01; 10

АДИАБАТИЧЕСКАЯ САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВДОЛЬ ФРОНТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. И. Ситнов

Адиабатическая модель, в которой согласованно описываются ускорение заряженных частиц вдоль фронта электростатической волны в поперечном магнитном поле и ее нелинейное затухание, связанное с этим ускорением, исследована в нерелятивистском и ультрарелятивистском предельных случаях. В частности, исследована нелинейная эволюция волны вплоть до установления стационарного состояния системы (если оно имеется) и КПД преобразования энергии волны в кинетическую энергию ускоренных частиц. Получен энергетический спектр ускоренных частиц и обнаружен ряд его особенностей как связанных с особенностями первичного распределения захваченных частиц по энергии осцилляций поперек волнового фронта, так и отличающих данный механизм ускорения.

Введение

Ускорение заряженных частиц вдоль фронта электростатической волны большой амплитуды, распространяющейся в плазме поперек внешнего магнитного поля, объясняется электрическим полем, действующим на захваченные или отраженные от фронта частицы в связанной с волной системе отсчета [1, 2]. Естественно, такое взаимодействие частиц с волной должно приводить к изменению ее параметров и прежде всего к нелинейному затуханию волны, аналогичному затуханию Ландау [2]. В данной работе исследуется модель, согласованно описывающая оба эти процесса (ускорение частиц и затухание волны) с учетом начального распределения захваченных частиц по энергии осцилляций поперек волнового фронта. В рамках такого описания становится возможным проследить эволюцию волны на значительном интервале времени, определить КПД преобразования ее энергии в кинетическую энергию ускоренных частиц и энергетический спектр этих частиц. Необходимость в подобном уточненном описании возникает, в частности, в теории квазипоперечных бесстолкновительных ударных волн при больших числах Маха из-за многопотоковости движения [3]. В связи с крупными успехами в получении плазменных волн большой амплитуды [4] механизм [1, 2] рассматривается ныне и как основа перспективного плазменного ускорителя так называемого серфотрона [5, 6]. Самосогласованный подход представляет особенный интерес при исследовании серфотрона в режиме «неограниченного ускорения» [5], когда ускорение не может быть остановлено в результате увеличения поперечной фронту компоненты силы Лоренца при увеличении скорости движения вдоль фронта, поскольку величина этой скорости ограничена скоростью света. В этих условиях не зависящие от ускорения факторы (конечный размер ускоряющей системы, собственные неустойчивости и нелинейность опорной электростатической волны) весьма слабо ограничивают параметры гипотетического серфотрона [5, 7].

Основным допущением, позволяющим построить данную модель ускорения, является гипотеза адиабатичности изменения эффективного потенциала U_{eff}, в котором движется захваченная частица (рис. 1). При этом движение захваченных частиц поперек фронта волны характеризуется постоянной функцией распределения $f\,(I/I^{(s)}\,(0))$ по адиабатическому инварианту

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2m\,(W_{\perp}-U_{\text{eff}}\,(x))}\,dx,$$

а вдоль фронта — равномерным ускорением $\dot{p}_y = m\omega_H v_\Phi\,(1-v_\Phi^2/c^2)^{-1/2}$. Здесь $W_\perp$ — полная энергия осцилляторного движения частицы в яме U_{eff}, v_Φ — фазовая скорость волны, ω_H — циклотронная частота ускоряемых частиц, $I^{(s)}\,(t)$ — значение I на сепаратрисе. Переход частиц из захваченных в пролетные в рамках такого описания выглядит как стягивание сепаратрисы, т. е. уменьшение параметра $I^{(s)}\,(t)$.

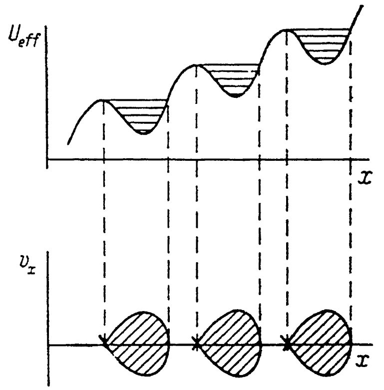


Рис. 1. Эффективный потенциал и фазовое пространство захваченных частиц.

