

601; 10

УСТОЙЧИВОСТЬ ИОНОВ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ

Е. В. Буляк

Изложена самосогласованная теория устойчивости ионов в последовательности электронных сгустков. В теории учтено изменение плотности ионного остова, вызванное движением ионов в фокусирующем поле сгустков и дефокусирующем собственном поле. На основе предположения о периодическом ламинарном движении ионов на пределе их устойчивости определена функциональная зависимость максимально возможного коэффициента зарядовой компенсации пучка от тока этого пучка и геометрии составляющих его сгустков. Приведены результаты расчетов для случаев цилиндрического и плоского сечений пучков с однородной плотностью электронов в сгустках.

Приведены результаты численного эксперимента по изучению зависимости компенсации от интенсивности пучка. Сравнение этих результатов с предсказаниями самосогласованной теории и известной ранее теории жесткого остова подтверждают обоснованность модельных предположений самосогласованной теории.

1. Проходящие через газ пучки электронов ионизируют атомы этого газа и удерживают образовавшиеся положительные ионы коллективным кулоновским полем. Поле объемного заряда захваченных ионов оказывает весьма существенное влияние на поперечную динамику электронов [1]. Кроме того, наличие ионов на орбите пучка приводит к увеличению эффективной плотности газа (ухудшает вакуумные условия). Для адекватного учета эффектов, вызываемых ионным остовом, необходимо установить функциональную зависимость предельной плотности захваченных ионов от тока и геометрических параметров пучка. Оценки плотности остова особенно просто сделать для непрерывных пучков: ионы будут накапливаться до тех пор, пока не компенсируют заряд пучка в каждой точке пространства. Однако в силу специфики механизмов ускорения пучки ультрарелятивистских электронов не непрерывны, а представляют собой последовательности отдельных сгустков.

Оценки плотности ионов, захваченных периодической последовательностью сгустков, ранее были произведены на основе модели неподвижного остова [2]. В этой модели была изучена устойчивость поперечного движения отдельного пробного иона в последовательности фокусирующих (сгустки) и дефокусирующих (ионный остов) линз в предположении, что плотность остова не изменяется во времени. В рамках модели определены пороговый ток компенсации I_0 и предельная относительная плотность ионов η как функция безразмерной интенсивности пучка G

$$G = 2\pi R_0 \bar{n}_B \lambda_0^3, \quad \eta = \frac{n_B}{n_p}, \quad (1)$$

где R_0 — классический радиус иона, \bar{n}_B — средняя по периоду следования сгустков плотность пучка, n_B — плотность ионов в пучке, λ_0 — пространственный период следования сгустков.

Форма области устойчивости на плоскости (G, η) при этом определяется относительной длиной сгустка Θ и энергией ионов.

Анализ результатов, следующих из модели неподвижного остова, показывает, что она применима только при малых значениях интенсивности G или плотности остова η . При $G \ll 1$ пучок квазинепрерывен, а при $\eta \ll 1$ плотность

остова мала и не влияет на динамику пробного иона. Однако с ростом G увеличивается глубина модуляции ионного остова (рис. 4). Тем самым нарушается модельное положение о неизменности остова во времени. Следовательно, вдали от координатных осей на плоскости (G, η) необходимо учитывать изменение плотности остова на периоде следования сгустков. Целью настоящей работы является построение самосогласованной теории устойчивости ионного остова в последовательности электронных сгустков с учетом пульсации плотности этого остова.

2. Устойчивость остова определим на основе ламинарного подхода [3]. Суть подхода заключается в следующем. Увеличение плотности остова при заданных параметрах пучка ведет к уменьшению его поперечной энергии (фазового объема) за счет уменьшения глубины результирующей потенциальной ямы. На границе устойчивости фазовый объем остова равен нулю [3]. Траектории отдельных ионов в таком ансамбле не пересекаются (или пересекаются в фиксированных точках пространства), т. е. их движение имеет ламинарный характер. Вторым условием, определяющим границу области устойчивости в данной физической системе, является периодичность траекторий ионов с частотой следования сгустков.

