1988 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 58, в. 11
1988 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 58, № 11

УДК 538.12

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В УСЛОВИЯХ СИНХРОНИЗМА С ВОЗМУЩЕНИЕМ

Ю. Н. Маков

На основе вычисления и анализа второй вариации магнитной энергии пространственно-периодических магнитостатических полей при наложении возмущений, находящихся в синхронизме с данным полем, показана возможная неустойчивость данной системы. Результат работы противоположен выводу, сделанному в [2], об устойчивости таких полей по отношению к любым возмущениям. Построенный в работе конкретный пример неустойчивой ситуации согласуется с известным критерием работы [5] о возможной неустойчивости пространственно-периодических магнитостатических полей по отношению к крупномасштабным (по сравнению с масштабом самого поля) возмущениям.

1. При изучении возможных стационарных состояний магнитного поля самое пристальное внимание уделяется исследованию пространственно-периодических стационарных полей, в частности так называемому полю Белтрами [1-5] вида

$$\mathbf{B}_0 = (B_3 \cos \alpha z + B_2 \sin \alpha y,\ B_1 \cos \alpha x + B_3 \sin \alpha z,\ B_2 \cos \alpha y + B_1 \sin \alpha x), \tag{1}$$

которое обладает свойствами бессилового поля

$$\mathbf{j}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_0 = -\alpha \mathbf{B}_0. \tag{2}$$

При этом центральным моментом исследования стационарных состояний поля является анализ их устойчивости. Этот анализ проводится на основе вычисления второй вариации магнитной энергии $\delta^2 M$ рассматриваемого поля, положительная знакоопределенность которой показывает, что данное стационарное поле будет устойчиво относительно заданных возмущений, а отрицательная знакоопределенность соответствует неустойчивости (например, [2]).

Для пространственно-периодических статических полей особого внимания заслуживает случай пространственного синхронизма (резонанса) некоторых компонент такого поля с пространственными составляющими возмущения, поскольку известно, что распределенные системы в этом случае проявляют резонансные свойства, приводящие к самовозбуждению. Это указывает на то, что условие синхронизма предположительно должно изменять устойчивость стационарного состояния, если в отсутствие синхронизма это состояние действительно было устойчиво. Однако в недавней работе [2], где подробно исследуется устойчивость поля Белтрами на основе вычисления $\delta^2 M$, получено, что во всех случаях (в том числе и при указанном синхронизме) величина $\delta^2 M$ положительно-определенная, а значит, поле Белтрами устойчиво относительно любых пространственных возмущений. Причем в случае синхронизма выражение для $\delta^2 M$ приведено без вывода (см. [2], подстрочное примечание на с. 371), что вызывает определенные сомнения в правильности полученных результатов.

В настоящей работе на основе подробного вычисления выражения для второй вариации магнитной энергии пространственно-периодического магнитостатического поля в случае пространственного синхронизма комбинационных составляющих поля и возмущения показана возможность отрицательной знакоопределенности этой второй вариации, а значит, показана возможность неустойчивости такого поля в условиях синхронизма. Построенный в работе конкретный пример неустойчивой ситуации не противоречит известному критерию работы [5], согласно которому бессиловое поле действительно может быть неустойчиво для крупномасштабных (по сравнению с пространственным масштабом самого поля) возмущений, а в обратном случае неустойчивость невозможна.

2. В соответствии с [2] рассмотрим пространственно-периодическое стационарное поле

$$\mathbf{B}_0 = \sum_n \mathbf{B}_n e^{i\mathbf{a}_n \mathbf{x}}, \quad n = \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\mathbf{B}_{-n} = \mathbf{B}_n^*, \quad \mathbf{a}_{-n} = -\mathbf{a}_n, \quad |\mathbf{a}_n| = \alpha. \tag{4}$$

Для возмущения η в расположении силовых линий стационарного поля $\mathbf{B}_0$ используется Фурье-представление

$$\eta = \sum_m \eta_m e^{i\mathbf{k}_m \mathbf{x}}, \tag{5}$$

где

$$\eta_{-m} = \eta_m^*, \quad \mathbf{k}_{-m} = -\mathbf{k}_m. \tag{6}$$

Магнитное поле $\mathbf{B}_0$ и поле возмущений η являются бездивергентными

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = \nabla \cdot \eta = 0, \tag{7}$$

т. е.

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{B}_n = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{B}_n^* = \mathbf{k}_m \cdot \eta_m = \mathbf{k}_m \cdot \eta_m^* = 0. \tag{8}$$

Используем полученное в [2] (уравнение 2. 21) общее выражение для второй вариации магнитной энергии поля в виде

$$2\delta^2 M = \int \nabla \times (\eta \times \mathbf{B}_0) [\nabla \times (\eta \times \mathbf{B}_0) - (\eta \times \nabla \times \mathbf{B}_0)]\, dV. \tag{9}$$

Принимая во внимание представления (3) и (5), имеем

$$\eta \times \mathbf{B}_0 = \sum_{\lambda = (n,\, m)} \eta_m \times \mathbf{B}_n e^{i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}}, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{k}_\lambda = \mathbf{a}_n + \mathbf{k}_m, \tag{11}$$

λ — обозначает всевозможные упорядоченные пары (n, m),

$$\nabla \times (\eta \times \mathbf{B}_0) = \sum_{\lambda = (n,\, m)} i e^{i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}} [\mathbf{k}_\lambda \times (\eta_m \times \mathbf{B}_n)], \tag{12}$$

$$\nabla \times (\eta \times \mathbf{B}_0) - \eta \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) = \sum_{\lambda = (n,\, m)} i e^{i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}} [\mathbf{k}_\lambda \times (\eta_m \times \mathbf{B}_n) - \eta_m \times (\mathbf{a}_n \times \mathbf{B}_n)]. \tag{13}$$

