01; 10

ОБ АВТОМОДУЛЯЦИИ СИЛЬНОТОЧНЫХ ПУЧКОВ

В. Ф. Тырнов

Рассматривается задача об автоколебаниях тока СЭП, диафрагмированного в области соленоида, расположенного за анодом диода, включенного в цепь обратного тока и создающего дополнительное к фокусирующему магнитное поле. Для пучка с осциллограммой тока, близкой к гауссовой кривой, найдены условия, выполнение которых обеспечивает существенную модуляцию тока пучка, и его пространственно-временная структура.

Сильноточный электронный пучок — один из наиболее интересных и перспективных объектов исследования в современной технической физике [1]. С ним связан ожидаемый прогресс в создании генераторов когерентного коротковолнового излучения на переходах в непрерывном спектре и других приборов плазменной электроники, а также возможность коллективного ускорения тяжелых ионов, убедительно показанная в работе [2].

Для достижения последней цели пучок можно использовать несколькими способами. Один из них состоит в создании переменной вдоль пучка плотности электронов. В этом случае точки максимальной плотности будут точками минимума потенциальной энергии для положительных ионов. Если созданные таким образом потенциальные ямы движутся вместе с пучком, то при выполнении некоторых условий ионы захватываются ими в режим ускорения.

Задача создания переменной вдоль пучка плотности электронов — это, собственно, задача его модуляции, которая в свою очередь допускает некоторое множество решений. Одно из этих решений, основанное на использовании обратного тока пучка, предложено и реализовано в работе [3]. Авторы диафрагмировали пучок, причем диафрагму помещали внутри соленоида, включенного в цепь обратного тока пучка и создающего магнитное поле, дополнительное к фокусирующему. Таким образом осуществляется обратная связь, необходимая для возникновения автоколебаний: ток на коллекторе влияет на ток непосредственно за анодом источника. Эффект модуляции имеет место при любом включении соленоида.

Настоящая работа посвящена теоретическому анализу этого способа модуляции пучка. Эквивалентная схема для реализованной в [3] ситуации показана на рис. 1. Зазор «сетка—катод» здесь изображает диод, являющийся источником пучка, а «анод триода» изображает коллектор. L и R_L — индуктивность и сопротивление соленоида в цепи обратного тока, C — емкость между лайнером и вакуумным кожухом. Резистор R изображает диафрагму, так как она предназначена для ответвления части тока пучка до попадания его на коллектор. i_R, i_L и i_C — токи через соответствующие элементы схемы.

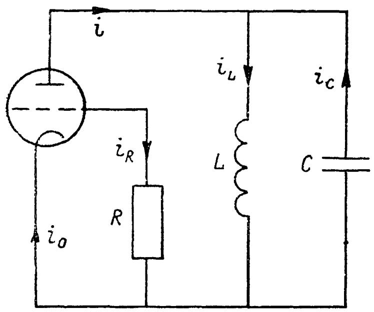
Будем считать, что процессы в цепи коллектора слабо влияют на работу диода, поэтому $i_0(t)$ — осциллограмма тока диода — является известной функцией времени. Поле, создаваемое соленоидом L, пропорционально току в нем. Оно складывается с фокусирующим полем H_0, поэтому полное поле в области диафрагмы есть

$$H = H_0\left(1 + \frac{a i_L}{H_0}\right), \quad \frac{a i_L}{H_0} < 1. \tag{1}$$