Исходя из этих двух модельных положений (непересекающихся и периодических траекторий ионов), установим предельную плотность остова, который

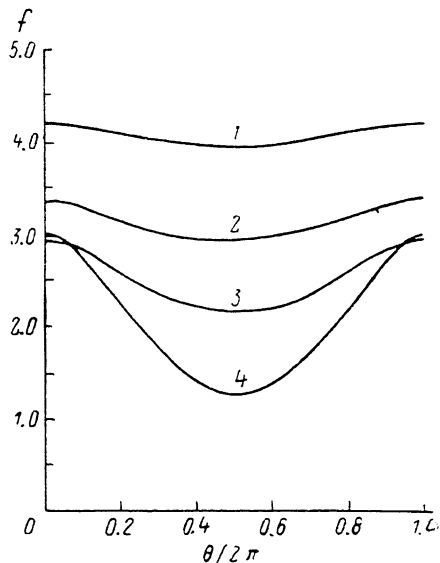


Рис. 4. Огибающие поперечных колебаний пробного иона в модели жесткого ионного остова.

$\eta=0.8$; $G=0.1$ (1), 0.25 (2), 0.5 (3), 1.0 (4).

может удерживаться цилиндрическими однородно заряженными сгустками радиуса a и относительной длины Θ , следующими с пространственным периодом λ_0 . Ограничим рассмотрение случаем длинных сгустков $\lambda_0 \Theta \gg a$, интенсивность которых такова, что время пролета сгустка мимо иона мало по сравнению с характерным временем колебания иона $G \ll 4\pi^2/\Theta^2$. Будем исследовать движение ионов, образующих границу остова (т. е. ионов, которые в сгустке располагаются на его границе $r=a$).

3. В свободном от сгустков пространстве граничные ионы движутся в логарифмическом потенциале ионного остова

$$U(r) = -G\eta Mc^2 \left(\frac{a}{\lambda_0}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{r_a}\right), \quad (2)$$

где M — масса ионов, c — скорость света, r_a — начальный радиус остова.

Потенциал (2) имеет логарифмическую особенность на оси пучка. Это означает, что существует минимальный радиус r_{\min} , до которого стягивается остов с начальной энергией граничных ионов E_a ,

$$r_{\min} = r_a \exp\left[-\frac{E_a}{G\eta Mc^2} \left(\frac{a}{\lambda_0}\right)^2\right]. \quad (3)$$

Остов достигает этого радиуса через интервал времени

$$t_0 = \frac{r_a}{c} \left(\frac{2}{\eta G}\right)^{1/2} \frac{\lambda_0}{a} F\left[\frac{\lambda_0}{a} \left(\frac{E_a}{G\eta Mc^2}\right)^{1/2}\right]. \quad (4)$$

Здесь $F(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$ — функция Дюсона [3].

Отметим, что в асимптотическом случае $\eta \rightarrow 0$ ($F(x) = 1/2x$ при $x \gg 1$) уравнение (4) описывает свободное движение

$$t_0 = \frac{r_a}{\dot{r}_a}.$$

Учитываем условие периодичности траекторий: минимального размера остов достигает на середине свободного промежутка

$$t_0 = \frac{\lambda_0(1-\theta)}{2c}. \quad (5)$$

Приравнивая (4) и (5), получаем соотношение, определяющее границу области устойчивости остова с начальной энергией граничных ионов E_a ,

$$1 = \frac{r_a}{a(1-\theta)} \left(\frac{8}{\eta c}\right)^{1/2} F \left[\frac{\lambda_0}{a} \left(\frac{E_a}{G\eta M c^2}\right)^{1/2} \right]. \quad (6)$$