Эволюция опорной электростатической волны связана с динамикой резонансных частиц законом сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E^2}{4\pi}\right)=-N_0 v_y\,\frac{dp_y}{dt}\int\limits_0^{I^{(s)}(t)/I^{(s)}(0)} f\,(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

Изменение энергии пролетных частиц при их взаимодействии с волной здесь не учитывается. Влияние этого эффекта на энергетический баланс оценено в разделе 2 на основе работ [8, 9]. В области релятивистских энергий могут оказаться существенными также такие эффекты, как ондуляторное излучение отдельных ускоренных частиц [10] или коллективное взаимодействие пучка этих частиц с фоновой плазмой, выходящие, однако, за рамки адиабатического приближения.

Полученное в результате нелинейное уравнение описывает эволюцию волны и захваченных частиц вплоть до установления стационарного состояния, в котором эффективный потенциал не содержит локальных минимумов.

1. Основные уравнения

Внешнее магнитное поле в рассматриваемой модели $\mathbf{H}=(0,\,0,\,H)$ постоянно и однородно. Поле опорной волны $E\,\sin\,(kx-\omega t)$, $\mathbf{E}=(E\,(t),\,0,\,0)$. Амплитуда волны и концентрация захваченных частиц заданы в момент $t=0$: $E\,(0)=E_0$, $N_{TR}\,(0)=N_0$. Запишем уравнения движения для электрона плазмы, захваченного волной, в движущейся вместе с ней системе отсчета (обобщение на другие сорта частиц сводится к переобозначениям)

$$mc\,\frac{d}{dt}\,(\beta_x\gamma)=-eE\,\sin\,k'x+eH\gamma_\Phi\beta_y, \qquad (2)$$

$$mc\,\frac{d}{dt}\,(\beta_y\gamma)=-eH\gamma_\Phi\,(\beta_\Phi+\beta_x),$$

$$\beta=\mathbf{v}/c,\quad \gamma_\Phi=\left(1-v_\Phi^2/c^2\right)^{-1/2},\quad v_\Phi=\omega/k,\quad k'=k/\gamma_\Phi. \qquad (3)$$

Предполагая, что амплитуда осцилляций скорости захваченных частиц много меньше фазовой скорости волны, сведем эту систему к одному уравнению (2) при $\beta_y=u\,(1+u^2)^{-1/2}$, $\gamma=(1+u^2)^{1/2}$, $u=\omega_H\beta_\Phi\gamma_\Phi t$. При постоянных параметрах $\beta_y\,(t)$, $\gamma\,(t)$ и $E\,(t)$ это уравнение описывает движение частицы в потенциальном поле

$$m\,\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial x}, \qquad (4)$$

где

$$U_{\text{eff}}=\gamma^{-1}\left(\frac{|e|E}{k'}\cos k'x-|e|H\beta_y\gamma_\Phi x\right). \tag{5}$$

Предположим теперь, что частота осцилляций захваченных частиц в поле волны много больше обратных времен τ_i^{-1}, характеризующих «медленные» процессы, меняющие эффективный потенциал: релятивистское увеличение массы частицы, уменьшение амплитуды поля волны и увеличение поперечной компоненты силы Лоренца [1]

$$\Omega=\left(\frac{|e|Ek}{m\gamma_\Phi\gamma}\right)^{1/2}\gg\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\ln\gamma,\\ \dfrac{d}{dt}\ln E,\end{cases}$$

$$\Omega\gg\omega\omega_H^2\Omega^{-2}\quad\text{при}\quad\gamma,\ \gamma_\Phi\simeq 1, \tag{6}$$

и перейдем к описанию с временны́м масштабом $\tau_0\gg\Omega^{-1}$. Для этого необходимо прежде всего определить фазовый объем захваченных частиц

$$I^{(s)}(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\left(U_{\text{eff}}(x_1)-U_{\text{eff}}(x)\right)}\,dx. \tag{7}$$

Здесь $k'x_1=\arcsin(H\beta_y\gamma_\Phi/E)$, а $x_2>x_1$ — следующий по величине нуль подынтегрального выражения. Вводя теперь безразмерные переменные $\tau=t\omega\omega_H^2\gamma_\Phi\Omega_0^{-2}$ и $\varepsilon=E(t)/E_0$ и объединяя формулы (1), (5) и (7), получаем уравнение эволюции опорной электростатической волны в виде

$$\sigma^2\gamma\varepsilon\frac{d\varepsilon}{d\tau}+\tau\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,g\left(\frac{\tau}{\varepsilon\gamma}\right)\right)=0, \tag{8}$$

где $\Phi(z)=\int\limits_0^z f(\xi)\,d\xi,\ \Phi(1)=1,$

$$g(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_{z_1(x)}^{z_2(x)}\sqrt{\sqrt{1-x^2}+xz_1-\cos z-xz}\,dz, \tag{9}$$

$z_1=\arcsin x$, z_2 определено аналогично $k'x_2$, $\sigma=\sqrt{2}\,\omega_H/\Omega_B$, $\Omega_B^2=4\pi e^2N_0/m$, $\gamma(\tau)=(1+\delta^2\tau^2)^{1/2}$. $\delta=E_0/(H\gamma_\Phi)$. $\Omega_0=\Omega(0)$.

