1989 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 59, N 4

10; 01

СЛИПИНГ-НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЗАМАГНИЧЕННОСТИ

В. Г. Лейман, М. Г. Никулин, Н. Е. Розанов

Исследована зависимость инкремента слипинг-неустойчивости нерелятивистского «холодного» электронного пучка от степени его замагниченности, характеризуемой частотой вихря ω_v. Показано, что для пучка с фиксированным значением ленгмюровской частоты ω_b неустойчивость имеет максимальный инкремент при $\omega_v \approx \omega_b$ и стремится к нулю при $\omega_v \to 0$ и $\omega_v \to \infty$. Найдены ограничения на величину магнитного поля на катоде из условия снижения инкремента не менее чем в два раза по отношению к максимально возможному при заданной ленгмюровской частоте пучка.

Одной из наиболее быстроразвивающихся неустойчивостей электронного пучка, распространяющегося в вакуумной трубе дрейфа во внешнем магнитном поле, является слипинг-неустойчивость [1-3]. Ее развитие вызывает нарастание аксиально-несимметричных возмущений и может приводить к разрушению пучка как целого или изменению его микроструктуры. Слипинг-неустойчивость возможна в пучках с неоднородным радиальным распределением продольной скорости и обусловлена радиальным дрейфом электронов в скрещенных продольном внешнем магнитном поле и азимутальном электрическом поле возмущения в пучке. Причиной неоднородного распределения продольной скорости может служить провисание потенциала в нескомпенсированном по заряду пучке.

К настоящему времени подробно исследована линейная стадия слипинг-неустойчивости электронных пучков в сильном внешнем магнитном поле. В работах [1-5] неустойчивость изучена в квазиклассическом приближении, позволившем рассмотреть лишь высшие радиальные и азимутальные моды. В [5] учтены эффекты, обусловленные релятивистскими скоростями частиц. Без использования квазиклассического приближения инкременты слипинг-неустойчивости найдены в [6] для нерелятивистского пучка, а в [7] — для релятивистского, целиком заполняющего пространство дрейфа. В [8] исследована зависимость инкрементов неустойчивости от радиусов пучка и трубы дрейфа при произвольном их соотношении. В работе [9] изучена линейная стадия диокотронной и слипинг-неустойчивости в трубчатом тонкостенном электронном пучке. В [10] показано, что в пучке, инжектируемом с незамагниченного катода, продольная скорость не зависит от радиальной координаты, поэтому слипинг-неустойчивость в таком пучке не развивается [2].

Однако до сих пор не проведено исследования слипинг-неустойчивости в пучке с произвольной степенью замагниченности. Оно необходимо как для нахождения допустимой величины магнитного поля на катоде, при которой слипинг-неустойчивость не будет развиваться, так и для определения условий наиболее быстрого ее развития.

В данной работе исследуется линейная стадия слипинг-неустойчивости цилиндрического нерелятивистского «холодного» электронного пучка, целиком заполняющего вакуумную трубу дрейфа в магнитном поле произвольной величины. Исследована зависимость инкремента неустойчивости от степени замагниченности пучка.

1. Равновесное состояние пучка в магнитном поле

Рассматривается цилиндрический нерелятивистский «холодный» электронный пучок, заполняющий вакуумную трубу дрейфа радиуса R и распространяющийся вдоль оси z, совпадающей с осью трубы, во внешнем магнитном поле B_z. Равновесное состояние пучка характеризуется стационарным ($\partial/\partial t=0$), аксиально-симметричным ($\partial/\partial\theta=0$), однородным в продольном направлении ($\partial/\partial z==0$) распределением характеристик пучка и внешнего магнитного поля и описывается, согласно [10], уравнениями

$$\frac{e}{m}\frac{d\varphi_0}{dr}-\omega_c v_{\theta 0}+\frac{v_{\theta 0}^2}{r}=0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\varphi_0}{dr}=4\pi e n_0, \tag{2}$$

$$v_{z0}^2+v_{\theta 0}^2=\frac{2e}{m}\varphi_0+\text{const}, \tag{3}$$

$$\frac{P_\theta}{m}\equiv v_{\theta 0}r-\int\limits_0^r\omega_c(r')\,r'dr'=\text{const}. \tag{4}$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты; t — время, $-e$, m — заряд и масса электрона; $\omega_c=eB_z/mc$ — циклотронная частота; φ — потенциал электрического поля; v_r, v_θ, v_z — компоненты скорости пучка; P_θ — компонент обобщенного момента импульса частиц. Индекс «0» относится к характеристикам равновесного состояния.

