

## ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛЯ В КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЕ

*Н. И. Дойников, Г. Н. Самсонов*

На основе анализа поля квадрупольной линзы получены соотношения, определяющие комплексные амплитуды гармоник в зависимости от вида возмущения профиля полюса. Показана возможность независимой компенсации ряда высших пространственных гармоник.

### Введение

В практике физического эксперимента широко используются прецизионные квадрупольные линзы. Особо жесткие требования при их разработке и изготовлении предъявляются к той части нелинейности поля, которая описывается гармониками с низкими номерами [1, 2]. Доведение их амплитуд до приемлемого уровня составляет задачу формирования поля.

Хорошо известен подход, сочетающий аналитические исследования и различного вида моделирование [3, 4]. Используя решение двумерного уравнения Лапласа в приосевой области линзы, можно найти зависимости комплексных амплитуд гармоник от размеров и местоположения возмущения профиля полюса. Вводя их на определенных участках, можно эффективно влиять на ту или иную гармонику поля. Такая коррекция поля обычно проводится на стадии разработки по данным численного моделирования, в случае необходимости она может быть выполнена после изготовления по данным магнитных измерений.

Ряд возмущений поля в квадруполе имеет симметричный характер, их появление в основном связано с такими конструктивными особенностями линзы, как обрыв полюса, отклонение его формы от гиперболической, близость катушки возбуждения к апертуре, наличие насыщенных участков в магнитопроводе и т. д. В «конструктивной нелинейности» различают два типа симметрии. В первом типе конструкции линзы имеет четыре плоскости симметрии и отличны от нуля лишь гармоники с номерами  $k=2+4n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) [5], во втором — только две плоскости симметрии и гармоники с номерами  $k=2n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) [6]. К этому типу возмущений можно отнести также поле вихревых токов, индуцируемых в стенках металлической вакуумной камеры при импульсной работе линзы. Его симметрия находится в прямой связи с симметрией конструкции камеры [7].

В зависимости от требований, предъявляемых к нелинейности поля линзы, одна или несколько гармоник должны быть скомпенсированы [8, 9]. Соответствующие рекомендации, касающиеся гармоник с  $k=2+4n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), содержатся в работах [10, 11].

В общем случае отсутствия симметрии поле содержит и четные, и нечетные гармоники с произвольными начальными фазами. Нарушение симметрии обычно вызвано дефектами изготовления [12, 10], реже анизотропией ферромагнетика [13] или неоднородностью массивов полюсов и магнитопровода. Эту нелинейность называют «технологической». Определяющий ее гармонический состав имеет вероятностный характер, а ее приемлемый уровень обеспечивается выбором допусков на обработку полюсов и сборку линзы.

Целью настоящей работы является исследование зависимости, связывающих малые отклонения профиля от канонической формы (в частности, гиперболической) с амплитудами ряда гармоник, и способов их компенсации. Результаты работы легко могут быть распространены на случай электростатических линз.

### Компенсация «конструктивной нелинейности»

Как правило, подлежащие коррекции возмущения поля сравнительно невелики, поэтому небольшими будут и адекватные им возмущения профиля.<sup>1</sup> Анализ выполняется в первом приближении по степеням отклонения профиля от канонической формы.

Пусть  $\zeta(z)$  — функция, осуществляющая преобразование области, лежащей в первом квадранте плоскости  $z$  и ограниченной осями координат и каким-либо каноническим профилем, на единичную полосу  $0 \leq \text{Im} \zeta \leq 1$  с соответ-