Энергетический спектр ускоренных частиц определяется при этом из соотношения $dN\equiv N_0f_a(\gamma)\,d\gamma=-(\dot N_{TR}/\dot\gamma)\,d\gamma$

$$f_a(\gamma)=-\frac{\gamma}{\delta^2\tau}f\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,g\left(\frac{\tau}{\varepsilon\gamma}\right)\right)\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,g\left(\frac{\tau}{\varepsilon\gamma}\right)\right). \tag{10}$$

Уравнение (8) исследуем далее в двух предельных случаях: нерелятивистском ($\delta\tau\ll1$) и ультрарелятивистском ($\delta\tau\gg1$).

2. Нерелятивистский предел

Область нерелятивистских энергий ускоренных частиц представляет интерес прежде всего потому, что в этой области уже имеются экспериментальные данные [11-13]. Для решения уравнения (8) в этой области необходимо конкретизировать вид усредненной по фазе функции распределения захваченных частиц. Ограничимся простейшим случаем $f=1$. Однако высота этого «плато» по сравнению с распределением пролетных частиц произвольна и определяется

[1] Предположение заведомо нарушается вблизи сепаратрисы, однако величина этой области экспоненциально мала

$$\Delta I\sim I^{(s)}\exp(-\Omega\tau_0),\qquad \tau_0=\min_i\tau_i.$$

свободным параметром N_0/N_{UTR}, где N_{UTR} — концентрация пролетных частиц плазмы в интервале скоростей, соответствующем области захвата. С учетом всех ограничений уравнение (8) принимает вид

$$\sigma^2 \varepsilon^{1/2} \frac{d\varepsilon}{d\tau} + g\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = 0. \tag{11}$$

Система уравнений, согласованно описывающая ускорение частиц и затухание волны в нерелятивистском пределе, была получена также в работе [9] (уравнения (2. 7)), причем без явного введения грубой временно́й шкалы. Последнее, однако, не означало выхода за рамки адиабатического приближения, поскольку в модели [9] отсутствовало кинетическое уравнение для захваченных частиц. Наоборот, в модели [9] фактически использовался адиабатический инвариант с эффективным потенциалом, совпадающим с потенциалом электростатической волны, т. е. второе слагаемое в (5) рассматривалось как малое, а не как медленно меняющееся. При этом для описания перехода захваченных частиц в пролетные было наложено дополнительное, зависящее от фазы условие. Но на той стадии ускорения, где применим адиабатический инвариант модели [9], это условие излишне, и усреднение уравнения баланса энергии по фазам приводит к частному случаю уравнения (11) при $N_0 \simeq N_{UTR}$.

Рассмотрим различные режимы эволюции волны, описываемые уравнением (11).

а) $\sigma \gg 1$. Приближенное решение (11) имеет вид

$$\varepsilon \simeq 1 - \sigma^{-2} \int_0^\tau \xi g(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Время ускорения t_* и максимальная энергия W_* ускоренных частиц, согласно (11), определяются из условия $\varepsilon(\tau_*) = \tau_*$. В данном случае $\tau_* \simeq 1$. Это режим с низким КПД преобразования энергии волны в кинетическую энергию ускоренных частиц.

б) $\sigma \ll 1$. В этом случае уравнение (11) можно решить методом сшивки. В области B_1 $\tau \ll \varepsilon$, $g(x) \simeq 1 + \frac{\pi}{8} x \ln x$,

$$\varepsilon \simeq \left(1 - \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{3\pi}{16}\sigma \ln \sigma I(\eta)\right)^{2/3}, \quad \eta = \frac{\tau}{\sigma}, \tag{13}$$

$$I(\eta) = \int_0^\eta x^2 \left(1 - \frac{3}{4}x^2\right)^{-2/3} dx. \tag{14}$$

Отметим, что формула (13) описывает эффект «взрывного затухания» волны [14]. В области B_2 $\tau \simeq \tau_*$

$$\varepsilon \simeq \tau_* F^{-1}\left(\frac{\tau_* - \tau}{\sigma^2 \tau_*^{1/2}}\right), \tag{15}$$

$$F(z) = \int_0^z x^{1/2} (g(x^{-1}) + \sigma^2 \tau_*^{-1/2})^{-1} dx. \tag{16}$$