Уравнение (1) описывает баланс радиальных сил, действующих на частицу, (2) — это уравнение Пуассона, (3) описывает сохранение энергии частицы, (4) — закон сохранения ее азимутального обобщенного момента импульса в аксиально-симметричной системе.

В системе (1)—(4) не учтено собственное азимутальное магнитное поле пучка, что справедливо при $v_{z0}^2\ll c^2$, и собственное продольное магнитное поле, что возможно для пучка с током, малым по сравнению с током Альфвена [11].

В случае однородного по радиусу магнитного поля и нулевой азимутальной скорости частиц на катоде, с которого инжектируется пучок, из уравнения (4) получаем соотношение

$$v_{\theta 0}r-\frac{\omega_c r^2}{2}=-\frac{\omega_{ck}r_k^2}{2}, \tag{5}$$

в левой части которого записана величина P_θ/m в состоянии равновесия в трубе дрейфа, в правой — та же величина на катоде. В общем случае $\omega_{ck}\neq\omega_c$. Индекс «k» относится к величинам на катоде.

Считая распространение пучка от катода до сечения, где устанавливается равновесное состояние, ламинарным, при котором справедливо соотношение

$$\frac{r_k}{r}=\alpha=\text{const}, \tag{6}$$

получаем из (5)

$$v_{\theta 0}=\frac{\omega_c-\omega_{ck}\alpha^2}{2}r. \tag{7}$$

Из (7) следует, что в равновесии пучок вращается как целое с независящей от радиуса угловой скоростью $v_{\theta 0}/r$ (равновесие типа «жесткого ротатора» [11]).

Используя (7), находим из (1) и (2), что пучок имеет в равновесии однородную по радиусу плотность n_0 и квадратичное распределение потенциала

$$\varphi_0(r)=\pi e n_0 r^2+\varphi_0(0). \tag{8}$$

Выразим через равновесные параметры пучка его угловую скорость ω_e, соответствующую физически более реальному для транспортировки случаю медленного дрейфового вращения пучка, азимутальный обобщенный момент импульса электрона на катоде $P_{\theta k}$ и продольную скорость пучка v_{z0}

$$\omega_e \equiv \frac{v_{\theta 0}}{r} = \frac{1}{2}\left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_b^2}\right), \tag{9}$$

$$\frac{P_{\theta k}}{m} \equiv -\omega_{ck}\frac{r_k^2}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_b^2}\, r^2, \tag{10}$$

$$v_{z0} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{1}{2}\omega_b^2 - \omega_e^2\right) r^2}\ , \tag{11}$$

где $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ — ленгмюровская частота пучка, $v_0 = v_{z0}(0)$.

При условии

$$v_{z0}^2 \approx v_0^2 \gg \left|\frac{\omega_b^2}{2} - \omega_e^2\right| r^2 \tag{12}$$

находим «шир» продольной скорости пучка

$$v'_{z0} \equiv \frac{dv_{z0}}{dr} = \frac{\omega_b^2 - 2\omega_e^2}{2v_0}\, r. \tag{13}$$

Удобной величиной при дальнейших выкладках будет частота вихря (см., например, [11])

$$\omega_v \equiv \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_b^2}. \tag{14}$$

Она характеризует превышение магнитного поля над минимально возможным для удержания пучка с заданной ленгмюровской частотой в равновесии $\left(B_{z\,\min} = \frac{mc}{e}\omega_{c\,\min},\ \omega_{c\,\min} = \sqrt{2}\,\omega_b\right)$, а также степень замагниченности пучка и катода. При $\omega_v = 0$ пучок является бриллюэновским ($\omega_c = \omega_{c\,\min}$), а катод — незамагниченным ($P_{\theta k} = 0$).

Зависимость «шира» скорости от частоты вихря имеет вид

$$v'_{z0} = \frac{\omega_v\left(\sqrt{\omega_v^2 + 2\omega_b^2} - \omega_v\right)}{2v_0}\, r. \tag{15}$$

При $\omega_v \ll \sqrt{2}\,\omega_b$ $v'_{z0} \simeq \sqrt{2}\,\omega_v\omega_b r/2v_0$, а при $\omega_v^2 \gg 2\omega_b^2$ $v'_{z0} \simeq \omega_b^2 r/2v_0$.

2. Вывод и решение дисперсионного уравнения

Исследуем устойчивость найденного равновесного состояния по отношению к малым возмущениям вида $f(r)\exp[i(\omega t - k_z z + l\theta)]$, где ω, k_z, l — частота, продольное волновое число и номер азимутальной моды возмущения.