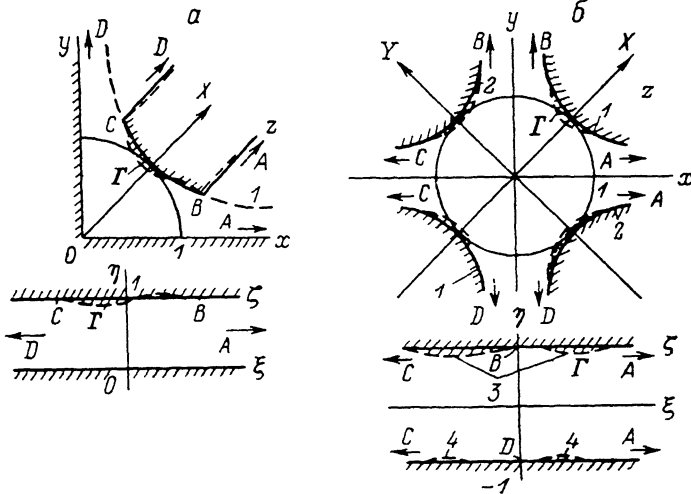


Рис. 1. Конформные преобразования исходной области на плоскости  $z$  на плоскость комплексного потенциала  $\zeta$ .

$\Gamma$  — возмущение на профиле.  $a$  — к анализу «конструктивной» нелинейности,  $b$  — к анализу «технологической» нелинейности;  $x\eta$ : 1 —  $+1/2$ , 2 —  $-1/2$ ; 3 —  $F_1(\xi)$ , 4 —  $F_2(\xi)$ .

ствием точек, приведенном на рис. 1,  $a$ . Показанный штриховой линией «возмущенный контур» перейдет в кривую  $\eta = 1 - f(\zeta)$ . Если при этом выполняются условия  $|f^{(n)}(\xi)| < \epsilon$ ,  $n = 0, 1, 2$ , то с точностью до малых второго порядка относительно  $\epsilon$  функция [14]

$$\bar{\zeta} = \zeta + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{th} \frac{\pi(\zeta - t)}{2} dt \quad (1)$$

отображает близкую к единичной полосе область на единичную полосу. Имея в виду, что при малых  $z$   $\zeta \simeq z^2$ , и принятые допущения, можно (1) представить в виде

$$\bar{\zeta} = z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta \alpha_{2n+2}}{2n+2} z^{2n+2}, \quad (1')$$

где

$$\Delta \alpha_{2n+2} = \int_0^{\infty} [f(\xi) + (-1)^n f(-\xi)] \psi_{2n+2}(\xi) d\xi, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Под возмущениями профиля в дальнейшем подразумеваются шиммы и антишиммы, а также эквивалентные им по воздействию корректирующие витки с током.

$$\psi_4(\xi) = \frac{\pi^2}{4} \operatorname{th} \frac{\pi\xi}{2} \operatorname{ch}^{-2} \frac{\pi\xi}{2},$$

$$\psi_6(\xi) = \frac{\pi^3}{16} \left( 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2} - 1 \right) \operatorname{ch}^{-4} \frac{\pi\xi}{2},$$

$$\psi_8(\xi) = \frac{\pi^4}{24} \operatorname{th} \frac{\pi\xi}{2} \left( \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2} - 2 \right) \operatorname{ch}^{-4} \frac{\pi\xi}{2},$$

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{\pi^5}{192} \left( 2 \operatorname{ch}^4 \frac{\pi\xi}{2} - 15 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2} \right) \operatorname{ch}^{-6} \frac{\pi\xi}{2}. \quad (3)$$

Функции  $\psi_6(\xi)$  и  $\psi_{10}(\xi)$  совпадают с приведенными в [10, 11] при замене  $\xi = \operatorname{tg} N\Phi$ .

Согласно (2), возможна по известным значениям  $\Delta\alpha_{2+4n}$  независимая коррекция групп гармоник с  $k=6, 10, \dots$  и  $k=4, 8, \dots$ , так как первая обеспечивается симметричными, а вторая антисимметричными по отношению к биссектрисе координатного угла возмущениями профиля. Несложно найти размер необходимого возмущения: искажение профиля в окрестности точки с абсцис-