В результате для времени ускорения получаем формулу

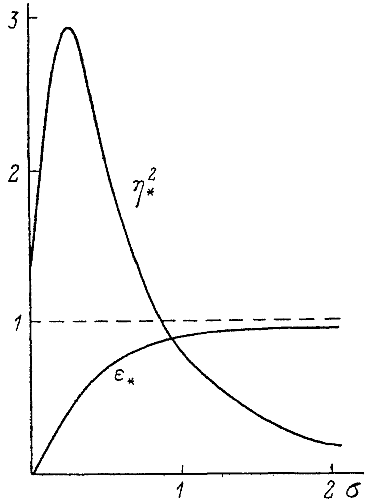
$$\tau_* \simeq \frac{2\sigma}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\pi}{8\sqrt{3}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right) \sigma \ln \sigma\right), \tag{17}$$

где $B(x, y)$ — бета-функция.

Функцию $\tau_*(\sigma)$ при конечных значениях параметра σ можно получить, численно интегрируя уравнение (11). Зависимости максимальной энергии ускоренных частиц и минимальной амплитуды электрического поля (непосредственно связанной с КПД ускорения) от величины внешнего магнитного поля отражают функции $\eta_*^2(\sigma)$ и $\varepsilon_*(\sigma)$ (рис. 2). Первая из этих зависимостей найдена также в экспериментах [11-13]. Экспериментальная зависимость ($\eta_* \sim \sigma$ при $\sigma \to 0$, $\eta_* \sim \sigma^{-1}$ при $\sigma \to \infty$) в области малых σ отлична от модельной ($\eta_* = \mathrm{const}$). Противоречие можно объяснить отсутствием зарядовой нейтрализации потока захваченных электронов, формируемого в условиях [11-13] при линейной трансформации электромагнитной волны в плазменную. Учет в уравнении (2) силы $\Delta F \simeq -4\pi e^2 N_0 v_\Phi t$, связанной с разделением зарядов, эквивалентен замене параметра σ на величину

$$\sigma_{eff} = \sigma(1 + 2\sigma^{-2}) \tag{18}$$

и дает нужную асимптотику $\eta_*(\sigma)$ в нуле. Из формулы (18) следует также оценка для «времени корреляции» t_c, не зависящего от магнитного поля и введенного в работе [11] для объяснения экспериментальной зависимости $\eta_*(\sigma)$: $t_c \sim \Omega_0^2 \omega^{-1} \Omega_B^{-2}$.



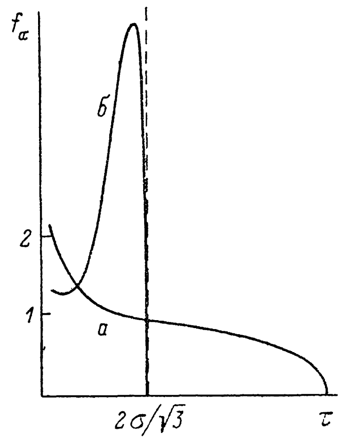


Рис. 2. Зависимости (в безразмерных переменных) максимальной энергии ускоренных частиц η_*^2 и минимальной амплитуды электрического поля ε_* от параметра σ в нерелятивистском случае.

Рис. 3. Функция распределения ускоренных частиц $f_a(v_y)$ для различных режимов ускорения в нерелятивистском случае.

а — $\sigma \gg 1$, *б* — $\sigma \ll 1$.

Путем введения добавочного гравитационного слагаемого в эффективный потенциал можно учесть влияние неоднородности плазмы на процесс ускорения [15]. Однако численное моделирование влияния неоднородности плазмы и внешнего магнитного поля на процесс захвата и ускорения частиц [6] показало, что для повышения эффективности ускорения степень неоднородности плазмы необходимо уменьшать.

