01; 03; 04

ТЕПЛОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОБОЙ ДВИЖУЩИХСЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ И ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ СВЕТА. I

Н. Е. Галич

Теоретически исследуется тепловой пробой движущихся вязких жидкостей — диэлектриков и полупроводников под действием поперечного электрического поля или светового потока. Определено влияние вязкостной диссипации при движении среды и различных тепловых и гидродинамических условиях на порог пробоя, время его развития и температуру предпробойного разогрева. Установлено существование двух режимов пробоя: при течении жидкости с заданными и фиксированными напряжениями трения и при течении с заданной и фиксированной скоростью. В первом случае порог пробоя понижается с увеличением скорости, во втором возрастает. Отмечены резкое снижение порогов пробоя в условиях проявления вязкостной тепловой неустойчивости (гидродинамического теплового взрыва) и связь низкопорогового пробоя с самовоспламенением нефти и нефтепродуктов при их утечках, перекачке или транспортировке.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается тепловой оптический и электрический пробой движущихся вязких жидкостей, который отличается от пробоя вещества в твердой фазе и пробоя жидкостей с умеренной вязкостью. Жидкость считается вязкой, когда ее кинематическая вязкость ν много больше температуропроводности χ, $\nu \gg \chi$. К числу таких жидкостей относятся, например, полимеры, масла, нефть или нефтепродукты и кремнийорганические жидкости. Течение вязких жидкостей сопровождается их саморазогревом за счет диссипации энергии движения. Зависимость коэффициента вязкости $\mu(T)$ от температуры T (обычно $d_T\mu(T) < 0$) обусловливает развитие вязкостной тепловой неустойчивости или гидродинамического теплового взрыва [1]. В электрическом поле эффекты вязкостной диссипации накладываются на развитие электрической тепловой неустойчивости, что и приводит к проявлению новых черт пробоя, которые ранее не обсуждались. В частности, прокачка вязких жидкостей в элементах высоковольтной техники может сопровождаться существенным понижением или повышением электрической прочности среды в зависимости от выбора режима течения. Подобные явления возникают и при воздействии света на вязкие жидкости, если коэффициент поглощения излучения возрастает с ростом температуры [2]. Эти вопросы представляют интерес и для фотохимических процессов в текущей среде.

Рассмотрим течение жидкости между двумя параллельными плоскостями. Расстояние между плоскостями d, скорость течения u. Ось x направлена вдоль потока, ось y — перпендикулярно поверхности. Возможны два типа установившегося течения: с подвижной и неподвижной границами

$$d_y(\mu(T)\, d_y u) = 0;\ u(y=0)=0;\ u(y=d)=v, \tag{1}$$

$$\partial_x p = -\Delta p/L = d_y(\mu(T)\, d_y u);\ u(y=0) = u(y=d) = 0, \tag{2}$$

где p — давление, μ — вязкость жидкости, v — скорость движения границы верхнего слоя жидкости, Δp — перепад давлений на длине L, L — длина канала в направлении течения, $L \gg d$.

Когда $\mu=\text{const}$ задача (1) описывает течение Куэтта, а задача (2) — течение Пуазейля [3]. Случай (1) эквивалентен условию постоянного напряжения трения поперек потока

$$\mu(T)\,d_y u=\tau, \quad \tau=\tau_w=\text{const} \tag{3}$$

и может моделировать пристенные течения. Случай (2) приводит к другому уравнению для напряжений трения

$$\tau=\mu(T)\,d_y u=-(\Delta p/L)(y-d/2). \tag{4}$$

Установившийся профиль температуры T определяется уравнением теплопроводности с источниками тепла, обусловленными джоулевым нагревом и вязкостной диссипацией

$$\lambda d_{yy}^2 T+\sigma(T)\,E^2+\mu(T)\,(d_y u)^2=0, \tag{5}$$

где λ — теплопроводность жидкости, σ — электропроводность, E — напряженность электрического поля.