Используя линеаризованные гидродинамические уравнения для пучка, а также уравнение Пуассона и вводя обозначение

$$\omega_d \equiv \omega + l\omega_e - k_z v_{z0}(r), \tag{16}$$

для комплексной амплитуды возмущения потенциала $\varphi(r)$ получаем уравнение (см. также [4])

$$\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_d^2 - \omega_v^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\frac{d\varphi}{dr} - \frac{l^2}{r^2}\varphi\right) - k_z^2\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_d^2}\right)\varphi -$$
$$- \frac{k_z r v'_{z0}\omega_b^2}{\omega_d(\omega_d^2 - \omega_v^2)}\left[\frac{2\omega_d^2}{\omega_d^2 - \omega_v^2}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{l\varphi}{r}\frac{\omega_v}{\omega_d}\left(1 + \frac{2\omega_d^2}{\omega_d^2 - \omega_v^2}\right)\right] = 0, \tag{17}$$

где v'_{z0} определяется формулой (15).

Пренебрежем в (17) зависимостью ω_d от r, т. е. положим, что

$$\omega_d(r) \approx \omega_d(0) \equiv \omega + l\omega_e - k_z v_0. \tag{18}$$

Тогда при выполнении условия

$$\left|1-\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}\right| \geqslant \frac{2k_z r v'_{z0}\omega_b^2\omega_d}{(\omega_d^2-\omega_v^2)^2} \tag{19}$$

уравнение (17) является уравнением Бесселя. Его решения, ограниченные на оси $r=0$, записываются в виде

$$\varphi(r)=AJ_l(Sr), \tag{20}$$

где A — произвольная постоянная, J_l — функция Бесселя первого рода порядка l, а

$$S=\left[\frac{\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}\,\frac{\omega_v l k_z v'_{z0}}{\omega_d^2 r}\left(1+\frac{2\omega_d^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}\right)-k_z^2\left(1-\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2}\right)}{1-\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}}\right]^{1/2}. \tag{21}$$

Дисперсионное уравнение получается из условия равенства нулю потенциала на поверхности трубы дрейфа $\varphi(R)=0$

$$S^2R^2=\mu_{nl}^2, \tag{22}$$

где μ_{nl} — n-й корень функции Бесселя $J_l(\mu_{nl})=0$.

Определив поперечное волновое число соотношением

$$k_\perp\equiv\frac{\mu_{nl}}{R}, \tag{23}$$

перепишем дисперсионное уравнение следующим образом:

$$\frac{k_\perp^2}{k_\perp^2+k_z^2}\,\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}+\frac{k_z^2}{k_\perp^2+k_z^2}\,\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2}+\frac{\omega_b^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}\,\frac{l k_z\omega_v v'_{z0}}{r\omega_d^2(k_\perp^2+k_z^2)}\left(1+\frac{2\omega_d^2}{\omega_d^2-\omega_v^2}\right)=1. \tag{24}$$

Его решения в случае $v'_{z0}=0$ приведены в [11], а решения, описывающие слипинг-неустойчивость сильнозамагниченного пучка с $\omega_b^2\ll\omega_c^2\approx\omega_v^2$ при $v'_{z0}\neq0$, найдены в [2-8].

Изучим слипинг-неустойчивость электронного пучка при произвольной степени замагниченности, т. е. при $0\leqslant\omega_v/\omega_b<\infty$. Решение дисперсионного уравнения (24) в пределе низких частот

$$\omega_d^2\ll\omega_v^2 \tag{25}$$

имеет вид

$$\omega_d=\frac{k_z\omega_b\omega_v}{\sqrt{k_z^2\omega_v^2+k_\perp^2(\omega_v^2+\omega_b^2)}}\sqrt{1-\frac{l v'_{z0}}{k_z\omega_v r}}. \tag{26}$$

Из (26) следует, что неустойчивыми являются колебания с волновыми числами, лежащими в диапазонах

$$0<k_z<\frac{l v'_{z0}}{\omega_v r}\equiv 2k_{z1},\ k_{z1}>0;\ 2k_{z1}<k_z<0,\ k_{z1}<0. \tag{27}$$

В случае

$$\left(\frac{l}{\mu_{nl}}\frac{\omega_b R}{4v_0}\right)^2\frac{\omega_b^2}{\omega_b^2+\omega_v^2}\ll 1 \tag{28}$$

неустойчивые колебания являются квазипродольными: для них $k_{z_1}^2\ll k_\perp^2$.