4. Энергию E_a и положение r_a граничных ионов в начале свободного промежутка находим из решения уравнения движения этих ионов в предшествующем сгустке при наличии компенсирующего остова. Согласно приведенным выше модельным положениям, в центральном сечении сгустка ионы неподвижны. При этом отклонение граничного иона от оси равно радиусу пучка $r = a$. В сгустке этот ион движется в потенциале

$$U_s(r) = \frac{G}{2} M c^2 \left(\frac{a}{\lambda_0}\right) \left(\frac{r^2 - a^2}{a^2 \theta} - 2\eta \ln \frac{r}{a}\right); \quad r \leq a. \quad (7)$$

За время пролета половины сгустка $\tau = \lambda_0 \theta / 2c$ он приобретает энергию E_a и смещается к оси до радиуса r_a . С точностью до величины

$$\delta = G^2 \theta^3 \eta \frac{(1-\eta\theta)^2}{192} \ll 1$$

находим зависимость начальной энергии и положения граничного иона от интенсивности и геометрических параметров сгустка

$$E_a = \frac{G}{2} M c^2 \left(\frac{a}{\lambda_0}\right)^2 \left(\frac{1-\zeta^2}{\theta} + 2\eta \ln \zeta\right); \quad r_a = \zeta a, \quad (8)$$

где введено обозначение

$$\zeta = 1 - \frac{1-\eta\theta}{1+\eta\theta} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{G}{4} \theta (1-\eta\theta) \right]^{1/2} \right\}.$$

Подставляя (8) в (6), находим уравнение для границы области устойчивости ионов в последовательности цилиндрических сгустков

$$1 = \frac{2\zeta}{(1-\theta)} \left(\frac{2}{\eta c}\right)^{1/2} F \left[\left[\frac{1}{2\eta} \left(\frac{1-\zeta^2}{\theta} + 2\eta \ln \zeta\right) \right]^{1/2} \right]. \quad (9)$$

Это уравнение определяет неявную зависимость η (G, θ). Граница области устойчивости на плоскости (G, η) определяется единственным внешним параметром θ — относительной длиной сгустков. Воспользовавшись асимптотиками функции Дюсона, находим точки пересечения границы с координатными осями

$$1 = 2 \left(\frac{\theta}{G}\right)^{1/2} \frac{\text{ctg} \left(\frac{\theta G}{4}\right)^{1/2}}{(1-\theta)}; \quad \eta = 0, \\ 1 = \eta; \quad G = 0. \quad (10)$$

Как следует из этой асимптотики, $G \rightarrow 4$ при $\theta \rightarrow 0$, что совпадает с аналогичным результатом модели неподвижного остова [2].

5. В некоторых условиях эксперимента, например в накопителях электронов, поперечное сечение пучка вытянуто по одной из поперечных координат (эллипс). Провести аналитические расчеты области устойчивости для эллиптической формы сечения пучка довольно сложно, однако значительную долю ин-

формации можно получить при рассмотрении одномерного движения ионов в плоском пучке (предельном случае вытянутого эллипса).

Рассмотрим движение граничных ионов вдоль короткой стороны однородно заряженной ленты прямоугольного сечения $2a \cdot 2b$ ($a \ll b$). В отсутствие сгустка потенциал, в котором движется граничный ион, не имеет особенности в нуле (в отличие от (2))

$$U(x) = 2\eta M c^2 G \left(\frac{a}{\lambda_0}\right)^2 \frac{|x_a| - |x|}{a}; \quad |x| \leq |x_a| \leq a, \quad (11)$$

где $2x$ — толщина остова.

Выполняя расчеты, аналогичные приведенным выше для круглого пучка, получим уравнение границы области устойчивости ионного остова в плоском пучке (ср. (8))

$$1 = \frac{2}{1-\theta} \left(\frac{\varphi\alpha}{\eta G}\right)^{1/2} (1-\xi), \quad (12)$$

где использованы обозначения

$$\varphi = \eta\theta + (1-\eta\theta) \cos\left(\frac{\theta G}{2}\right)^{1/2} = \frac{x_a}{a};$$

$$\alpha = \frac{1}{2\eta\theta\varphi} [1 - \varphi^2 + 2\eta\theta(\varphi - 1)];$$

$$\xi = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} & \alpha > 1; \\ 0 & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Пересечение границы с координатными осями на плоскости (G, η) происходит в точках, определяемых равенствами

$$1 = \left(\frac{2\theta}{G}\right)^{1/2} \frac{\text{ctg}\left(\frac{\theta G}{2}\right)^{1/2}}{(1-\theta)}; \quad \eta = 0, \\ 1 = \eta; \quad G = 0. \quad (13)$$