При облучении жидкости светом джоулев нагрев заменяется на светоиндуцированный, $\sigma E^2\to\alpha I$, где α — коэффициент поглощения света, I — интенсивность светового потока. Граничные условия для уравнения (5) имеют вид

$$T(y=0)=T_0, \quad T(y=d)=T_d. \tag{6}$$

Поле $\mathbf{E}$ приложено перпендикулярно пластинам, $\mathbf{E}\perp\mathbf{u}$. Неортогональностью $\mathbf{E}$ и $\mathbf{u}$ можно пренебречь, когда $E_x/E_y\ll\mu v T_0/dU_\sigma\varepsilon\varepsilon_0E_y^2$, ε и ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды и вакуума. Ограничение на величину E_x/E_y связано с отношением плотности механической энергии движения жидкости к плотности энергии электрического поля, если оно не выполняется, то пробой определяется не только тепловой, но и электрогидродинамической неустойчивостью. Напряженность поля $E=\text{const}$.

Зависимость $\mu(T)$ и $\sigma(T)$ можно описать формулами

$$\mu(T)=\mu_0\exp(U_\mu/T), \quad \sigma(T)=\sigma_0\exp(-U_\sigma/T), \tag{7}$$

где μ_0, G_0, U_μ и U_σ — постоянные величины [2].

Энергии активации для вязкости U_μ и электропроводности U_σ в общем случае различны, $U_\sigma\geqslant U_\mu$. Равенство $U_\mu=U_\sigma$ имеет место, когда носителями заряда (тока) являются отрицательные ионы [4]. Теплопроводность λ, плотность ρ, теплоемкость C_p и температуропроводность $\chi=\lambda/\rho C_p$ считаются постоянными, поскольку их зависимость от температуры T значительно менее существенна, чем зависимость $\mu(T)$ и $\sigma(T)$ (см. [4, 5]). Реологические свойства среды не учитываются, жидкость считается ньютоновской ($\tau=\mu d_y u$). Следуя [6], можно показать, что это приближение оправдано, если $\tau\sim\mu v/d\ll\alpha/l$, где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, l — межмолекулярное расстояние. Например, для трансформаторного масла с $\alpha\sim3\cdot10^{-2}$ Дж/м², $\mu\sim3\times10^{-2}$ Па·с, $l\sim10^{-9}$ м, последнее неравенство приводит к условию $v/d\ll10^9$ с⁻¹, которое практически всегда выполняется для $d\geqslant10^{-4}$ м. Принятая постановка задачи не описывает очень тонкие слои очень вязких жидкостей с $d\leqslant10^{-6}$ м и $\mu\geqslant1$ Па·с.

2. Аналогия с тепловым взрывом

В случае равных температур стенок $T_0=T_d$ и равных энергиях активации $U_\mu=U_\sigma=U$ соотношения (1), (5)—(7) или (3), (5)—(7) приводит к уравнению

$$\lambda d_{yy}^2T+\left(\sigma_0E^2+\frac{\tau_\omega^2}{\mu_0}\right)e^{-U/T}=0, \quad T(y=0,\ d)=T_0 \tag{8}$$

и задача о пробое подобна задаче о тепловом взрыве, описанной в [7, 8]. Решение (8) существует не при любых значениях поля E, а лишь при некоторых

$E \leqslant E_*$. Когда $E > E_*$, стационарность распределения T нарушается и происходит быстрый, взрывной рост температуры, т. е. пробой. Указанная аналогия позволяет определить порог пробоя E_* и соответствующую температуру предпробойного разогрева $T_* = T\ (y = d/2)$ в виде

$$E_*^2 = 3,52\ \frac{T_0^2 \lambda}{U d \sigma_0}\ e^{U/T_0} - \frac{\tau_w^2}{\mu_0 \sigma_0}, \quad T_* = T_0 + 1.19 T_0^2/U. \tag{9}$$

Величина τ_w в (9) определяется из решения задачи (1), (8). Следуя [7], можно показать, что при $E = E_*$ интеграл $\int\limits_0^d \exp(-U/T)\, dy = 2.36 d \exp(-U/T_0)$, следовательно,

$$\tau_w = 0.42\ \frac{v}{d}\ \mu_0 e^{U/T_0}. \tag{10}$$

Из (9) видно, что вязкостная диссипация понижает порог пробоя. В покоящейся среде и в жидкостях с небольшой вязкостью (предел $v \to 0$ и $\mu \to 0$ в (9), (10)) соотношение (9) совпадает с критерием пробоя покоящейся жидкости, приведенным в [2]. В отсутствие поля ($E = 0$) формула (9) определяет условие тепловой вязкостной неустойчивости

$$\tau_w = \tau_w^* = 1.88\, (T_0^2 \lambda \mu\, (T_0)/U d)^{1/2}, \quad T_* = T_0 + 1.19 T_0^2/U. \tag{11}$$