Будем считать выполненным сформулированное выше неравенство и на этом основании в дальнейшем все величины, пропорциональные α, будем считать малыми. Пусть r — радиус пучка, тогда в силу имеющей место адиабатической инвариантности $Hr^2=\beta=\mathrm{const}$. При некотором значении тока $i_L=i_{L0}$ радиус пучка равен радиусу диафрагмы r_0. Это значение тока находится из адиабатической инвариантности

$$i_{L0}=\frac{H_0}{\alpha}\left[\frac{\beta}{H_0r_0^2}-1\right]. \tag{2}$$

Выполнение неравенства $i_L<i_{L0}$, влечет за собой $r>r_0$ и часть пучка садится на диафрагму, при $i_L>i_{L0}$ $r<r_0$ и диафрагма не влияет на пучок. Ток непосредственно за диафрагмой, т. е. ток, уходящий на коллектор, легко найдем, считая плотность тока постоянной по поперечному сечению пучка. Он равен



$$i=i_0\frac{r_0^2H_0}{\beta}\left(1+\frac{\alpha i_L}{H_0}\right). \tag{3}$$

Покажем, что в такой системе развиваются автоколебания и приведем эффективную процедуру расчета пространственно-временно́й структуры пучка, однако предварительно сделаем замечание относительно границ применимости рассматриваемой модели. Пользоваться представлениями теории цепей с сосредоточенными параметрами допустимо до тех пор, пока размеры устройства не превышают длину волны излучения на характерной частоте. Для частот $\nu\sim 10$ МГц, о которых идет речь в [3], этот размер имеет порядок $\sim$10 м.

Полная система уравнений задачи, записанная на основании законов Кирхгофа, примененных к схеме рис. 1, имеет следующий вид:

$$i_L=i+i_C,$$

$$i=i_0\frac{r_0^2H_0}{\beta}\left(1+\frac{\alpha i_L}{H_0}\right),\quad i_L<i_{L0},$$

$$i=i_0,\quad i_L>i_{L0},$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+2\delta\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2i_C=0,\quad 2\delta=\frac{R_L}{C},\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC}. \tag{4}$$

Процедура исключения неизвестных приводит к следующим двум уравнениям относительно i_L, которые сменяют друг друга при перемене знака разности i_L-i_{L0}:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+2\delta\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2\left(1-\frac{r_0^2\alpha}{\beta}i_0\right)i_L=\frac{\omega_0^2r_0^2H_0}{\beta}i_0,\quad i_L<i_{L0}$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+2\delta\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2i_0,\quad i_L\geqslant i_{L0}. \tag{5}$$

В этой смене уравнений состоит нелинейность задачи. Второе из них решается точно. Его общее решение, полученное с помощью преобразования Фурье, таково:

$$i_L(t)=\sum B^{\pm}e^{i\Omega^{\pm}t}+\omega_0^2f_1(t),\quad i_L\geqslant i_{L0},$$

$$\Omega^{\pm}=\pm\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}+i\delta,\quad f_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i_0(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega}{\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\delta}. \tag{6}$$

Первое из уравнений (5) без правой части может быть переписано так:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+2\delta\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2i_L=\frac{\omega_0^2r_0^2\alpha}{\beta}i_0i_L.$$

Подставляя в правую часть вместо i_L решение этого уравнения при $\alpha=0$, найдем с помощью преобразования Фурье его приближенное решение

$$i_{L1}(t)=\sum A^{\pm}\left[e^{i\Omega\pm t}+\frac{\omega_0^2 r_0^2 a}{\beta} f^{\pm}(t)\right],$$

$$f^{\pm}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i_0(\omega-\Omega^{\pm})\,e^{i\omega t}d\omega}{\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\delta}. \tag{7}$$

Аналогичным образом можно найти приближенное выражение для частного решения

$$i_{L2}=\frac{\omega_0^2 r_0^2 H_0}{\beta}\left[f_1(t)+\frac{\omega_0^2 r_0^2 a}{\beta} f_2(t)\right], \tag{8}$$

где

$$f_2(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i_0(\omega-\omega')\,i_0(\omega')\,e^{i\omega t}d\omega d\omega'}{(\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\delta)(\omega_0^2-\omega'^2+2i\omega'\delta)}.$$