При $k_z=k_{z1}$ неустойчивость имеет максимальный временно́й инкремент

$$\omega_{IM}=\frac{l\omega_b\omega_v}{4k_\perp v_0}\,\frac{(\sqrt{2\omega_b^2+\omega_v^2}-\omega_v)}{\sqrt{\omega_b^2+\omega_v^2}}. \tag{29}$$

В пределе $\omega_v\ll\omega_b$ для инкремента справедлива формула

$$\omega_{IM}\approx\frac{\sqrt{2}\,l\omega_b\omega_v}{4k_\perp v_0}, \tag{30}$$

при $\omega_v^2 \gg 2\omega_b^2$ выражение для инкремента принимает вид

$$\omega_{IM} \approx \frac{l\omega_b^3}{4k_\perp v_0 \omega_v}. \tag{31}$$

Максимизированное по ω_v значение ω_{IM} равно

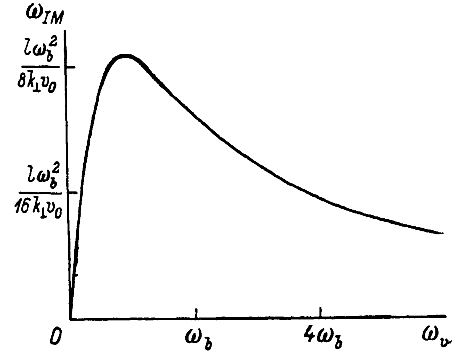
$$\omega_{IM}^{\max} \approx \frac{l\omega_b^2}{8k_\perp v_0} \tag{32}$$

и достигается вблизи $\omega_v = \omega_b$, т. е. когда $\omega_c \simeq \sqrt{3}\omega_b$. График зависимости инкремента (29) от ω_v для $\omega_b = \mathrm{const}$ показан на рисунке. Видно, что зависимость $\omega_{IM}(\omega_v)$ очень резкая, особенно в области $\omega_v \ll \omega_b$. Соответственно инкремент нарастает от нуля до максимального значения при изменении ω_c всего в 1.2 раза.

Из рисунка следует, что для снижения инкремента в два раза по отношению к максимальному (что условно можно считать критерием подавления слипинг-неустойчивости) требуется ω_v уменьшить до величины $\omega_b/5$ или увеличить до $4\omega_b$. Используя определение (14) и уравнение (10), перепишем эти условия в виде

$$\omega_{\text{ск}} \leqslant \left(\frac{R_0}{R_k}\right)^2 \frac{\omega_b}{5} \quad \text{или} \quad \omega_{\text{ск}} \geqslant \left(\frac{R_0}{R_k}\right)^2 4\omega_b, \tag{33}$$

где R_k и R_0 — радиусы пучка на катоде и в равновесии соответственно.



При фиксированном значении частоты вихря ω_v инкремент (29) монотонно растет с увеличением ленгмюровской частоты пучка ω_b: для $2\omega_b^2 \ll \omega_v^2$ — по закону (31), для $\omega_b \gg \omega_v$ — по закону (30).

Частота наиболее неустойчивых волн определяется соотношением

$$\omega_{RE} = k_{z1} v_0 - l\omega_e \tag{34}$$

и примерно равна $-l\omega_b\sqrt{2}/4$ при $\omega_v \ll \sqrt{2}\omega_b$ и $-l\omega_b^2/4\omega_v$ при $\omega_v^2 \gg 2\omega_b^2$. Максимальный пространственный инкремент k_{IM} связан с временны́м инкрементом (29) простым соотношением

$$k_{IM} = \frac{\omega_{IM}}{v_0} \tag{35}$$

и достигается на частоте, определяемой равенством

$$\omega + l\omega_e = \omega_1 \equiv k_{z1} v_0. \tag{36}$$

Действительная часть продольного волнового числа k_{RE} наиболее неустойчивой волны равна k_{z1}. Неустойчивость развивается в диапазонах частот

$$\frac{k_{z1} v_0}{2}\left(\frac{\omega_b}{k_\perp v_0}\right)^2 \equiv \omega_{\min} < \omega + l\omega_e < 2\omega_1, \ k_{z1} > 0;$$

$$2\omega_1 < \omega + l\omega_e < \omega_{\min}, \ k_{z1} < 0. \tag{37}$$

Зависимости величин k_{IM} и k_{RE} от значений ω_v и ω_b, как следует из (35)—(37), аналогичны зависимостям ω_{IM} и ω_{RE} от ω_v и ω_b (см. (29), (34)).

Из выражений (29), (23) следует, что наибольшим инкрементом среди радиальных мод обладает низшая радиальная мода $n=1$.