Период индукции или время развития пробоя t_u зависит от надкритичности, т. е. от разности $(E - E_*) > 0$. Повторяя выкладки, приведенные в [7], можно показать, что при малой надкритичности $(E^2 - E_*^2) \ll E_*^2$ время

$$t_u = 10.7\ (\chi T_0/d^3)\ [\lambda/U \sigma\, (T_0)\, (E^2 - E_*^2)]^{1/2}, \tag{12}$$

где E_*^2 определяется формулой (9). Формула (12) справедлива при $t_u > d^2/\nu$.

Аналогия вязкостной и электрической тепловой неустойчивости при условии их раздельного проявления с задачей о тепловом взрыве указана в [7]. Список и класс аналогий можно расширить за счет определения подобных явлений в теории зажигания и других математически родственных задачах.

3. Аналогия с зажиганием горючей смеси

В случае разных температур граничных поверхностей $T_d \neq T_0$ задача (3), (5)—(7) принимает вид

$$\lambda d_{yy}^2 T + \left(\sigma_0 E^2 + \frac{\tau_w^2}{\mu_0}\right) e^{-U/T} = 0, \ \ T\ (y = 0) = T_0, \ \ T\ (y = d) = T_d, \tag{13}$$

подобный задаче о несимметричном воспламенении (зажигании) горючей смеси нагретой поверхностью с температурой $T_d > T_0$ (см., например, [7, 8]). Порогу зажигания теперь соответствует порог пробоя

$$E_*^2 = \frac{(T_d - T_0)^2\, U \lambda}{2 T_d^2 \sigma_0 d^2}\, e^{U/T_d} - \frac{\tau_w^2}{\mu_0 \sigma_0}, \quad (T_d - T_0) \geqslant T_d^2/U. \tag{14}$$

При $E = E_*$ интегрирование (1), (13) дает

$$\tau_w = 0.53\, \frac{vU}{d T_d^2}\, (T_d - T_0)\, \mu_0 e^{U/T_d}. \tag{15}$$

Время индукции пробоя t_u при $E \geqslant E_*$ определяется соотношением

$$t_u = \frac{\rho C_p\, (T_d - T_0)^2}{2\pi U\ (\sigma_0 E^2 + \tau_w^2/\mu_0)}\, \exp\left(\frac{U}{T_d}\right).$$

При $E = E_*$ время $t_u = d^2/\pi\chi$. Например, для трансформаторного масла с $\chi \sim 10^{-7}$ м²/с и толщине слоя $d \sim 10^{-3}$ м имеем $t_u \sim 10$ с. Сравнение соотношений (14), (15) с (9), (10) указывает на их различие. В присутствии горячей поверхности порог пробоя понижается. Когда разность температур определяется только диссипацией, то при $T_d = T_0$ предпробойный разогрев жидкости $\Delta T \sim T_d^2/U$ и формулы (14), (15) идентичны соотношениям (9), (10). Для малых перепадов температуры $(T_d - T_0) \leqslant T_0^2/U$ вместо (14), (15) следует использовать более сложные соотношения (см. [7, 8]), которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости, обусловленной отсутствием резкой границы перехода от зажигания к тепловому взрыву.

В отсутствие поля при $E=0$ соотношение (14) определяет порог вязкостной тепловой неустойчивости в виде

$$\tau_w = \tau_w^* = [(T_d - T_0)/\sqrt{2}\, T_d d]\,(U\lambda\mu(T_0))^{1/2},\quad (T_d - T_0) \geqslant T_0^2/U. \tag{16}$$

Соотношение (16) обобщает формулу (11) на случай $T_d \neq T_0$.