Общее решение первого из уравнений (5) представляет собой сумму выражений (7) и (8). Будем считать, что в начальный момент времени пучок имеет радиус, больший радиуса диафрагмы. Тогда с этого решения начинается процесс и константы $A^{\pm}$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить начальным условиям. В дальнейшем радиус пучка убывает и в момент времени $t=t_1$, определяемый условием $i_L(t_1)=i_{L0}$, достигает r_0. В этот момент решение (7), (8) сменяется решением (6) второго из уравнений (5). Коэффициенты $B^{\pm}$ должны быть подобраны так, чтобы решения обоих уравнений гладким образом переходили друг в друга. Поскольку сильноточные пучки являются импульсными, то их ток успевает совершить только небольшое число колебаний, поэтому описанная вычислительная процедура исчерпывает весь процесс за небольшое число шагов. Заметим, что по причине малости числа колебаний тока пучка нет смысла говорить об их частоте.

Общее решение первого из уравнений (5) можно записать (см. Приложение) следующим образом:

$$i_L(t)=A\cos(\omega_0 t+\alpha_0)+p\,[a+B\cos(2\omega_0 t+\gamma)]. \tag{9}$$

По поводу начальных условий и зависимости от них решения необходимо сделать некоторые замечания. Во-первых, для автоколебательных систем типичной является ситуация, когда система выходит на предельный цикл, не зависящий от начальных условий, т. е. процесс заканчивается режимом установившихся колебаний. В данном случае никаких установившихся колебаний нет, ток i определяемый, согласно (3), как функцией $i_L(t)$, так и функцией $i_0(t)$, обращается в нуль после конечного и притом небольшого числа прохождений через максимум, хотя чисто теоретически при нулевом затухании в части системы, а именно в контуре R_LLC, возможны незатухающие колебания. Таким образом, из-за невозможности предельного цикла пространственно-временна́я структура пучка зависит от начальных условий. С другой стороны, наличие уже упоминавшихся незатухающих колебаний в R_LLC-контуре означает, что при достаточно малом затухании δ и большой частоте повторения импульсов диода пространственно-временна́я структура пучка будет невоспроизводимой из-за влияния остаточных колебаний в контуре на начальные условия при каждом последующем разряде диода.

Второе замечание относится к возможности нулевых начальных условий. Для системы, совершающей гармонические колебания, нулевые начальные условия неизбежно приводят к нулевому решению. Для ангармонической системы это уже не так. Вопрос только в том, насколько нулевые начальные условия соответствуют физической реальности. Ток i_L — это некоторая доля тока i_0, ответвляющаяся на диафрагму. Поэтому естественно предположить, что эти токи и их производные обращаются в нуль одновременно. При аппроксимации осциллограммы тока диода с помощью гауссовой кривой $i_0(0)$ и $i_0'(0)$ приближенно равны нулю. Отсюда следуют и нулевые начальные условия.

Определив A^+ и A^-, мы тем самым определим и константы в выражении (9) (см. Приложение), которым и будем далее пользоваться. Постоянные a, B и γ в (9) можно вычислить с помощью формул, приведенных в Приложении при $p=0$. Результат таков:

$$a = 0, \quad \gamma = \varphi + \omega_0\theta,$$

$$B = \pm \frac{\sqrt{2}\,\omega_0 r_0^2 H_0 q}{\beta} \exp(\varphi_0 - 2\omega_0^2\tau^2)\sqrt{1 + \cos 2\omega_0\theta}. \tag{10}$$

Константы A и α в (9) можно найти с помощью тех же формул Приложения, но проще, поскольку a, B и γ уже известны, найти их заново из начальных условий, воспользовавшись (9). Получается

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = 2\operatorname{tg}\gamma, \quad A = -pB\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha_0}. \tag{11}$$

Таким образом,

$$i_L(t) = -pB\left[\mu\cos(\omega_0 t + \alpha_0) - \cos(2\omega_0 t + \gamma)\right], \quad \mu = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha_0}. \tag{12}$$