Энергетический спектр ускоренных частиц в нерелятивистском случае удобнее описывать с помощью функции распределения по скорости v_y. Из соотношения (10) получаем в безразмерных переменных

$$f_a(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\left(\varepsilon^{1/2} g\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right), \quad v_y = v_\Phi \tau \frac{\Omega_0^2}{\omega\omega_H}. \tag{19}$$

Максимальная скорость частиц определяется формулами (12), (17)

$$v_{y*} = v_\Phi \frac{\Omega_0^2}{\omega} \begin{cases} \omega_H^{-1}, & \sigma \gg 1, \\ \Omega_B^{-1}, & \sigma \ll 1 \end{cases} \tag{20}$$

В пределе $\sigma \gg 1$ функция распределения $f_a \simeq -g'(\tau)$ монотонна (рис. 3, кривая *а*). В нуле она имеет интегрируемую логарифмическую особенность —

следствие предположения о бесконечно малой толщине неадиабатического слоя вблизи сепаратрисы. При $\sigma \ll 1$ и $\tau \ll \varepsilon$, согласно (13),

$$f_a \simeq -\frac{1}{2}\varepsilon_\tau'\varepsilon^{-1/2} - \frac{\pi}{\delta}\left(\varepsilon^{-1/2} - \tau\varepsilon_\tau'\varepsilon^{-3/2}\right)\ln\frac{\tau}{\varepsilon}, \tag{21}$$

а в области $\tau \simeq \tau_* \simeq \varepsilon$ имеет максимум (рис. 3, кривая *б*). Покажем это. Согласно (11) и (19),

$$f_a = \frac{\sigma^2}{\tau^2}\left(\tau\varepsilon\varepsilon_\tau'' + \varepsilon(\varepsilon_\tau')^2 - \varepsilon\varepsilon_\tau'\right). \tag{22}$$

В области, где аргумент функции F^- конечен, согласно (15) и (17), $\varepsilon \sim \sigma$, $\varepsilon_\tau' \sim \sigma^{-3/2}$, $\varepsilon_\tau'' \sim \sigma^{-4}$. Отсюда с помощью (22) находим, что высота максимума $f_a \sim \sigma^{-2}$, его ширина $\Delta\tau \sim \sigma^{5/2}$, а доля частиц в этой части спектра $\Delta N_{\max}/N_0 \sim \sigma^{1/2}$.

В A-режиме, когда время ускорения велико, а КПД ускорения мал, может оказаться существенным затухание опорной волны на пролетных частицах. Количественной мерой здесь является относительное изменение амплитуды волны в процессе ускорения $\Delta\varepsilon$

$$\Delta\varepsilon_{TR} = \varepsilon - \varepsilon_* \tag{23}$$

для захваченных частиц и

$$\Delta\varepsilon_{UTR} = t_* \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{24}$$

для пролетных. Согласно (23) и результатам работ [8, 9], для максвелловского распределения пролетных частиц с тепловой скоростью v_T в A-режиме ускорения

$$\frac{\Delta\varepsilon_{UTR}}{\Delta\varepsilon_{TR}} \sim \frac{N_{UTR}}{N_0} \begin{cases} \left(\dfrac{\omega_H v_\Phi}{\Omega_0 v_T}\right)^2 \dfrac{k v_y}{\Omega_0}, & t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega_H} \\[2ex] \left(\dfrac{\omega_H\Omega_0}{\Omega_B\omega}\right)^2 \dfrac{\omega_{UTR}}{\omega_E}\nu^2, & \nu \ll 1, \\[2ex] \left(\dfrac{\omega_H\Omega_0}{\Omega_B\omega}\right)^2 \dfrac{\omega_{UTR}}{\omega_E}\dfrac{\ln^2\nu}{\nu}, & \nu \gg 1, \end{cases} \tag{25}$$

где $\nu = \Omega_0^2(\omega\omega_H)^{-1}$; w_E, w_{UTR} — плотности энергии волны и пролетных частиц. Первая из оценок (25) получена в адиабатическом приближении. На больших временных масштабах $t \gg 2\pi\omega_H^{-1}$ затухание на пролетных частицах определяется стохастическим нагревом этих частиц [8, 9].

3. Ультрарелятивистский предел

В ультрарелятивистском пределе за время $\tau \leqslant \delta^{-1}$ расходуется малая часть общего изменения энергии опорной волны. В этих условиях уравнение (8) можно упростить, разлагая в ряд функцию распределения Φ в нуле

$$\varkappa\varphi^{1/2}\varphi_z' - (2z)^{-5/4} g\left(\frac{1-z}{\varphi}\right) = 0,$$

$$\varphi = \delta\varepsilon,\ z = 1 - \delta\tau\gamma^{-1},\ \varkappa = \sigma^2\delta^{1/2}/f(0). \tag{26}$$

Приближение (26) означает, что основную часть энергии волны, переданной частицам, уносят наиболее глубоко захваченные, наиболее долго ускоряемые и, следовательно, наиболее энергичные частицы.