Область применимости критерия пробоя (14) значительно шире, чем рамки постановки задачи (3), (5), (7), и определяется малостью масштаба [8]

$$\delta = \left[\left(\sigma_0 E^2 + \frac{\tau_w^2}{\mu_0}\right)(U/T_d^2\lambda)\exp(-U/T_d)\right]^{-1/2} \tag{17}$$

по сравнению с любыми пространственными размерами неоднородности поля T (кривизной поверхности и размерами системы) для различных гидродинамических ситуаций при условии, что задано напряжение трения τ_w на горячей стенке и $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$. Например, для градиентного пристенного течения с заданным градиентом давления $\partial_x p \sim \Delta p/L$ в первом приближении величина $\tau_w^2 \backsim (\Delta p)^2$ и вследствие (14) порог пробоя E_* понижается с возрастанием перепада давления Δp или с возрастанием скорости потока. Этот вывод качественно подтверждается экспериментами [9]; детальное количественное сопоставление с (14) затруднено в связи с неопределенностью и неконтролируемостью тепловых и электрогидродинамических режимов течения в экспериментах [9].

Приведенные результаты по порогам тепловой неустойчивости являются следствием асимптотически точных решений задач (8) и (13), которые корректны при $U/T_0 \geqslant 10$ [7, 8]. Обычно в жидких диэлектриках энергия активации $U \sim 0.2$—5 эВ и при $T \sim 300$ K величина $U/T_0 \geqslant 10$.

4. Низкопороговый пробой текущей жидкости и техника безопасности при работе с нефтепродуктами

Из соотношений (9), (11) и (14), (16) следует, что порог пробоя понижается и $E_* \to 0$ вблизи порога гидродинамического теплового взрыва при $\tau_w \to \tau_w^*$. Когда $T_0 = T_d$ из (10), (11) видно, что критическому значению τ_w^* соответствует критическая скорость течения

$$v = v^* = 4.5\,[(\lambda T_0^2/U\mu_0)\exp(-U/T_0)]^{1/2}. \tag{18}$$

При $T_d > T_0(1+1.2T_0^2/U)$ из (14), (15) получается критическая скорость

$$v = v^* = 1.34\,[(\lambda T_d^2/U\mu_0)\exp(-U/T_d)]^{1/2}. \tag{19}$$

Различие в (18) и (19) обусловлено разницей в порогах вязкостной тепловой неустойчивости при наличии и в отсутствие горячей поверхности. Условие $v \geqslant v^*$ соответствует таким скоростям движения масел, при которых происходит прогорание подшипников смазки.

В трансформаторном масле при $T_0 = T_d = 300$ K и $\lambda = 10^{-1}$ Вт/м·град, $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$ Па·с, $U \sim 1$ эВ скорость $v^* \simeq 25$ м/с. Для вязких сортов неочищенной нефти с $\lambda = 10^{-1}$ Вт/м·град, $\mu = 1$ Па·с, $U \sim 1$ эВ величина $v^* = 4$ м/с, а при $U \sim 0.2$ эВ критическая скорость $v^* = 10$ м/с. Приведенные оценки справедливы для ламинарного течения, когда число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v d/\mu \leqslant 10^3$; в противном случае для вычисления порогов неустойчивости необходимо использовать значения λ, μ и τ, характерные для турбулентного потока.

Когда скорость $v = v^*$, саморазогрев жидкости ($\Delta T \sim T_0^2/U$) за счет вязкостной диссипации приводит к практически беспороговому пробою ($E_* \to 0$ и $t_u \to \infty$). При $E \neq 0$ пробой происходит за конечное время (см. (12))