Теперь определим нужный знак в (10). При малых t функция (12) должна быть положительной возрастающей. Разлагая (12) в ряд по $\omega_0 t$ и удерживая первые неисчезающие члены, найдем

$$i_L(t) \approx -pB\left(\frac{3}{2}\cos\gamma\,\omega_0^2 t^2 - \sin\gamma\,\omega_0^3 t^3\right). \tag{13}$$

Отсюда ясно, что в (10) нужно выбирать знак, противоположный знаку $\cos\gamma$, если $\cos\gamma \neq 0$; если же $\cos\gamma = 0$, то знак B совпадает со знаком $\sin\gamma$.

Из выражений (10), (12) и (3) видно, что при большой полуширине импульса пучка по сравнению с периодом собственных колебаний в контуре модуляционные эффекты очень малы. Это объясняется тем, что при большой полуширине пучка максимум Фурье-преобразования $i_0(t)$ по ω очень узок и лежит вдали от собственной частоты контура ω_0, поэтому связь между пучком и контуром очень слаба. При малой же полуширине импульса модуляция отсутствует потому, что колебания в контуре не успевают совершаться. Оптимальной является такая ситуация, когда максимум модуля Фурье-преобразования $i_0(t)$ совпадает с собственной частотой контура. В действительности для рассматриваемой формы осциллограммы тока этого добиться нельзя, так как ее преобразование Фурье сосредоточено вблизи нуля. Сказанное можно подытожить следующим образом: модуляционные эффекты могут быть существенными только тогда, когда резонансная кривая контура имеет значительное перекрытие с максимумом модуля Фурье-образа $i_0(t)$. Реально это означает, что длительность импульса тока должна быть равна небольшому числу периодов собственных колебаний контура, частота которых в свою очередь должна быть как можно более низкой.

Момент времени $t=t_1$, в который система переходит в режим, описываемый зависимостью (6), удовлетворяет уравнению

$$i_{L0} = -pB\left[\mu\cos(\omega_0 t_1 + \alpha_0) - \cos(2\omega_0 t_1 + \gamma)\right]. \tag{14}$$

Может оказаться, что у этого уравнения нет положительных вещественных корней. Таких корней наверняка нет, если выполнено неравенство

$$i_{L0} > 3pB$$

или с учетом (2) и (10)

$$\frac{\beta}{H_0 r_0^2} - 1 > \frac{3}{2}\,\frac{\omega_0^2 r_0^4 q^2 a^2}{\beta^2}\exp(\varphi_0 - 2\omega_0^2\tau^2)\sqrt{1 + \cos 2\omega_0\theta}. \tag{15}$$

Условие (15) является условием на величину параметра α, которая, как легко показать, связана с параметрами дополнительного соленоида L следующим образом:

$$\alpha = \frac{L}{\pi R_0^2}, \tag{16}$$

где R_0 — радиус этого соленоида.

Если α удовлетворяет неравенству (15), то уравнение (14) вещественных положительных решений не имеет. Такой режим описывается только одним из уравнений (5), он является линейным, гармоническим, и в соответствии со сделанным выше замечанием при нулевых начальный условиях модуляция отсутствует. Критерий наличия положительных корней и, следовательно, значительной модуляции можно записать, обозначив буквой M максимальное значение выражения в квадратных скобках в (14),

$$\frac{M^2}{H_0^2 r_0^2} - 1 \leqslant \frac{\beta^2}{2} \frac{\omega_0^2 r_0^4 q^2 \alpha^2}{\beta^2} \exp(\varphi_0 - 2\omega_0^2 \tau^2) \sqrt{1 + \cos 2\omega_0 \theta}. \tag{17}$$

Дальнейшая детализация этого неравенства связана с необходимостью выписать решение алгебраического уравнения четвертой степени и по причине ее громоздкости не приводится.