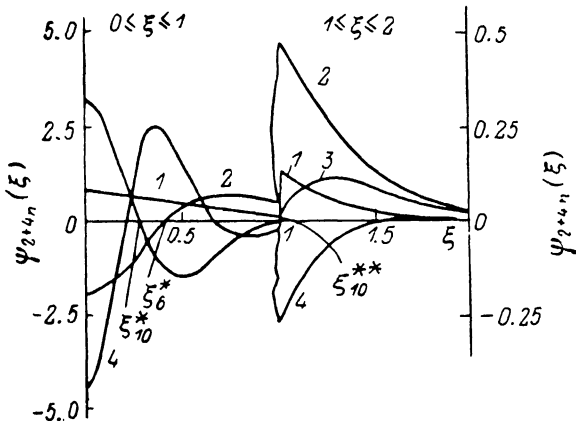


Рис. 2. Функции  $\psi_{2+4n}(\xi)$ .  
 $n$ : 1 — 0, 2 — 1, ..., 4 — 3.

сой  $\xi^*$  на плоскости  $\zeta$  площадью  $S_\zeta$  вносит изменение в амплитуду гармоники  $k=2+2n$ , равное  $\sim S_\zeta \psi_{2+2n}(\xi^*)$ . В случае близкого к гиперболическому профиля  $2x^*y^* \simeq 1$  и

$$S_\zeta \simeq 4S_x \left( x^{*2} + \frac{1}{4x^{*2}} \right), \quad (4)$$

где  $x^*$  и  $S_x$  — соответственно абсцисса рассматриваемой точки профиля и площадь шимма в ее окрестности на плоскости  $z$ .

Из графического представления функций  $\psi_i(\xi)$  на рис. 2 видно, что имеется возможность независимой коррекции шестой и десятой гармоник. Действительно, шиммы (антишиммы), расположенные вблизи точек  $\xi_{10}^* = 0.268$  ( $x^* = 0.808$ ) и  $\xi_{10}^{**} = 1$  ( $x^* = 1, 1$ ), в которых  $\psi_{10}(\xi_{10}^*) \equiv \psi_{10}(\xi_{10}^{**}) \equiv 0$ , влияют на шестую гармонику, не изменяя десятой, а шимм (антишимм) вблизи точки  $\xi_6^* = 0.419$  ( $x^* = 0.868$ ), в которой  $\psi_6(\xi_6^*) \equiv 0$ , воздействует на десятую гармонику, не изменяя шестой. Очевидно, что можно откорректировать также 14-ю гармонику, для которой на профиле имеется уже три точки, в которых  $\psi_{14} = 0$ .

Аналогичные возможности имеются для коррекции четвертой и восьмой гармоник; соответствующие функции влияния приводятся на рис. 3. В этом случае, согласно (2), на каждом полюсе должна быть организована пара — шимм и антишимм, последовательность которых зависит от знаков необходимых изменений гармоник. Удобно сначала позаботиться о коррекции восьмой гар-

моники в соответствии с кривой  $\psi_8(\xi)$ , а затем с помощью шимма (антишимма) в окрестности точки  $\xi_8^* = 0.73$  ( $x^* = 0.984$ ) полностью скорректировать четвертую гармонику, при этом не воздействуя на восьмую.

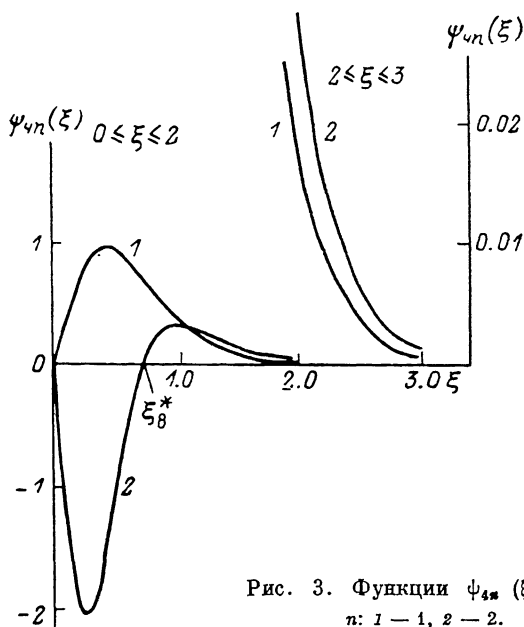


Рис. 3. Функции  $\psi_{4n}(\xi)$ .  
 $n$ : 1 — 1, 2 — 2.