$$t_u = 10.7\,(\chi T_0/d^3)\,(\lambda/UE^2\sigma(T_0))^{1/2}, \tag{20}$$

которое зависит от поля. В трансформаторном масле с $\sigma \sim 10^{-12}$ (Ом·м)$^{-1}$ при принятых выше условиях и $v=v^*$ величина $t_u \simeq (d^3E)^{-1}$ с. Для $d=10^{-3}$ м и $dE=1$ кВ время индукции $t_u \simeq 10^3$ с. Для вязких сортов неочищенной нефти с $\sigma \lesssim 10^{-8}$ (Ом·м)$^{-1}$ время индукции $t_u \simeq 10^{-2}\,(d^3E)^{-1}$ с и при $d=10^{-3}$ м, $dE=10$ В величина $t_u \simeq 10^3$ с. Подогрев поверхности еще больше понижает порог пробоя, и время индукции уменьшается до 10 с (раздел 3). Отметим также, что при малых скоростях движения и в покоящемся трансформаторном масле пороги пробоя относительно высоки и механизм пробоя не связан непосредственно с тепловой неустойчивостью. Тепловой механизм пробоя проявляется при достаточно больших скоростях движения $v \gtrsim \mu_\pm E$, где $\mu_\pm E$ — скорость дрейфа носителей заряда, $\mu_\pm$ — подвижность.

Указанные обстоятельства поясняют тенденцию к саморазогреву и, как следствие, к самовоспламенению нефти и нефтепродуктов при их перекачке и транспортировке, когда гидродинамическая тепловая неустойчивость стимулируется электрической при наличии поля E, обусловленного либо накоплением заряда статического электричества, либо сторонними наводками. Для исключения подобных нежелательных явлений необходимо повышать степень очистки жидкости (понижать σ), ограничивать время перекачки ($t < t_u$) и уменьшать скорость течения ($v < v^*$). Для сравнения отметим, что в больших объемах жидкостей с умеренной вязкостью пороги пробоя также повышаются при подавлении инициированных электрическим полем свободноконвективных движений [2].

Полученные результаты справедливы лишь в том случае, когда время релаксации неоднородности плотности объемного заряда в жидкости $t_e=\varepsilon_0\varepsilon/\sigma$ меньше, чем время релаксации неоднородности температуры $t_\chi=d^2/\chi$, или при $\sigma > \varepsilon\varepsilon_0\chi d^{-2}$. Последнее условие и определяет степень чистоты жидкости, в которой проявляется тепловой пробой. Например, в трансформаторном масле соответствующее ограничение имеет вид $\sigma > 10^{-18}\,d^{-2}$ (Ом·м)$^{-1}$. При $d=10^{-3}\ldots10^{-5}$ м получаем условие $\sigma > 10^{-12}\ldots10^{-8}$ (Ом·м)$^{-1}$. Рассмотренная теория неприменима к слишком тонким слоям жидкости с высокой степенью электроочистки.

5. Два режима пробоя при стабилизации течения по вязкому трению и по скорости течения жидкости

В вязких жидкостях $\nu=\nu(T)$ и $\nu \gg \chi$ (например, в трансформаторном масле $\nu/\chi \sim 300$). Поэтому время релаксации возмущений скорости $t_\nu=d^2/\nu$ много меньше времени релаксации возмущений температуры $t_\chi=d^2/\chi$ и возмущения скорости практически безынерционно подстраиваются под возмущения температуры. При этом для исследования тепловой неустойчивости достаточно ограничиться наиболее инерционной стадией — эволюцией возмущений температуры. Тогда вследствие быстрой перестройки поля скорости возникают два возможных квазистационарных режима течения: течение с постоянной скоростью $v=\mathrm{const}$ (см. (1)) и течение с постоянным напряжением трения $\tau_w=\mathrm{const}$ (см (3)). Для обеспечения условий $v=\mathrm{const}$ или $\tau_w=\mathrm{const}$ необходимо регулировать течение жидкости с характерным временем управления $t > d^2/\nu$. Такое регулирование обусловлено зависимостью вязкости ν, а следовательно, u и τ от T и обратной связью возмущений T' и τ, которая определяется отводом тепла за счет теплопроводности к границам жидкости с фиксированной температурой.