Асимптотика (13) при $\eta=0$ находится вдвое ближе к началу координат, чем (9): $G \rightarrow 2$ при $\theta \rightarrow 0$. Этот сдвиг обусловлен тем, что при равной плотности фокусирующая сила на поверхности плоского пучка в 2 раза больше, чем на поверхности круглого.

На рис. 2 представлены границы области устойчивости, рассчитанные по выражениям (8) и (11). Из рисунка видно, что эти границы в рассматриваемой здесь самосогласованной модели и модели жесткого остова [2] совпадают в точках пересечения координатных осей. Однако в самосогласованной модели коэффициент компенсации уменьшается с ростом интенсивности G и уменьшением относительной длины сгустка θ . Самосогласованная граница области устойчивости замкнута и, что особенно важно, в этой модели существует определенное значение интенсивности пучка G , выше которого остов не удерживается.

Пересечение границ плоского пучка для различных относительных длин сгустков вызвано тем, что мы пренебрегли движением ионов вдоль длинной стороны сечения пучка b .

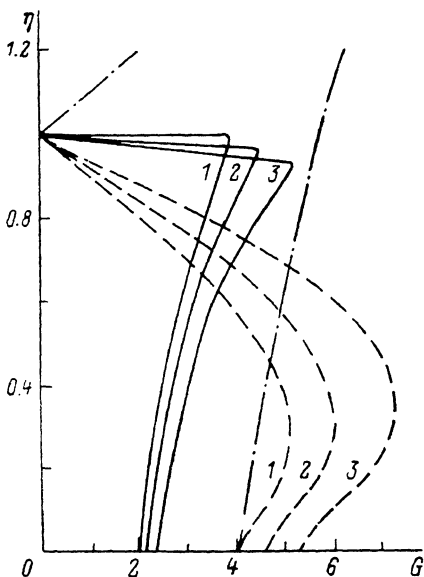
6. Как видно из рис. 2, самосогласованная модель и модель неподвижного остова дают качественное различие в функциональной зависимости предельного коэффициента компенсации η от безразмерной интенсивности пучка G при фиксированной относительной длине сгустков. Этим различием мы воспользовались для установления соответствия моделей реальным условиям эксперимента. Нами был проведен численный эксперимент по изучению зависимости $\eta(G)$. Специально для эксперимента разработана программа, решающая кинетическое одночастичное уравнение для функции распределения ионов в цилиндрической геометрии

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{P_r}{M} \frac{\partial f}{\partial r} + \left(F_n - U_r + \frac{P_\varphi^2}{Mr^3}\right) \frac{\partial f}{\partial P_r} = F_{\text{вст}}(r, P_r) + \hat{D}f;$$

$$\Delta U = -4\pi e \int_{P_r} f(r, P_r) dP_r, \quad (14)$$

где $P_\varphi = Mr^2 \dot{\varphi}$ — канонический тангенциальный импульс, F_B — фокусирующая сила кулоновского поля пучка, $U(r)$ — потенциал самосогласованного кулоновского поля ионов.

Левая часть уравнения (14) представляет собой уравнение Власова, описывающее движение ионов в дальнедействующих кулоновских полях ионного остова и пучка электронов. Члены в правой



части учитывают источник образующихся из нейтрального газа ионов ($F_{\text{вст}}$) и диффузию ионов по импульсам вследствие нагрева короткодействующей составляющей кулоновских сил пучка ($\hat{D}f$).