### Компенсация «технологической нелинейности»

Часть «технологической нелинейности», характеризующаяся четными гармониками с нулевой начальной фазой, компенсируется по рекомендациям, данным в предыдущем разделе. В разложении комплексного потенциала в ряд Тейлора в окрестности оси линзы ( $z=0$ )

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^k, \quad (B = i \frac{dw}{dz}) \quad (5)$$

эти гармоники соответствуют вещественной части комплексных коэффициентов  $a_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k=2n$ ,  $n=2, 3, 4, \dots$ ) (ср. с (1')). Слагаемые в (5) с  $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$  и  $\beta_2$  несложно скорректировать с помощью юстировки (смещения и поворота линзы).

В результате конформного отображения [15]

$$\xi = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arch} e^{\frac{\pi z^2}{2}} \quad (6)$$

область, заключенная на плоскости  $z$  между четырьмя гиперболами  $x_0 y_0 = \pm 1/2$  (рис. 1, б), преобразуется на полосу  $|\operatorname{Im} \xi| \leq 1$ , при этом  $F_1(\xi)$  и  $F_2(\xi)$  — возмущения соответственно верхней и нижней ее границ. Условия  $F_1(\xi) > 0$  и  $F_2(\xi) > 0$  означают уменьшение ширины полосы. Координаты  $\xi$  и  $x$  для точек профиля полюса, расположенного в первом квадранте, связаны соотношением

$$\xi = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arsh} e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{sh} u}, \quad (7)$$

где  $u = \ln(2x^2)$ .

Последующее использование формулы (1) и приведение комплексного потенциала полосы к виду (5) позволяют найти амплитуды гармоник в виде

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\xi) \frac{d\xi}{\operatorname{sh} \pi \xi}, \quad (8)$$

$$\alpha_3 = -\frac{3}{4} \pi^{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\xi) \frac{\frac{1}{4} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\xi}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{2} \operatorname{ch}^3 \frac{\pi\xi}{2}} d\xi, \quad (9)$$

$$\alpha_5 = \frac{5}{16} \pi^{\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\xi) \frac{\frac{5}{24} \operatorname{ch}^4 \frac{\pi\xi}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\xi}{2} - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{2} \operatorname{ch}^5 \frac{\pi\xi}{2}} d\xi, \quad (10)$$

$$\beta_4 = \frac{\pi^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} F_-(\xi) \frac{1 - 6 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2} + \operatorname{sh}^4 \frac{\pi\xi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{2} \operatorname{ch}^4 \frac{\pi\xi}{2}} d\xi, \quad (11)$$

$$\beta_6 = -\frac{\pi^3}{32} \int_{-\infty}^{\infty} F_-(\xi) \frac{\left(1 - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2}\right) \left(1 - 22 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\xi}{2} + \operatorname{sh}^4 \frac{\pi\xi}{2}\right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi\xi}{2} \operatorname{ch}^6 \frac{\pi\xi}{2}} d\xi, \quad (12)$$

где

$$F_{\pm}(\xi) = \frac{1}{2} (F_1(\xi) \pm F_2(\xi)). \quad (13)$$

Согласно определению поля (5)

$$(B_x)_{y=0} = \beta_{1+2n} x^{2n}, \quad (B_x)_{x=0} = (-1)^n \beta_{1+2n} y^{2n}, \quad (14)$$

$$(B_y)_{y=0} = \alpha_{1+2n} x^{2n}, \quad (B_y)_{x=0} = (-1)^n \alpha_{1+2n} y^{2n}, \quad (15)$$

где коэффициенты  $\alpha_{1+2n}$  ( $n=0, 1, \dots$ ) ответственны за компоненту  $B_y$ , а  $\beta_{1+2n}$  ( $n=0, 1, \dots$ ) — за компоненту  $B_x$  на координатных плоскостях. Поэтому достаточно проанализировать возможности коррекции лишь одной группы коэффициентов, например  $\alpha_{1+2n}$ . Выводы из этого рассмотрения легко распространить на случай коррекции коэффициентов  $\beta_{1+2n}$  с помощью простой перестановки координатных осей.