Рассмотрим случай $T_0=T_d$ и $U_\mu \neq U_\sigma$. Получим верхнюю (максимальную) оценку порога неустойчивости (пробоя), заменяя $\exp(U/T)$ на более медленную линейную функцию температуры $[1+(T-T_0)\,U/T_0^2]\exp(U/T_0)$. Представим T в виде суммы стационарного $T^{(0)}(y)$ и нестационарного $T'(y, t)$ распределений температуры $T=T^{(0)}+T'$, $T' \ll T^{(0)}$. При заданной температуре поверхности $T(y=0, d)=T_0=\mathrm{const}$ распределения $T^{(0)}$ и T' независимы и развитие неустойчивости определяется эволюцией T' (см. [2]). В режиме $\tau_w=\mathrm{const}$ для возмущений T' имеем уравнение

$$\rho C_p \partial_t T' = \lambda \partial^2_{yy} T' + \left[\sigma(T_0) E^2 \frac{U_\sigma}{T_0^2} + \frac{\tau_w^2 U_\mu}{\mu(T_0) T_0^2}\right] T', \tag{21}$$

с граничными условиями T' ($y=0$, d)$=0$. В режиме заданной скорости $v=\mathrm{const}$ для малых возмущений температуры $T'=T-T^{(0)}$ получаем уравнение

$$\rho C_p \partial_t T' = \lambda \partial^2_{yy} T' + \left[\sigma(T_0) E^2 \frac{U_\sigma}{T_0^2} - \mu(T_0) \frac{U_\mu}{T_0^2}\left(\frac{v}{d}\right)^2\right] T', \tag{22}$$

с однородными граничными условиями T' ($y=0$, d)$=0$.

Рассмотрим течение в отсутствие поля $E\equiv 0$. Из сопоставления (21) и (22) видно, что возмущения температуры соответственно растут или затухают вследствие вязкостной диссипации, т. е. в режиме $v=\mathrm{const}$ в отличие от $\tau_w=\mathrm{const}$ гидродинамический тепловой взрыв невозможен (впервые это обстоятельство было отмечено в [10], где исследовалась другая, конвективно неустойчивая, система и причины различия устойчивости при $v=\mathrm{const}$ и $\tau_w=\mathrm{const}$ не обсуждались). Подобная ситуация имеет место и в теории электрического теплового пробоя; режим постоянного напряжения аналогичен условию $\tau_w=\mathrm{const}$, а случай заданного тока эквивалентен режиму $v=\mathrm{const}$. Различие в режимах устойчивости, как и в электрической аналогии, обусловлено особенностями регулирования баланса мощности. Мощность сторонних механических источников энергии движения жидкости $P \backsim \mu\,(v^2/d)\,L \backsim \tau_w^2/\mu\,(T)$. Движение жидкости сопровождается ее разогревом и уменьшением вязкости $\mu\,(T)$. Поэтому для поддержания режима $\tau_w \backsim \mu v/d=\mathrm{const}$ необходимо увеличивать скорость v и мощность $P \sim \mu v^2$, как в экспериментах [11]. Для поддержания режима $v=\mathrm{const}$ необходимо уменьшать диссипируемую энергию и мощность P пропорционально вязкости μ, что и стабилизирует неустойчивость. Определим скорость регулирования мощности P. Из (21) видно, что время роста возмущений температуры за счет вязкостной диссипации при $\tau_w=\mathrm{const}$ характеризуется величиной $t_{\nu a}=\rho C_p \mu\,(T_0)\,T_0^2/\tau_w^2 U_\mu$. Перераспределение возмущений температуры в поперечном направлении обеспечивается теплопроводностью за время $t_\chi=d^2/\chi$. Равенство времен $t_\chi=t_{\nu a}$ соответствует критерию вязкостной тепловой неустойчивости (11). Следовательно, скорость $d_t \ln P$ увеличения мощности P, необходимая для развития гидродинамического теплового взрыва, определяется условием $(d_t \ln P)^{-1} \leqslant t_{\nu a} \leqslant t_\chi$. Для поддержания режима $v=\mathrm{const}$ необходимо уменьшать мощность P так, чтобы $d_t P \leqslant -P/t_{\nu a}$, при $t_{\nu a} > t_\chi$.