Режим «неограниченного ускорения» [5] определяется условием $\delta > 1$ или $E_0 > H\gamma_\Phi$. Будем решать уравнение (26) в пределе $\delta \gg 1$, сшивая его приближенные решения в различных областях. Это прежде всего область O_1, где $g \simeq 1$ из-за малости аргумента этой функции. Решение (26) здесь

$$\frac{2}{3}\varkappa\left(\varphi^{3/2} - \delta^{3/2}\right) + 2^{3/4}\left(z^{-1/4} - 1\right) = 0. \tag{27}$$

Согласно (27), в ультрарелятивистском пределе должно выполняться также условие $\varkappa\delta^{3/2} \gg 1$. При этом зависимость g от аргумента становится существенной только при малых z в области O_2, где $g \simeq g\,(1/\varphi)$. Решая (26), в этой области имеем

$$\varkappa \int\limits_{\varphi_C}^{\varphi} \frac{x^{1/2}}{g\,(x^{-1})}\,dx + 2^{3/4}\left(z^{-1/4} - z_C^{-1/4}\right) = 0. \tag{28}$$

Здесь φ_C и Z_C — неизвестные константы, связанные условием сшивки (27) и (28) при $\varphi \gg 1$

$$z_C^{-1/4} - \frac{10}{3}\,\varkappa\Delta\varphi_C^{-1/4} \simeq \frac{2^{1/4}}{3}\,\varkappa\delta^{3/2},$$

$$\Delta\varphi_C = \varphi_C - 1 \ll 1. \tag{29}$$

Из асимптотики функции $g\,(\xi)$ при $\xi \to 1$

$$g\,(1 - x) \simeq \frac{2^{1/4}3}{5}\,x^{5/4} \ll 1 \tag{30}$$

следует, что левая часть (28) расходится при $\varphi \to 1$. Тем не менее затухание опорной волны может остановить процесс ускорения за конечное время, если величина $\Delta\varphi = \varphi - 1$ станет сравнима с z. Как следует из асимптотики (28) при $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi_C \ll 1$

$$\frac{10}{3}\,\varkappa\left(\Delta\varphi^{-1/4} - \Delta\varphi_C^{-1/4}\right) = z^{-1/4} - z_C^{-1/4}, \tag{31}$$

что возможно, если только $\varkappa \lesssim 1$. Приближенное решение (26) в области $|\Delta\varphi|$, $z \ll 1$ при $\varkappa \ll 1$ следует из (30)

$$\int\limits_0^{1+\Delta\varphi/z} \left(\frac{3}{10}\,\frac{x^{5/4}}{\chi} + 1\right)^{-1} dx = \ln\frac{z}{z_*}, \quad z_* = \min z \tag{32}$$

и сшивается с (31) при $\Delta\varphi \gg z$

$$z^{-1/4}D\,(\varkappa) - \frac{10}{3}\,\varkappa\Delta\varphi^{-1/4} \simeq \frac{1}{4}\,z^{-1/4}\ln\frac{z}{z_*}, \tag{33}$$

$$D\,(\varkappa) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{3}{10}\,\frac{x^{5/4}}{\varkappa} + 1\right)^{-1} dx \sim \varkappa^{4/5}, \tag{34}$$

если учесть, что, согласно (32), $\ln\,(z/z_*) \ll 1$. Объединяя (29), (31) и (33), получаем, что

$$z_* \simeq \frac{81}{2}\,\varkappa^{-4}\delta^{-6}, \tag{35}$$

и, таким образом, при условиях $E_0 \gg H\gamma_\Phi$ и $2\pi mc^2N_0 f\,(0) \gg E^{1/2}H^{3/2}\gamma_\Phi^{-1/2}$ предельно достижимая энергия ускоренных частиц $mc^2\gamma_*$ определяется формулой

$$\gamma_* \simeq \left(\frac{E_0^2}{6\pi mc^2\gamma_\Phi^2 N_0 f\,(0)}\right)^2, \tag{36}$$

т. е. определяется квадратом отношения плотностей энергии волны и глубокозахваченных частиц в лабораторной системе отсчета в начале ускорения.

