С целью экспериментальной проверки полученного соотношения (5) были проведены численные расчеты периода возврата Пуанкаре для простых динамических систем со стохастическим поведением. Так, для квадратичного отображения единичного отрезка в себя $x_{n+1} = \alpha x_n (1-x_n)$ при значениях $\alpha > \alpha_{\text{1 p}} = 3.56\ldots$ средние времена возврата оказались равными около $\varepsilon^{-1}$ и практически не зависящими от $\alpha$.

Для отображения Хенона ($N=2$) формула (5) также получила численное подтверждение. При $\varepsilon = 10^{-2}$ средний период возврата имеет порядок $10^4$. Проиллюстрируем возможные следствия указанного результата. Например, при численном построении двумерного закона распределения $P(x, y)$, описывающего аттрактор Хенона, требуется обеспечить наличие в каждом элементе дискретизации фазового пространства не менее $n_0$ точек ($n_0 > 1$). Спрашивается, какое число итераций $N_0$ отображения позволит получить ожидаемый результат (при заданном $n_0$). Нетрудно видеть, что число итераций $N_0$ должно удовлетворять неравенству

$$N_0 > \langle T_B(\varepsilon) \rangle n_0 = V n_0 \varepsilon^{-2}. \tag{6}$$

Значит, если $n_0 = 10^2$, то число итераций $N_0$ отображения для вычисления двумерной плотности $P(x, y)$ должно быть не менее $10^6$ при $V \approx 1$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

В заключение отметим важное обстоятельство. В силу конечной и относительно не высокой точности счета (например, при использовании персональных компьютеров среднего класса) хаотические траектории одномерных отображений в итоге будут характеризоваться наличием периода. Это принципиальная погрешность, обусловленная конечной точностью и наличием периода возврата Пуанкаре. Для динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 2$ времена возврата резко возрастают и, как правило, в обычных численных экспериментах не достигаются.

## Список литературы


[1] *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 463 с.
[2] *Семесенко М. П.* Препринт Института кибернетики. № 78-21. Киев, 1978.
[3] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.



Поступило в Редакцию
6 июня 1988 г.
В окончательной редакции
28 ноября 1988 г.


---


01 *Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989*


# ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР


*Д. М. Ваврив, В. Б. Рябов*


Фундаментальной характеристикой самоподобных объектов, возникающих, например, при моделировании турбулентности [1], кластерных структур в теории просачивания [2], стохастических колебаний [3], является фрактальная размерность Хаусдорфа—Безиковича $D_H$ [4]. Значение $D_H$ принципиально важно для оценки эффективного числа степеней свободы и для различения стохастических колебаний и шумов.

Непосредственное вычисление $D_H$ связано с большими математическими и вычислительными трудностями, и, насколько нам известно, в настоящее время существует лишь один относительно быстро сходящийся метод [5], определяющий функцию размерности $D(\gamma)$, который в принципе позволяет вычислить точно значение $D_H$. Однако наиболее широко используемый подход к оценке $D_H$ основывается на расчете корреляционной размерности $D_\nu$ [6], строгое соответствие которой с $D_H$ не установлено, известно только, что $D_\nu \leqslant D_H$.

Целью данной работы является доказательство тождественности этих величин ($D_\nu \equiv D_H$) для самоподобных структур. Для конкретности мы будем говорить о странных аттракторах (СА).

Рассмотрим ограниченную область $V$ $n$-мерного фазового пространства, в которой расположен СА. Пусть имеется набор из $N$ точек, принадлежащих СА и распределенных по нему в соответствии с инвариантной мерой [4]. Введем функцию распределения вероятностей для расстояний между точками

$$F(r) = P\{d_{ij} < r\}, \tag{1}$$

где $P$ — вероятность того, что расстояние $d_{ij}$ между любыми двумя точками $i$ и $j$ из $N$ ($i, j = 1, 2, \ldots, N$) меньше $r$.

В соответствии с [6] $F(r)$ пропорциональна корреляционному интегралу $C(r)$

$$C(r) = \frac{N(N-1)}{2N^2} F(r). \tag{2}$$

Под самоподобными будем понимать такие системы, для которых функция распределения расстояний $F(r)$ при $r \ll r_c$, где $r_c$ — характерный размер аттрактора, точно определяется выражением

$$F(r) = A r^{\alpha}, \tag{3}$$

где $A = 1/r_{\max}^{\alpha}$ — нормировочный коэффициент, $\alpha$ — показатель самоподобия системы, $r_{\max}$ — максимальный размер аттрактора.

К таким системам, в частности, относятся однородные канторовские множества [7] и все системы, обладающие масштабной инвариантностью.

Из определения размерности $D_{\nu}$ [6] следует

$$D_{\nu} = \lim_{r \to 0} \frac{d[\ln C(r)]}{d[\ln r]}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) непосредственно получаем, что $D_{\nu} = \alpha$.[1]

Определим теперь связь между введенной функцией $F(r)$ и $D(\gamma)$. По определению [5],

$$\frac{1}{D(\gamma)} = -\lim_{N \to \infty} \frac{d[\ln \bar{\delta}(\gamma) N)]}{d[\ln N]}, \tag{5}$$

где

$$\bar{\delta}(\gamma, N) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_i^{\gamma}\right]^{1/\gamma}. \tag{6}$$

Здесь $\delta_i$ — расстояние от точки с номером $i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) до ее ближайшей точки-соседа, $\gamma$ — показатель усреднения.