Рассмотрим устойчивость течения в электрическом поле, полагая

$$T' = \psi(y) \exp(-kt). \tag{23}$$

Тогда (21) приводит к уравнению

$$\chi d^2_{yy}\psi + (\varphi + k)\psi = 0, \quad \varphi = \left(\frac{\tau_w^2 U_\mu}{\mu(T_0) T_0^2} + \frac{\sigma(T_0) U_\sigma}{T_0^2} E^2\right)\frac{1}{\rho C_p} \tag{24}$$

с однородными граничными условиями ψ ($y=0$, d)$=0$. Возбуждению неустойчивости (условию $k \leqslant 0$) соответствует появление дискретного спектра или связанные состояния «квантовомеханической» частицы для уравнения Шредингера (24), где $\chi \to \hbar^2/2m$. Первый, наиболее низкий, уровень энергии $\varepsilon_1=k$ в прямоугольной потенциальной яме с глубиной

$$\varphi_0 = [\tau_w^2 U_\mu/\mu(T_0) + \sigma(T_0) U_\sigma E^2]/\rho C_p T_0^2 \tag{25}$$

и шириной d определяется величиной $\varepsilon_1=k \approx \varphi_0 - d^2\varphi_0^2/4\chi$ [12]. Связанные состояния появляются, когда энергия $\varepsilon_1=0$. Поэтому развитию неустойчивости отвечает условие $k=0$ или критическое значение потенциала $\varphi_0=\varphi_*=4\chi d^{-2}$, определяющее порог неустойчивости (пробоя) в виде

$$E_*^2 = \frac{4\lambda T_0^2}{d^2 U_\sigma \sigma(T_0)} - \frac{\tau_w^2 U_\mu}{\mu(T_0) U_\sigma \sigma(T_0)}, \quad \tau_w = \mathrm{const}. \tag{26}$$

Таким образом, возбуждение тепловой неустойчивости обеспечено, когда «потенциальная яма» $\varphi_0=\varphi_*$ достаточно глубока и широка, т. е. мощность источника тепловыделения превышает вполне определенный уровень или время усиления возмущений температуры $\sim\varphi^{-1}$ становится равным времени теплоотвода $\sim d^2/\chi$.

В покоящейся среде ($\tau_w=0$) соотношение (26) совпадает с (9) с точностью до 14 %, которая и определяет погрешность порога тепловой неустойчивости, полученного в рамках линеаризованной постановки задачи. Соотношение (26) обобщает формулу (9) на случай $U_\mu\neq U_\sigma$. Аналогично может быть рассмотрена тепловая неустойчивость при стабилизации течения по скорости $v=\text{const}$, т. е. задача (22), где глубина потенциальной ямы

$$\varphi_0=[\sigma(T_0)\,U_\sigma E^2-\mu(T_0)\,U_\mu(v/d)^2]/\rho C_pT_0^2 \tag{27}$$

и порог пробоя

$$E_*^2=\frac{4\lambda T_0^2}{d^2U_\sigma\sigma(T_0)}+\frac{\mu(T_0)\,U_\mu v^2}{\sigma(T_0)\,U_\sigma d^2},\quad v=\text{const}. \tag{28}$$

Сопоставление (26) и (28) показывает, что при стабилизации потока жидкости по скорости v порог пробоя E_* повышается с возрастанием v, а не уменьшается, как в случае стабилизации по τ_w. Различие в режимах пробоя обусловлено разницей в способах распределения объемных источников тепла при достижении одного и того же условия $\varphi_0=\varphi_*$. Необходимая для развития пробоя мощность черпается из двух источников энергии: электрического (джоулев нагрев) и механического (диссипативный вязкостный нагрев) и перераспределяется между ними в соответствии с режимом течения. Для повышения электрической прочности потока вязкой жидкости следует обеспечить режим течения с $v=\text{const}$.

Для течения типа Пуазейля (2) исследование устойчивости по аналогии с (21)—(24) сводится к задаче по определению собственных значений $k<0$ для уравнения (24) с однородными граничными условиями и потенциалом

$$\varphi=\left\{\sigma(T_0)\,U_\sigma E^2\pm\frac{U_\mu}{\mu(T_0)}\left[\frac{\Delta P}{L}\left(y-\frac{d}{2}\right)\right]^2\right\}\Big/\rho C_pT_0^2. \tag{29}$$

