Необходимые и достаточные условия наличия в пространстве глобальных потенциалов

© А.Н. Агеев*, А.Г. Чирков**

* Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
** Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageev38@mail.ru, chirkovag@rambler.ru

*(Поступила в Редакцию 23 мая 2006 г.
В окончательной редакции 12 октября 2006 г.)*

Показано, что для возбуждения глобального потенциала требуются либо наличие магнитного потока в ограниченной области пространства, либо скачки поля. Обсуждается проблема обнаружения магнитного эффекта Ааронова–Бома.

PACS: 75.50.-y, 75.45.+j, 03.65.Ud

Как известно [1], главной проблемой для обнаружения магнитного эффекта Ааронова–Бома является возбуждение векторного потенциала в области пространства, где отсутствует магнитное поле. Первые опыты по наблюдению эффекта Ааронова–Бома были осуществлены с помощью ферромагнитного уса [1], а более надежные результаты получены с использованием минисоленоидов и торов [2,3]. При теоретической интерпретации эффекта было показано, что необходимо иметь особую топологию пространства, при которой в нем существуют двусвязные области. Во всех упомянутых выше случаях теоретического изучения эффекта происходил скачок магнитного поля на границе двух областей, т. е. с математической точки зрения имелся разрыв функции, описывающей магнитное поле. В этом случае действительно пространство распадается на две области, в одной из которых имеются только потенциалы, но не поля. Потенциалы, какая-либо циркуляция которых не равна нулю, были названы нами глобальными [4]. Стандартное решение электродинамической задачи сводится к использованию уравнения Максвелла для каждой из этих областей с последующим „сшиванием“ полученных решений на границе раздела.

Возникает принципиальный вопрос: необходим ли для возникновения глобального потенциала скачок поля или достаточно иметь магнитный поток в ограниченной области пространства, не предъявляя к образующему его полю никаких требований? Для решения этого вопроса рассмотрим следующий частный случай. В области пространства имеется магнитное поле, обладающее цилиндрической симметрией и описываемое выражением

$$B_z(\rho) = \begin{cases} B_0\,F(\rho) & \text{при} \quad \rho \le R, \\ 0 & \text{при} \quad \rho \ge R. \end{cases} \qquad (1)$$

Нами выбрана цилиндрическая система координат $(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \mathbf{z}_0)$, ρ — радиальная координата, R — радиус области с полем, B_0 — магнитное поле на оси симметрии, $F(\rho)$ — функция радиального распределения поля. Вдоль оси z магнитный цилиндр бесконечен в том же смысле, который обсуждался в [5].

Учитывая цилиндрическую симметрию, легко получить уравнение для единственной отличной от нуля составляющей векторного потенциала — азимутальной компоненты

$$\frac{\partial A_\alpha(\rho)}{\partial \rho} + \frac{A_\alpha(\rho)}{\rho} = B_z(\rho). \qquad (2)$$

Учитывая физические ограничения, накладываемые на возможные решения, получаем

$$A_\alpha(\rho) = \begin{cases} \frac{B_0}{\rho} \int\limits_0^\rho \rho\,F(\rho)d\rho & \text{при} \quad \rho \le R, \\ \frac{C}{\rho} & \text{при} \quad \rho \ge R. \end{cases} \qquad (3)$$

Обратим внимание на то, что при любой функции $F(\rho)$ имеют место два решения: внутри и снаружи цилиндра, что является следствием двусвязности пространства. Сшивая решения на границе, получаем выражение для константы C

$$C = B_0 \int\limits_0^R \rho\,F(\rho)\,d\rho. \qquad (4)$$

В качестве примера рассмотрим простейший случай радиального распределения поля

$$F(\rho) = \begin{cases} (1 - \rho/R) & \text{при} \quad \rho < R, \\ 0 & \text{при} \quad \rho > R. \end{cases} \qquad (5)$$

В этом случае имеем

$$A_\alpha = \begin{cases} B_0\,R\left[\frac{\rho}{2R} - \frac{\rho^2}{3R^2}\right] & \text{при} \quad \rho \le R, \\ \frac{B_0 R^2}{6\rho} & \text{при} \quad \rho \ge R. \end{cases} \qquad (6)$$

На рис. 1 приведены графики радиальной зависимости касательной составляющей векторного потенциала для случая (5).