Пусть  $\alpha_{1+2n} \neq 0$ ,  $\beta_{1+2n} \equiv 0$ . Тогда из (8)–(10) и (13) следует, что  $F_1(\xi) = F_2(\xi) \equiv F(\xi)$ , а  $F(-\xi) = -F(\xi)$ . Таким образом, для коррекции коэффициентов  $\alpha_{1+2n}$  следует формировать возмущения профилей, симметричные относительно плоскости  $y=0$  и антисимметричные относительно плоскости  $x=0$ . При этом, как видно из (11), (12), влияние на четные гармоники отсутствует.

Переходя в (8)–(10) к переменной  $u$ , согласно (7), и к возмущению вида  $F(u)$  на плоскости  $z$ , находим

$$\alpha_{1+2n} = \int_{-\infty}^{\infty} du F(u) \psi_{2n+1}(u), \quad (16)$$

где

$$\psi_1 = \sqrt{\pi} \operatorname{ch}^{3/2} u \frac{e^{\pi/2 \operatorname{sh} u}}{(1 + e^{\pi \operatorname{sh} u})^{3/2}}, \quad (8')$$

$$\psi_3 = -\frac{3}{4} \pi^{3/2} \operatorname{ch}^{3/2} u \frac{e^{\pi/2 \operatorname{sh} u} (1 - 3e^{\pi \operatorname{sh} u})}{(1 + e^{\pi \operatorname{sh} u})^{3/2}}, \quad (9')$$

$$\psi_5 = \frac{5}{4} \pi^{5/2} \operatorname{ch}^{3/2} u \frac{e^{\pi/2 \operatorname{sh} u} \left( \frac{5}{24} - \frac{31}{12} e^{\pi \operatorname{sh} u} + \frac{29}{24} e^{2\pi \operatorname{sh} u} \right)}{(1 + e^{\pi \operatorname{sh} u})^{7/2}}. \quad (10')$$

Функции  $\psi_{2n+1}(x)$ ,  $n=0, 1, 2$  представлены на рис. 4. Из их поведения видно, что имеется возможность одновременной коррекции этих гармоник. Так, шимм (антишимм) в окрестности точки  $T_3$  (0.596, 0.839) следует выбрать из расчета

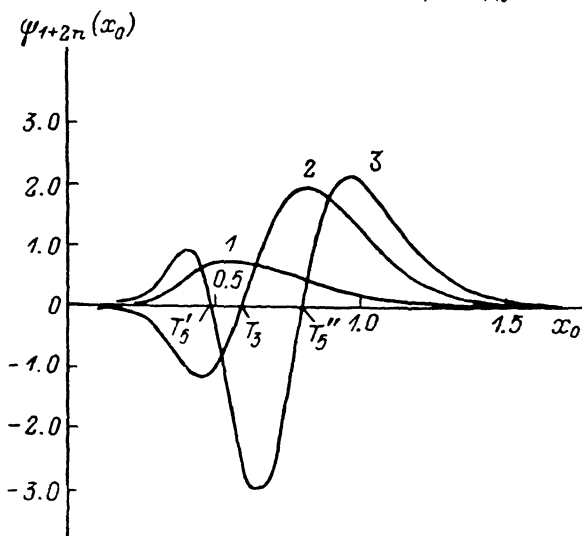


Рис. 4. Функции  $\psi_{1+2n}(x_0)$ .  
 $n$ : 1 — 0, 2 — 1, 3 — 2.

коррекции пятой гармоники, тогда для коррекции первой и третьей гармоник удобно разместить шиммы (антишиммы) в окрестности точек  $T'_5$  (0.492, 1.016) и  $T''_5$  (0.792, 0.631).

