и угловое распределение рассеянного света не зависят ни от формы КТ, ни от „огибающей“ волновой функции экситона, а только от векторов $\mathbf{p}_{cv\eta}$, которые представляют собой недиагональные матричные элементы квазиимпульса экситонных состояний, а величина сечения рассеяния не зависит от размеров КТ.

С помощью квантовой теории возмущений получена формула (20) для радиационного затухания экситона с набором индексов η, применимая к любым экситонам в любых КЯ, КП или КТ при произвольных величинах параметра $k_\eta R$, где R — ширина КЯ, диаметр КП или размер КТ, $k_\eta = \omega_\eta\nu/c$, $\hbar\omega_\eta$ — энергия экситона, ν — коэффициент преломления, который считаем одинаковым внутри объекта и вне его.

Для КТ при условии $k_\eta R \ll 1$ находим, что радиационное затухание не зависит от размеров квантовой точки (см. (21)).

Оценка величины полного сечения рассеяния в точке резонанса $\omega_l = \tilde{\omega}_0$ показывает, что при условии $\gamma \ll \gamma_r$ сечение порядка $(\lambda_l/2\pi)^2 x$, где x — число.

Разобран пример экситона $\Gamma_6\times\Gamma_7$ в кубических кристаллах T_d. Для этого экситона $x = 6\pi$.

Список литературы

[1] L.C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. Solid State Commun. **77**, 641 (1991).
[2] L.C. Andreani, G. Pansarini, A.V. Kavokin, M.R. Vladimiriva. Phys. Rev. B **57**, 4670 (1998).
[3] L.C. Andreani. Confined electrons and photons / Eds E. Burstein, C. Weisbuch. Plemun Press, N. Y. (1995).
[4] Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин. ФТТ **34**, 1815 (1992).
[5] И.Г. Ланг, С.Т. Павлов, Л.И. Коровин. ФТТ **46**, 1706 (2004); cond-mat/0311180.
[6] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, 2091 (2001); cond-mat/0104262.
[7] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **44**, 2084 (2002); cond-mat/0001248.
[8] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, С.Т. Павлов. ФТТ **48**, 1693 (2006); cond-mat/0403519.
[9] S.V. Goupalov. Phys. Rev. B **68**, 125 311 (2003).
[10] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Phys. Lett. A **245**, 329 (1998).
[11] D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov, L.I. Korovin, I.G. Lang. Phys. Rev. B **62**, 16 815 (2000); cond-mat/0002229.
[12] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **44**, 1681 (2002); cond-mat/0203390.
[13] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **42**, 2230 (2000); cond-mat/0006364.
[14] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, 1117 (2001); cond-mat/0004178.
[15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982).
[16] J.M. Luttinger, W. Kohn. Phys. Rev. **97**, 869 (1955).
[17] И.М. Цидильковский. Зонная структура полупроводников. Наука. М, (1978). С. 73.