Уравнение (14) может быть приведено к некоторому алгебраическому уравнению четвертой степени и решено точно. Обозначим через y значение $\cos(\omega_0 t_1 + \alpha_0)$, соответствующее наименьшему положительному значению t_1. Тогда значение производной от тока i_L в момент t_1 запишется

$$i'_L(t_1) = pB\omega_0 \left[\sqrt{1-y^2}\,(\mu + 4y\cos(\gamma - 2\alpha_0) - 2(2y^2 - 1)\sin(\gamma - 2\alpha_0))\right]. \tag{18}$$

Произведем теперь гладкую сшивку (12) и (6) в момент t_1. Нетрудно видеть, что (6) можно записать так:

$$i_L(t) = D\cos(\omega_0(t - t_1) + \Delta), \quad t \geqslant t_1, \quad i_L(t) \geqslant i_{L0}. \tag{19}$$

Требование непрерывности функции $i_L(t)$ и ее производной при $t = t_1$ дает

$$D = \sqrt{i_{L0}^2 + \frac{i_L'^2(t_1)}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg}\Delta = -\frac{1}{\omega_0}\frac{i'_L(t_1)}{i_{L0}}. \tag{20}$$

Величина D совместно с (3) определяет первый максимум модулированного тока за диафрагмой. Ток $i_L(t)$ определяется формулой (19) до тех пор, пока он вновь не достигнет значения i_{L0}. В этот момент необходимо вновь гладким образом вернуться к прежнему решению и т. д. Поскольку число колебаний невелико, то весь процесс быстро исчерпывается.

Зная функцию $i_L(t)$, распределение тока вдоль пучка в произвольный момент времени можно с помощью (3) записать

$$i(x;\ t) = \frac{r_0^2 H_0}{\beta} i_0\left(t - \frac{x}{v_0}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{H_0} i_L\left(t - \frac{x}{v_0}\right)\right). \tag{21}$$

Последняя формула описывает пространственно-временну́ю структуру модулированного пучка.

Было бы интересно и уместно сравнить результаты, полученные на основе развитых в данной работе представлений, с экспериментом [3], однако отсутствие в этой работе данных о емкости между лайнером и вакуумным кожухом не позволяет провести расчет.

Приложение

Решения уравнений (5), выражаемые формулами (6)—(8), определяются функцией $i_0(t)$, которая должна быть известна из эксперимента Однако кажется правдоподобным, что во многих случаях в качестве приемлемого приближения к $i_0(t)$ можно использовать гауссову кривую

$$i_0(t)=\frac{q}{\sqrt{2\pi}\,\tau}\exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}\right], \qquad (П1)$$

где t_0 — время нарастания тока в импульсе до его максимального значения, τ — его полуширина, а q — полный заряд, переносимый в импульсе.

Основной чертой такой идеализации является инфинитность гауссовой кривой, однако экспонента спадает в обе стороны настолько быстро, что с этим обстоятельством представляется разумным примириться. Преобразование Фурье функции (П1) таково [4]:

$$i_0(\omega)=q\exp\left(-i\omega t_0-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right). \qquad (П2)$$

Теперь функции f_1, $f^{\pm}$ и f_2, определяемые функцией $i_0(\omega)$, легко находятся с помощью теории вычетов [5]. Результат таков:

$$f_1(t)=-\frac{q}{2\omega_0}\left[z^* e^{i\omega_0 t}-z e^{-i\omega_0 t}\right],$$

$$f^+(t)=\frac{q}{2\omega_0}\left[1-f^* e^{-2i\omega_0 t}\right],$$

$$f^-(t)=-\frac{q}{2\omega_0}\left[1-f e^{2i\omega_0 t}\right],$$

$$f_2(t)=\frac{q}{2\omega_0}\left[z^* f^+(t)-z f^-(t)\right], \qquad (П3)$$

где

$$z=\exp(i\omega_0\theta+\varphi_0), \quad f=\exp(2i\omega_0 t_0-2\omega_0^2\tau^2),$$

$$\theta=\delta\tau^2+t_0, \quad \varphi_0=\delta t_0-\frac{\omega_0^2\tau^2}{2},$$