Коррекция гармоник  $\beta_4$  и  $\beta_6$ , согласно (11)–(13), должна проводиться с помощью возмущений вида  $F_1(\xi) = -F_2(\xi)$ ,  $F_1(-\xi) = -F_1(\xi)$ , т. е. возмущения

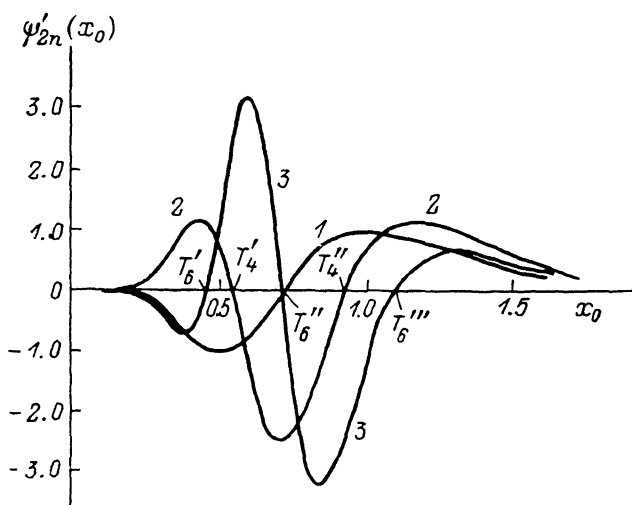


Рис. 5. Функции  $\psi'_{2n}(x_0)$ .  
 $n$ : 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3.

профилей полюсов будут антисимметричны в координатных плоскостях. В соответствии с рассмотрением, проведенным ранее, при этом не появятся четные гармоники с нулевой фазой ( $\alpha_{2n}$ ) и нечетные гармоники вида  $\alpha_{2n+1}$  и  $\beta_{2n+1}$ . После преобразования (11) и (12) к аналогичному (16) виду получим

$$\psi'_4 = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{ch}^{3/2} u \frac{e^{2\pi \operatorname{sh} u} - 6e^{\pi \operatorname{sh} u} + 1}{(e^{\pi \operatorname{sh} u} + 1)^3} e^{\pi/2 \operatorname{sh} u}, \quad (11')$$

$$\dot{\psi}'_6 = \frac{\pi^3}{8} \operatorname{ch}^{3/2} u \frac{(e^{\pi \operatorname{sh} u} - 1)(e^{2\pi \operatorname{sh} u} - 22e^{\pi \operatorname{sh} u} + 1)}{(e^{\pi \operatorname{sh} u} + 1)^4} e^{\pi/2 \operatorname{sh} u}. \quad (12')$$

Из поведения этих функций (рис. 5) следует, что имеется возможность независимой коррекции описываемых ими возмущений. Точки, в которых функции обращаются в нуль, расположены симметрично:  $T'_4$  (0.541, 0.924) и  $T''_4$  (0.924, 0.541) и  $T'_6$  (0.458, 1.092),  $T''_6$  (0.707, 0.707) и  $T'''_6$  (1.092, 0.458). Шимм (антишимм) в окрестности точки  $T'_6$  воздействует только на четвертую гармонику, тогда как пара шимм+антишимм, размещенная в окрестности точек  $T'_4$  и  $T''_4$ , не изменяет величину  $\beta_6$ .

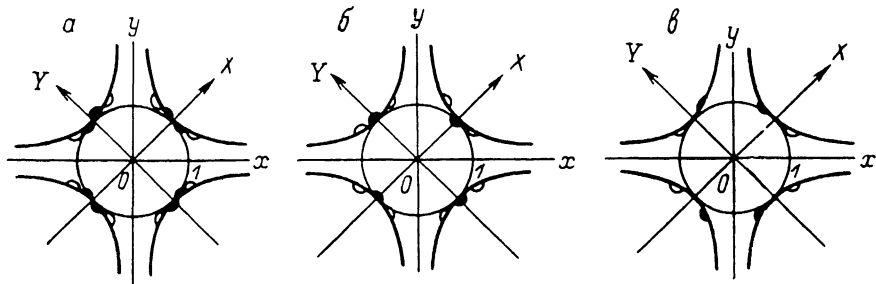


Рис. 6. Схематическое представление типов возмущений.