Значение $D_H$ определяется из уравнения

$$D(D_H) = D_H. \tag{7}$$

Для вычисления среднего расстояния до ближайшего соседа $\bar{\delta}(\gamma, N)$ найдем функцию распределения вероятностей для $\delta(\gamma, N)$. Вероятность $P_{\delta}$ того, что у случайно выбранной из $N$ точки $A$ ближайший сосед находится на расстоянии $r$ ($r \in [r; r+dr]$), а остальные $N-2$ точки расположены вне окружности радиуса $r$ с центром в $A$, определяется выражением

$$P_{\delta} = (N-1) F'(r) [1 - F(r)]^{N-2}, \tag{8}$$

где $P_{\delta}$ и есть искомая дифференциальная функция распределения вероятностей.

В результате находим среднее значение $\bar{\delta}(\gamma, N)$

$$\bar{\delta}(\gamma, N) = \left[\int_0^{r_{\max}} P_{\delta} r^{\gamma} dr\right]^{1/\gamma} = \left[\gamma \int_0^{r_{\max}} [1 - F(r)]^{N-1} r^{\gamma-1} dr\right]^{1/\gamma}. \tag{9}$$

Используя соотношение (3), приходим к выражению

$$\bar{\delta}(\gamma, N) = A^{-1/\alpha} \left[\frac{\gamma}{\alpha} \frac{\Gamma(N)\Gamma\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(N + \frac{\gamma}{\alpha}\right)}\right]^{1/\gamma}, \tag{10}$$

где $\Gamma(\ldots)$ — гамма-функция.

[1] Это оправдывает определение (3), **поскольку** $D_{\nu}$ **имеет** смысл только для самоподобных систем.

Отсюда непосредственно следует, что при $\gamma = \alpha$ выполняется равенство (7). Таким образом, мы доказали, что $D_H \equiv D_\nu = \alpha$, т. е. для самоподобных систем корреляционная размерность тождественно совпадает с хаусдорфовой.

Предложенная методика анализа структуры СА, основанная на вероятностном подходе, позволяет также легко показать, что введенная в работе [8] размерность $D_F$, служащая для оценки $D_H$, тождественно совпадает с ней при выполнении соотношения (3).

Другим важным результатом является найденное выражение (9), которое с учетом соотношения (5) позволяет рассчитать спектр размерностей, дающий более полную информацию о свойствах СА.

В заключение следует отметить, что в ряде известных численных экспериментов установлено следующее соотношение: $D_\nu < D_H$ (см., например, [5-7]). Исходя из полученных результатов следует заключить, что наблюдающееся различие может быть связано с двумя причинами: 1) исследовавшиеся системы являются принципиально несамоподобными, для них не выполняется соотношение (3); 2) в численных экспериментах не достигнуто требуемое разрешение по $r$, при котором система является самоподобной. Проведенные нами оценки показывают, в частности, что для ряда СА достаточно высокое разрешение практически недостижимо в численном эксперименте (например, для системы Заславского [5]). Это указывает также на необходимость разработки других подходов к исследованию структуры СА.

Авторы признательны О. А. Третьякову, А. Б. Белогорцеву за полезные дискуссии и замечания.

**Список литературы**


[1] *Монин А. С.* // УФН. 1986. Т. 150. № 1. С. 61—105.
[2] *Соколов И. М.* // УФН. 1986. Т. 150. № 2. С. 221—255.
[3] *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов, 1985, 1986. Ч. 1, 2.
[4] *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.* // Physica. 1983. Vol. D7. N 1—3. P. 153—180.
[5] *Badii P., Politi A.* // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 40. N 5/6. P. 725—750.
[6] *Grassberger P., Procaccia I.* // Physica. 1983. Vol. D9. N 1—2. P. 189—208.
[7] *Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P.* et al. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 35. N 2. P. 1141—1151.
[8] *Termonia Y., Alexandrovich Z.* // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. N 14. P. 1265—1268.


Харьковский
государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило в Редакцию
14 июня 1988 г.

---

06; 09

*Журнал технической физики, т. 59, в. 8, 1989*

# ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛЕНОК ФЕРРИТ-ГРАНАТОВ НА ИХ ИМПУЛЬСНЫЕ СВОЙСТВА

*Димитр Йоргов, О. С. Колотов, В. А. Погожев*

Пленки феррит-гранатов (ПФГ) получают методом жидкофазной эпитаксии [1, 2]. Этот процесс характеризуется непостоянством скорости выделения компонентов, что приводит к неоднородности параметров материала ПФГ по толщине, проявляющейся часто в виде их слоистости [3-5]. Рассматриваемая неоднородность является трудноустранимым фактором, оказывающим сильное влияние на импульсные свойства ПФГ. Так, условия возникновения волны опрокидывания магнитного момента могут быть различными в разных слоях пленки [5]. На анализе этих условий основан один из методов исследования слоистости [5]. Известно также [6-9], что перемагничивание отдельных слоев ПФГ может происходить вращением намагниченности в полях, существенно меньших среднего значения порогового поля необратимого вращения $H_0 = H_k - 4\pi M_S$, где $H_k$ — эффективное поле анизотропии, $M_S$ — намагниченность насыщения. Здесь исследуется влияние неоднородности ПФГ на их основную импульсную характеристику — кривую импульсного перемагничивания (КИП), представляющую зависимость обратного времени перемагничивания $\tau^{-1}$ от амплитуды импульса магнитного поля $H_\text{п}$.