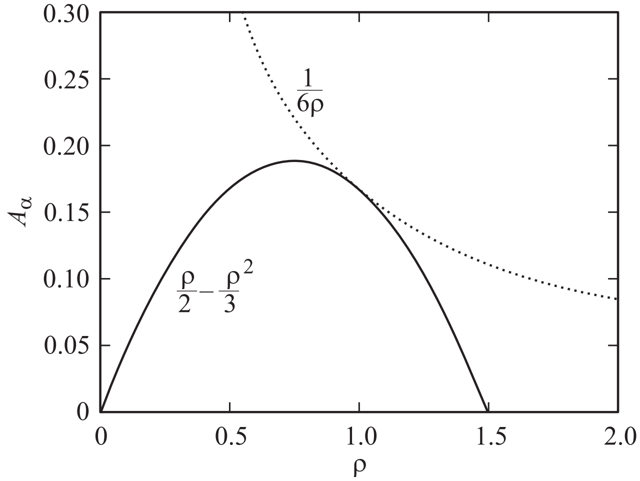

Рис. 1. Радиальная зависимость векторного потенциала для функции распределения поля (5) при $B_0 = R = 1$. Сплошная кривая — при $\rho \le R$, пунктирная — при $\rho \ge R$.

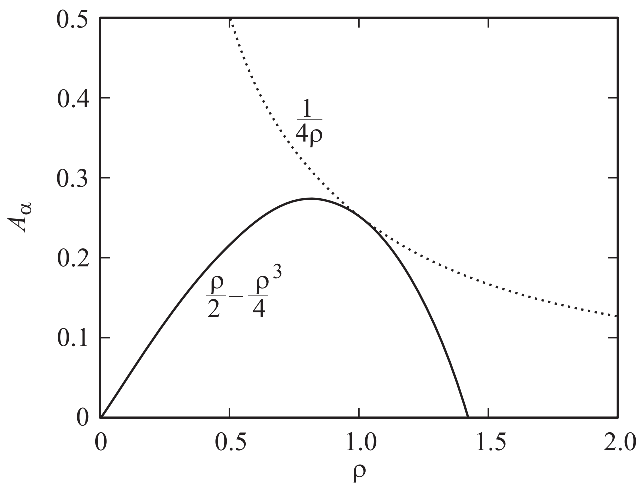

Рис. 2. Радиальная зависимость векторного потенциала для функции распределения поля (7) при $B_0 = R = 1$. Сплошная кривая — при $\rho \le R$, пунктирная — при $\rho \ge R$.

При другом распределении поля

$$F(\rho) = \begin{cases} (R^2 - \rho^2) & \text{при} \quad \rho < R, \\ 0 & \text{при} \quad \rho > R \end{cases} \tag{7}$$

имеем

$$A_\alpha(\rho) = \begin{cases} B_0\,\rho\left[\frac{R^2}{2} - \frac{\rho^2}{4}\right] & \text{при} \quad \rho \le R, \\ \frac{B_0 R^4}{4\rho} & \text{при} \quad \rho \ge R. \end{cases} \tag{8}$$

Соответствующие графики приведены на рис. 2.

В третьем случае возьмем

$$F(\rho) = \begin{cases} 2\cos^2\left(\frac{\rho^2\pi}{2R^2}\right) & \text{при} \quad \rho < R, \\ 0 & \text{при} \quad \rho > R. \end{cases} \tag{9}$$

Имеем

$$A_\alpha(\rho) = \begin{cases} B_0\,\rho^{-1}\left[\frac{\rho^2}{2R^2} + \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi\rho^2}{R^2}\right)\right] & \text{при} \quad \rho \le R, \\ \frac{B_0}{2\rho} & \text{при} \quad \rho \ge R. \end{cases} \tag{10}$$

График касательной составляющей потенциала качественно такой же, как в предыдущих случаях.

Таким образом, для возбуждения глобального потенциала требуются либо наличие магнитного потока в ограниченной области пространства, либо скачки поля. Как вариант эксперимента с магнитным полем без скачков можно, например, для наблюдения эффекта Ааронова–Бома использовать ферримагнитный ус из иттрий-железного граната с постепенным замещением железа галлием по мере удаления от оси уса. На границе уса мы можем получить чисто иттрий-галлиевый немагнитный гранат.

Список литературы

[1] R.G. Chambers. Phys. Rev. Lett. **5**, 3 (1960).
[2] G. Möllenstedt, W. Bayh. Naturwissenschaften **49**, 81 (1962).
[3] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, H. Yamada. Phys. Rev. Lett. **56**, 792 (1986).
[4] А.Г. Чирков, А.Н. Агеев. Письма в ЖФТ **26**, 103 (2000); ФТТ **44**, 3 (2002).
[5] И.Е. Тамм. Основы теории электричества. Наука, М. (1989). 504 с.