а — компенсация  $\alpha_{2n}$ , б — компенсация  $\beta_{2n}$ .  $n: 1-3, 5, \dots$ ;  $2-2, 4, \dots$ , в — компенсация  $\alpha_{2n+1}$   $1-\alpha_{2n+1}$ ,  $2-\beta_{2n+1}$ .

### Заключение

Анализ влияния возмущений профиля полюсов на гармонический состав поля показывает, что имеется возможность избирательного воздействия на отдельные группы гармоник, а также на гармоники в пределах каждой группы.

Компенсация гармоник  $\alpha_{2+4n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) проводится возмущениями профилей полюсов, симметричными относительно четырех плоскостей, ориентированных под углом  $\pi/4$  друг к другу. Для коррекции гармоник  $\alpha_{4n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) соответствующие возмущения должны быть симметричны относительно координатных плоскостей и антисимметричны относительно плоскостей, составляющих с координатными угол  $\pi/4$  (рис. 6, а).

Для воздействия на гармоники  $\beta_{2+4n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) соответствующие шиммы (антишиммы) должны быть антисимметричны относительно всех четырех плоскостей, а на гармоники  $\beta_{4n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) — антисимметричны относительно координатных плоскостей, но симметричны относительно плоскостей  $X=0$  и  $Y=0$  (рис. 6, б).

Коррекция нечетных гармоник  $\alpha_{1+2n}$  ( $n=0, 1, \dots$ ) должна проводиться шиммами (антишиммами), симметричными относительно плоскости  $y=0$  и антисимметричными относительно плоскости  $x=0$ . Ситуация с гармониками  $\beta_{1+2n}$  ( $n=0, 1, \dots$ ) аналогична, но при этом плоскости симметрии и антисимметрии меняются местами (рис. 6, в).

### Литература

- [1] Карташов В. П., Котов В. И., Рзаев Р. Н. Препринт ИФВЭ. № ОП-67-22-К. Серпухов, 1967.
- [2] Carey D. C. // Nucl. Instr. Meth. 1975. Vol. 126. P. 325—327.
- [3] Ašner A., Brianti G., Giesch M., Lohmann K. D. // Proc. 3<sup>rd</sup> Intern. Conf. on Magn. Techn. (MT-3). Hamburg: DESY, 1970. P. 418—465.
- [4] Самсонов Г. Н. // ПТЭ. 1974. № 5. С. 35—36.
- [5] Явор С. Я. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами. М.: Атомиздат, 1968. 262 с.
- [6] Kilpatrick R. A. // Proc. Intern. Symp. on Magn. Techn. (MT-1). Stanford: SLAG, 1965. P. 262—267.
- [7] Дойников Н. И. Препринт НИИЭФА. № Б-0694. Л., 1985.
- [8] Плотников В. К. // ПТЭ. 1962. № 2. С. 29—33.

- [9] Ваулин Л. Н., Дойников Н. И., Монозон Н. А. и др. // ПТЭ. 1968. № 3. С. 40—44.
- [10] Doinikov N. I. // Proc. 5<sup>th</sup> Conf. on High Energy Accel. Roma, 1966. P. 721—727.
- [11] Halbach K. // Nucl. Instr. Meth. 1969. Vol. 74. P. 147—162.
- [12] Cobb J., Cole R. // Proc. Intern. Symp. on Magn. Techn. (MT-1). Stanford: SLAG, 1965. P. 431—439.
- [13] Endo K., Kihara M., Takasi E. et al. // IEEE Transact. Nucl. Sci. 1973. Vol. NS-20. P. 716—717.
- [14] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965. 716 с.
- [15] Дойников Н. И. // Электрофизическая аппаратура. 1966. Вып. 4. С. 84—98.

Поступило в Редакцию  
4 января 1988 г.