Мы моделировали цилиндрический пучок, состоящий из периодической последовательности сгустков с релейским распределением плотности по радиусу и однородным — вдоль орбиты. Были проведены численные эксперименты по исследованию зависимости коэффициента компенсации η от безразмерной плотности пучка G . Для поддержания идентичных условий численного эксперимента

Рис. 2. Границы области устойчивости ионного остова. Штриховая линия — круглый пучок, сплошная — плоский пучок. θ : 1 — 0.001, 2 — 0.1, 3 — 0.2. Штрихпунктир — модель жесткого остова, $\theta = 0.001$.

средний ток пучка, относительная длина сгустков и их полное число были постоянными, изменение безразмерной интенсивности пучка G достигалось изменением пространственного периода сгустков λ_0 : ($G \sim \lambda_0^2$).

Полученные из численного эксперимента зависимости коэффициента компенсации η от интенсивности пучка G для относительной длины сгустков $\theta = 0.1$ представлены на рис. 3. Из результатов эксперимента следует, что коэффициент компенсации монотонно уменьшается с ростом G . Сравнение результатов эксперимента с предсказаниями изложенной выше самосогласованной модели и модели жесткого остова указывает на качественное согласие эксперимента и самосогласованной теории. Количественные различия объясняются различием радиальных профи-

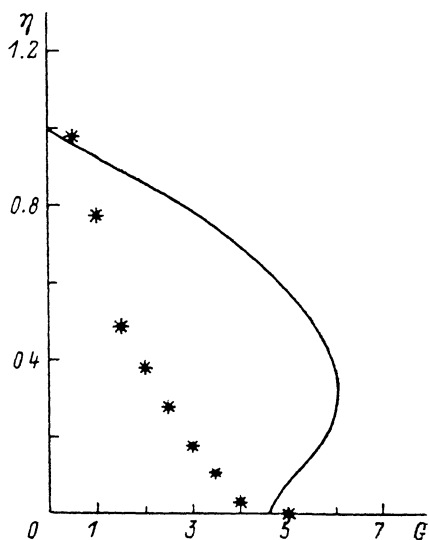


Рис. 3. Результаты численного эксперимента (звездочки) и граница области устойчивости (сплошная линия) ($\theta = 0.1$).

лей плотности в численной и теоретической моделях, а также присутствием в пучке создающих компенсацию неустойчивых ионов (для обеспечения моделирования предельной компенсации устанавливалась относительно большая плотность нейтрального газа).

7. Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом: предложена самосогласованная модель компенсации заряда пульсирующего пучка электронов положительными ионами остаточного газа; на основе предло-

женной модели определена функциональная зависимость максимальной плотности ионов от геометрии и интенсивности пучка; проведен численный эксперимент, результаты которого подтвердили соответствие основных модельных положений самосогласованной теории реальным условиям.

Из полученных результатов вытекают следующие выводы: максимальная устойчивая плотность ионов в последовательности сгустков меньше, чем в непрерывном пучке; коэффициент компенсации уменьшается с уменьшением относительной длины сгустков и с ростом расстояния между ними при фиксированных поперечных размерах пучка и его средней интенсивности; существует определенная интенсивность пучка заданной геометрии, при превышении которой ионный остов теряет устойчивость ($\eta \rightarrow 0$); уплотнение пучка при сохранении его плотности повышает коэффициент компенсации.

Следует отметить, что предсказания модели неподвижного остова [2] (например, перекомпенсация), возможно, будут справедливы и вдали от координатных осей на плоскости (G, η) при наличии в составе ионного остова различных по отношению заряда к массе ионов: в этих условиях тяжелые ионы могут формировать неподвижный остов, который увеличит устойчивость легких ионов за счет эффекта сильной фокусировки.

В заключение автор выражает признательность проф. В. И. Курилко за плодотворные обсуждения результатов работы.

Список литературы

- [1] Буляк Е. В., Курилко В. И. // Тр. Конф. по ядерно-физич. исследованиям. М. 1988. Т. 1. С. 259—271.
- [2] Буляк Е. В. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 1. С. 72—76.
- [3] Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980.

Харьковский физико-технический
институт АН УССР

Поступило в Редакцию
13 апреля 1988 г.