Знак «+» в (29) соответствует режиму $\tau(y=0)=\text{const}$ или $\Delta p/L=\text{const}$, а знак «—» отвечает условию $u(y=d/2)=\text{const}$ или $\Delta p/L\mu=\text{const}$. Такая постановка задачи не учитывает одного фактора — работу, затрачиваемую на сжатие жидкости под действием перепада давлений Δp. Если учесть изменение энтропии и энтальпии при сжатии жидкости, необходимое для ее прокачки, то в уравнении (5) следует добавить слагаемое $u\partial_x p=-u\Delta p/L$ (см. [3, с. 272; 13, гл. 12]). В течении типа Куэтта (1) движение обусловлено сдвигом границы, а не перепадом Δp, следовательно, $u\partial_x p=0$. Для течений типа Пуазейля слагаемым $u\partial_x p$ в уравнении теплопроводности обычно пренебрегают [3, 13]. Однако при учете диссипации в вязких жидкостях это приближение не является строго обоснованным, поскольку из (2) и (4) следует, что $\mu\,(\partial_y u)^2$ и $u\Delta p/L$ одного порядка величины. При наличии слагаемого $-u\Delta p/L$ в (5) исследование устойчивости приводит к спектральной задаче для уравнения (24) с потенциалом

$$\varphi=\left\{\sigma(T_0)\,U_\sigma E^2\pm\frac{U_\mu}{2\mu(T_0)}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)^2\left[y(y-d)+\frac{d^2}{2}\right]\right\}\Big/\rho C_pT_0^2 \tag{30}$$

и однородными граничными условиями $\psi(y=0,\ d)=0$. Сравнение (29) и (30) показывает, что учет $u\partial_x p$ изменяет профиль объемного источника тепловыделения, обусловленного движением среды. Порог пробоя по аналогии с (26), (28) определяется формулой

$$E_*^2=\frac{4\lambda T_0^2}{d^2U_\sigma\sigma(T_0)}\pm\frac{1}{\xi}\left(\frac{\Delta Pd}{L}\right)^2\frac{U_\mu}{U_\sigma\mu(T_0)\,\sigma(T_0)}, \tag{31}$$

где численный множитель $\xi\approx 2\pi$, $4<\xi<8$, знак «—» соответствует режиму течения с $\tau(y=0)=-\Delta pd/2L=\text{const}$, а знак «+» — режиму с $u(y=d/2)=$

$=\Delta pd^2/8L\mu=\text{const}$. Комментарии к формуле (31) подобны интерпретации соотношений (26) и (28). В отсутствие поля и при $\Delta p/L=\text{const}$ формула (31) определяет порог гидродинамического теплового взрыва, который с точностью до постоянного множителя порядка единицы совпадает с оценкой критерия возбуждения вязкостной тепловой неустойчивости, приведенной в [1].

Следует отметить, что задача (24) с потенциалами φ, описываемыми (29) и (30), подобна уравнению Шредингера соответственно для гармонического осциллятора и для свободной частицы в магнитном поле (см. [12]). Отличие указанных задач от квантовомеханических связано с разницей в граничных условиях ($\psi\equiv 0$ при $y<0$ и $y>d$), собственных функциях и собственных значениях, определяющих порог пробоя.

Литература

[1] *Мержанов А. Г., Руманов Э. Н.* // УФН. 1987. Т. 151. № 14. С. 553—593.
[2] *Галич Н. Е.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. № 11. С. 2115—2123.
[3] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука. 1986. 736 с.
[4] *Адамчевский И.* Электрическая проводимость жидких диэлектриков. Л.: Энергия, 1972. 295 с.
[5] *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1972. 720 с.
[6] *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. М.; Л.: Изд-во. АН СССР, 1945. 424 с.
[7] *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
[8] *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 491 с.
[9] *Лашков С. Ф.* // Тр. Всесоюзн. электротехн. ин-та. 1965. Вып. 72. С. 135—141.
[10] *Мержанов А. Г., Столин А. М.* // ПМТФ. 1974. № 1. С. 65—74.
[11] *Мержанов А. Г., Поцесельский А. П., Столин А. М., Штейнберг А. С.* // ДАН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 52—54.
[12] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. 3-е изд., перераб. и доп. при участии Л. П. Питаевского. М.: Наука, 1974. 752 с.
[13] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Поступило в Редакцию 12 января 1988 г.
В окончательной редакции 26 сентября 1988 г.