а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Кроме того, в окончательных выражениях, зависящих от времени величин в (П3), мы пренебрегли затуханием, положив $\Omega^{\pm}=\pm\omega_0$. Подставляя (П3) в (7) и (8), найдем $i_L(t)$ для $i_L<i_{L0}$

$$i_L(t)=(A^+-\sigma z^*)e^{i\omega_0 t}+(A^-+\sigma z)e^{-i\omega_0 t}+p(A^++\sigma z^*)(1-f^* e^{-2i\omega_0 t})-$$
$$-p(A^--\sigma z)(1-f e^{2i\omega_0 t}), \qquad (П4)$$

где

$$p=\frac{\omega_0 q r_0^2\alpha}{2\beta} \quad \text{и} \quad \sigma=\frac{\omega_0 r_0^2 H_0 q}{2\beta}.$$

Обозначая $A^+-\sigma z^*=a_1^- e^{i\alpha_1^-}$, $A^-+\sigma z=a_2^+ e^{i\alpha_2^+}$, $A^++\sigma z^*=a_1^+ e^{i\alpha_1^+}$, $A^--\sigma z=a_2^- e^{i\alpha_2^-}$ и отделяя в (П4) вещественную часть, можно записать ток через соленоид L при $i_L<i_{L0}$ в форме (9), где

$$a=a_1^+\cos\alpha_1^+-a_2^-\cos\alpha_2^-, \quad \varphi=2\omega_0 t_0,$$

$$A=\sqrt{(a_2^+)^2+(a_1^-)^2+2a_2^+a_1^-\cos(\alpha_1^-+\alpha_2^+)},$$

$$B=|f|\sqrt{(a_2^-)^2+(a_1^+)^2-2a_1^+a_2^-\cos(\alpha_2^--\alpha_1^+)},$$

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{a_2^-\sin(\varphi+\alpha_2^-)-a_1^+\sin(\varphi-\alpha_1^+)}{a_2^-\cos(\varphi+\alpha_2^-)-a_1^+\cos(\varphi-\alpha_1^+)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{a_1^-\sin\alpha_1^--a_2^+\sin\alpha_2^+}{a_1^-\cos\alpha_1^-+a_2^+\cos\alpha_2^+}. \qquad (П5)$$

Использовать выражение (9) для определения констант из начальных условий нецелесообразно, так как B и γ выражаются через A и α весьма громоздко. Для этой цели удобно использовать непосредственно выражение (П4). Нулевые начальные условия приводят к следующим выражениям для A^+ и A^-:

$$A^+ = \sigma z^* \left[1 - \frac{p}{2}\left(c_1 + c_2 - \frac{z}{z^*}(a_{22} - a_{12})\right)\right],$$

$$A^- = -\sigma z \left[1 + \frac{p}{2}\left(a_{12} + a_{22} + \frac{z}{z^*}(c_1 - c_2)\right)\right], \tag{П6}$$

где

$$a_{12} = 2 - f^* - f, \quad a_{22} = 2(f^* + f),$$
$$c_1 = 2(1 - f) + \frac{z}{z^*}(f - f^*),$$
$$c_2 = 4f + 2\frac{z}{z^*}(f - f^*).$$

Литература

[1] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[2] *Беликов В. В., Лымарь А. Г., Хижняк Н. А.* // Вопросы атомной науки и техники. Харьков, 1973. Вып. 3 (5). С. 78—80.
[3] *Айрапетов А. Ш., Маркеев А. М., Мещеров Р. А., Яблоков Б. Н.* // ЖТФ. 1987. Вып. 1. С. 81—85.
[4] *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 400 с.
[5] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958. 680 с.

Поступило в Редакцию
14 декабря 1987 г.
В окончательной редакции
10 мая 1988 г.