В другом предельном случае $\varkappa \gg 1$ нелинейное затухание волны не останавливает процесс ускорения в целом и при $\gamma \gg \gamma_*$ описывается, согласно (29) и (31), уравнением

$$\Delta\varphi \simeq z\left(\frac{10\varkappa}{3}\right)^4 \left(1 - z^{1/4}z_*^{-1/4}\right)^{-4}. \tag{37}$$

Это, однако, вовсе не означает, что реализуется неограниченное ускорение частиц. В адиабатическом приближении даже при постоянной амплитуде опорной волны амплитуда осцилляций захваченной частицы неизбежно возрастает из-за релятивистского увеличения ее массы. Поэтому необходимым условием неограниченного ускорения является нарушение адиабатичности по параметру $\gamma(t)$, что совместно с критерием [5] дает

$$1 < \frac{E}{H\gamma_\Phi} \leqslant \frac{\omega_H \omega^2}{k^3 c^3} \gamma_\Phi^2, \tag{38}$$

КПД ускорения при $\gamma \gg 1$ близок к единице.

Энергетический спектр частиц (10) в ультрарелятивистском пределе имеет вид

$$f_a(\gamma) \simeq \frac{f(0)}{\delta^{1/2}\gamma^3}\left[\varphi^{1/2}(2z)^{1/4} g\left(\frac{1-z}{\varphi}\right)\right]_z', \tag{39}$$

где $z \simeq (2\gamma^2)^{-1}$.

При малых $\varkappa$ спектр определяется в основном областью O_1

$$f_a(\gamma) \simeq \frac{f(0)}{2\gamma^{3/2}} \vartheta(\gamma_* - \gamma), \tag{40}$$

где $\vartheta(x)$ — единичная функция Хевисайда.

Если же $\varkappa$ велико, то в области энергий $\gamma \gg \gamma_*$, согласно (37) и (40),

$$f_a(\gamma) \simeq \frac{9}{10} \frac{f(0)}{\delta^{1/2}\gamma^4}\left(\frac{10\varkappa}{3}\right)^5, \tag{41}$$

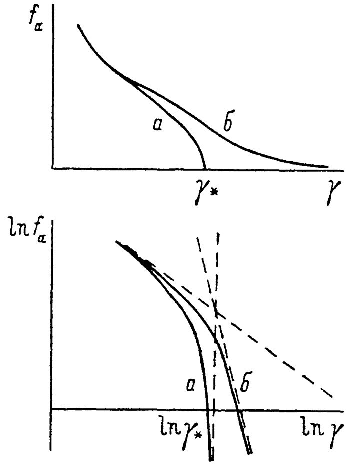


Рис. 4. Энергетический спектр ускоренных частиц в ультрарелятивистском предельном случае для различных режимов ускорения при одной критической энергии γ^*.

$а - \varkappa \ll 1$, $б - \varkappa \gg 1$.

т. е. энергетический спектр в логарифмическом масштабе имеет излом, подобный излому спектра космических лучей сверхвысокой энергии [17] (рис. 4).

Таким образом, несмотря на то, что энергетический разброс ускоренных частиц — прямое следствие их начального разброса по энергиям, имеется целый ряд особенностей энергетического спектра ускоренных частиц, характеризующих не особенности исходного спектра, а данный специфический механизм ускорения.

Разложение в ряд функции распределения захваченных частиц $f(I/I^{(s)}(0))$, сделанное при получении приближения (26), некорректно для распределений, достаточно резко меняющихся у дна потенциальной ямы. Поэтому в качестве приближения, обратного (26), рассмотрим ускорение частиц с начальным распределением $f(\xi) = f_0(f_0^{-1} - \xi)\vartheta(\xi)$ при $f_0 \gg 1$. В этом случае уравнение (8) имеет вид

$$\sigma^2 \varphi\varphi_z' - (2z)^{-3/2}\Phi\left[\varphi^{1/2}\delta^{-1/2}(2z)^{1/4} g\left(\frac{1-z}{\varphi}\right)\right] = 0 \tag{42}$$

и легко интегрируется на первом этапе ускорения, когда $f=0$ при условии $g \simeq 1$

$$\varphi \simeq (\delta^2 - \sqrt{2}\,\sigma^{-2} z^{-1/2})^{1/2}. \tag{43}$$

Подставляя это решение в условие

$$\varphi^{1/2}(2z)^{1/4} g\left(\frac{1-z}{\varphi}\right) = \delta^{1/2} f_0^{-1}, \tag{44}$$

определяющее начало следующего этапа ускорения ($f=f_0$), находим минимальную энергию ускоренных частиц

$$\gamma_*^{\min} \simeq \begin{cases} \dfrac{E_0^2}{4\pi N_0 \gamma_\Phi^2 mc^2}, & \sigma\delta \ll f_0, \quad (45) \\[2ex] f_0^2, & \sigma\delta \gg f_0. \quad (46) \end{cases}$$