Уточним теперь сделанные предположения с учетом полученных результатов.

Условие (18) пренебрежения зависимостью ω_d от r

$$|\omega_d(r)| = |\omega_{RE} \pm i\omega_{IM} + l\omega_e - k_z v_{z0}(r)| \simeq |\omega_d(0)| = |\omega_{RE} \pm i\omega_{IM} + l\omega_e - k_z v_0| \tag{38}$$

перепишем в виде

$$|\omega_d(0)| \gg |k_z(v_{z0}(r)-v_0)| \approx |k_z v'_{z0} r|. \tag{39}$$

Подставляя в (39) вместо $\omega_d(0)$ значение ω_I (26), получаем при $k_z=k_{z1}$ и $r=R$ с учетом (28), (15)

$$\mu_{nl}\frac{\omega_b R}{v_0} \ll 1. \tag{40}$$

Неравенство (19) с учетом (25) принимает вид

$$|2\omega_d k_z r v'_{z0}| \ll \frac{\omega_b^2+\omega_v^2}{\omega_b^2}\omega_v^2 \tag{41}$$

и удовлетворяется при

$$\frac{l^2}{\mu_{nl}}\left(\frac{\omega_b R}{v_0}\frac{\omega_b^2}{\omega_b^2+\omega_v^2}\right)^3 \ll 1. \tag{42}$$

Условие (25) низкочастотности процесса в случае $k_z=k_{z1}$ имеет вид

$$\frac{k_{z1}^2}{k_\perp^2}\frac{\omega_b^2}{\omega_b^2+\omega_v^2} \ll 1 \tag{43}$$

и заведомо справедливо для квазипродольных колебаний с $k_{z1}^2 \ll k_\perp^2$, т. е. при выполнении неравенства (28).

Условие (12) после подстановки в него определения (9) и нахождения максимума правой части сводится к виду

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_b R}{v_0}\right)^2 \ll 1. \tag{44}$$

Сравнение неравенств (40)—(44) и (28) показывает, что достаточным условием их одновременного выполнения является соотношение (40).

Заключение

В работе исследовано влияние степени замагниченности нерелятивистского «холодного» электронного пучка на инкремент слипинг-неустойчивости, обусловленной неоднородным радиальным распределением его продольной скорости.

Показано, что инкремент неустойчивости пучка с фиксированной ленгмюровской частотой ω_b имеет максимум при значении частоты вихря $\omega_v \equiv \sqrt{\omega_c^2-2\omega_b^2}$, лежащем вблизи ω_b, т. е. при $\omega_c \simeq \sqrt{3}\,\omega_b$. В пределе $\omega_v \to 0$ инкремент неустойчивости стремится к нулю пропорционально ω_v. При $\omega_v \to \infty$ инкремент уменьшается как ω_v^{-1}.

Если фиксировано значение частоты вихря ω_v, то инкремент неустойчивости монотонно растет с увеличением ленгмюровской частоты пучка ω_b пропорционально ω_b^3 в случае $2\omega_b^2 \ll \omega_v^2$ и пропорционально ω_b в случае $\omega_b \gg \omega_v$.

Сформулированы ограничения на допустимую величину магнитного поля на катоде. Для снижения инкремента слипинг-неустойчивости не менее чем в 2 раза по отношению к максимально возможному в пучке с заданной ленгмюровской частотой ω_b величина магнитного поля на катоде должна удовлетворять ограничениям, вытекающим из формул (33).

Литература

[1] *Михайловский А. Б., Рухадзе А. А.* // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 12. С. 2143—2149.
[2] *Лейман В. Г.* // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1969. Вып. 5. С. 16—25.
[3] *Rome J. A., Briggs R. J.* // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. N 5. P. 796—804.

[4] *Гладун А. Д., Лейман В. Г.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 12. С. 2513—2517.
[5] *Карбушев Н. И., Удовиченко С. Ю.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 9. С. 1706—1709.
[6] *Желязков И. И., Рухадзе А. А.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 2. С. 259—264.
[7] *Карбушев Н. И., Рухадзе А. А., Удовиченко С. Ю.* // Кр. сообщ. по физике. М., 1984. Вып. 10. С. 26—29.
[8] *Никулин М. Г., Розанов Н. Е.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 2065—2069.
[9] *Mostrom M. A., Jones M. E.* // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. N 6. P. 1649—1658.
[10] *Reiser M.* // Phys. Fluids. 1977. Vol. 20. N 3. P. 477—486.
[11] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 46 с.

Поступило в Редакцию
2 ноября 1987 г.
В окончательной редакции
3 февраля 1988 г.