Отметим, что формула (45) согласуется с оценкой, полученной в работе [7] непосредственно из закона сохранения энергии. Энергетический спектр ускоренных частиц определяется по-прежнему уравнением (26), однако с другими параметром $\varkappa=\sigma^2\delta^{1/2}f_0^{-1}$ и начальным условием $\varphi(\tilde{z})=\tilde{\varphi}$, где $\tilde{z}$ определяется формулой (44), а $\tilde{\varphi}$ — формулой (43). Решая это уравнение в области типа O_1, мы найдем энергию $\gamma_*^{\max}$, аналогичную критической энергии γ_* (формула (36)) и определяющую масштаб энергетического спектра ускоренных частиц как функцию начального разброса их по адиабатическому инварианту (и, следовательно, по энергии осцилляций поперек волнового фронта)

$$\gamma_*^{\max}\simeq\gamma^{\min}\begin{cases}1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sigma\delta}{f_0}\right)^4, & \sigma\delta\ll f_0, \qquad (47)\\[2ex] \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{\sigma\delta}{f_0}\right)^4, & \sigma\delta\gg f_0. \qquad (48)\end{cases}$$

Распределение захваченных частиц по адиабатическому инварианту по существу всегда конечной ширины, поскольку сингулярное распределение $f(\xi)=2\delta(\xi)$ неустойчиво, как пучок относительно филаментации (т. е. слипания токовых слоев соседних потенциальных ям) [18] и возбуждения электростатических бернштейновских волн, распространяющихся под углом к потоку частиц [19], а также как поток осцилляторов с частотой Ω относительно возбуждения поперечных циклотронных волн, распространяющихся вдоль потока в режиме аномального допплер-эффекта [20]. Подробный анализ указанных неустойчивостей выходит за рамки настоящей работы и составляет предмет отдельного сообщения.

Автор глубоко благодарен Л. М. Горбунову, А. П. Кропоткину, С. С. Моисееву и А. А. Рухадзе за обсуждение работы и ценные замечания.

Литература

[1] *Сагдеев Р. З.* // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Лентовича. М.: Госатомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20—80.
[2] *Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д.* // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17. Вып. 7. С. 389—394.
[3] *Arefiev V. S., Balikhin M. A., Gedalin M. E.* et al. // Proc. J. Varenna-Abastumani Intern. School and Workshop on Plasma-Astrophys. 1986. P. 243—252.
[4] *Umstadter D., Williams R., Clayton C., Joshi C.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. N 3. P. 292—295.
[5] *Katsouleas T., Dawson J. M.* // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. N 5. P. 392—395.
[6] *Файнберг Я. Б.* // Физика плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 5. С. 607—625.
[7] *Моисеев С. С., Мухин В. В., Новиков В. Е., Сагдеев Р. З.* // ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 2. С. 346—349.
[8] *Karney C. F. F.* // Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. N 11. P. 2188—2209.
[9] *Заславский Г. М., Мальков М. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д.* // Физика плазмы. 1986. Т. 12. Вып. 7. С. 788—805.
[10] *Заславский Г. М., Моисеев С. С., Черников А. А.* // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. Вып. 1 (7). С. 98—105.
[11] *Nishida Y., Yoshizumi M., Sugihara H.* // Phys. Lett. 1984. Vol. 105A. N 6. P. 300—302.
[12] *Nishida Y., Yoshizumi M., Sugihara R.* Institute Plasma Phys. Nagaya Univ. Rep. IPPJ-648. Nagaya, 1983.
[13] *Nishida Y., Sato N.* // Proc. XVIII Intern. Conf. on Phenomena in Ionised Gases. Swansea, 1987. Vol. 1. P. 216—217.
[14] *Грибов Б. Э., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. Вып. 2. С. 54—58.
[15] *Истомин Я. Н., Карпман В. И., Шкляр Д. Р.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. Вып. 3 (9). С. 909—920.
[16] *Ерохин Н. С., Лазарев А. А., Моисеев С. С.* и др. // Физика плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 9. С. 1082—1089.
[17] *Христиансен Г. Б.* Космические лучи сверхвысоких энергий. М., 1974. 268 с.
[18] *Маханьков В. Г., Рухадзе А. А.* // Ядерный синтез. 1962. Т. 2. С. 177—182.
[19] *Судан Р. Н.* // Основы физики плазмы. Дополнение к т. 2 / Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 38—82.
[20] Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 719 с.

Поступило в Редакцию
14 марта 1988 г.