Интеграл по объему в (9) заменяем на усреднение. С учетом (12) и (13) имеем

$$2\delta^2 M = \langle \nabla \times (\eta \times \mathbf{B}_0) [\nabla \times (\eta \times \mathbf{B}_0) - (\eta \times \nabla \times \mathbf{B}_0)] \rangle =$$
$$= \sum_{\lambda = (m,\, n)} - i e^{-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}} [\mathbf{k}_\lambda \times (\eta_m^* \times \mathbf{B}_n^*)]\, i e^{i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}} [\mathbf{k}_\lambda \times (\eta_m \times \mathbf{B}_n) - \eta_m \times (\mathbf{a}_n \times \mathbf{B}_n)]. \tag{14}$$

Отметим, что в общей сумме (14) среди всех возможных пар $\lambda = (m, n)$ могут быть две различные пары $\nu = (p, q)$ и $\nu' = (p', q')$, для которых будет выполняться равенство

$$\mathbf{k}_\nu = \mathbf{k}_{\nu'}, \ \text{т. е.} \ \mathbf{a}_p + \mathbf{k}_q = \mathbf{a}'_p + \mathbf{k}'_q. \tag{15}$$

Условие (15) можно назвать условием пространственного синхронизма для комбинационных составляющих поля и возмущения. При этом, если условие синхронизма выполняется для пар $\nu=(p, q)$ и $\nu'=(p', q')$, в силу (4), (6) и (15) оно будет выполняться и для пар $-\nu=(-p, -q)$, $-\nu'=(-p', -q')$, т. е. если $\mathbf{a}_p+\mathbf{k}_q=\mathbf{a}'_p+\mathbf{k}'_q$, то $\mathbf{a}_{-p}+\mathbf{k}_{-q}=\mathbf{a}'_{-p}+\mathbf{k}'_{-q}$.

При указанном условии синхронизма одному фазовому множителю $e^{i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}}$ в выражении (14) будет соответствовать сумма двух слагаемых с разными амплитудами при индексах (p, q) и (p', q') или $(-p, -q)$ и $(-p', -q')$ для комплексно-сопряженного фазового множителя $e^{-i\mathbf{k}_\lambda \mathbf{x}}$. Учитывая это, выделим в общей сумме (14) отдельно два слагаемых, соответствующих синхронизованным парам ν и ν', а также $-\nu$ и $-\nu'$. При этом будем иметь

$$2\delta^2 M=\sum_{\lambda=(m,\,n)}[\mathbf{k}_\lambda\times(\eta_m^*\times\mathbf{B}_n^*)][\mathbf{k}_\lambda\times(\eta_m\times\mathbf{B}_n)-\eta_m\times(\mathbf{a}_n\times\mathbf{B}_n)]+$$
$$+[\mathbf{k}_\nu\times(\eta_q^*\times\mathbf{B}_p^*)+\mathbf{k}'_\nu\times(\eta_q'^*\times\mathbf{B}_p'^*)][\mathbf{k}_\nu\times(\eta_q\times\mathbf{B}_p)-$$
$$-\eta_q\times(\mathbf{a}_p\times\mathbf{B}_p)+\mathbf{k}'_\nu\times(\eta'_q\times\mathbf{B}'_p)-\eta'_q\times(\mathbf{a}_p\times\mathbf{B}'_p)]+$$
$$+[-\mathbf{k}_\nu\times(\eta_q\times\mathbf{B}_p)-\mathbf{k}'_\nu\times(\eta'_q\times\mathbf{B}'_p)][-\mathbf{k}_\nu\times(\eta_q^*\times\mathbf{B}_p^*)+\eta_q^*\times(\mathbf{a}_p\times\mathbf{B}_p^*)-$$
$$-\mathbf{k}'_\nu(\eta_q'^*\times\mathbf{B}_p'^*)+\eta_q'^*\times(\mathbf{a}'_p\times\mathbf{B}_p'^*)]=$$
$$=\sum_{\lambda=(m,\,n)}|\eta_m|^2|\mathbf{k}_m\cdot\mathbf{B}_n|^2+2|\eta_q(\mathbf{k}_q\cdot\mathbf{B}_p)+\eta'_q(\mathbf{k}'_q\cdot\mathbf{B}'_p)|^2+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\{-(\mathbf{a}_p\cdot\eta_q'^*)(\mathbf{k}'_q\cdot\mathbf{B}_p'^*)(\mathbf{B}_p\cdot\eta_q)-(\mathbf{B}_p'^*\cdot\eta_q)(\mathbf{a}'_p\cdot\eta_q'^*)(\mathbf{k}_q\cdot\mathbf{B}_p)+$$
$$+(\mathbf{a}_p\cdot\mathbf{B}_p'^*)(\mathbf{a}'_p\cdot\eta_q'^*)(\mathbf{B}_p\cdot\eta_q)-(\mathbf{a}'_p\cdot\eta_q^*)(\mathbf{k}_q\cdot\mathbf{B}_p^*)(\mathbf{B}'_p\cdot\eta'_q)-$$
$$-(\mathbf{B}_p^*\cdot\eta'_q)(\mathbf{a}_p\cdot\eta_q^*)(\mathbf{k}'_q\cdot\mathbf{B}'_p)+(\mathbf{a}'_p\cdot\mathbf{B}_p^*)(\mathbf{a}_p\cdot\eta_q^*)(\mathbf{B}'_p\cdot\eta'_q)\}. \quad (16)$$

Необходимо помнить, что в первой сумме по λ в (16) исключены четыре слагаемые с синхронизованными парами индексов $(\pm p, \pm q)$ и $(\pm p', \pm q')$. Заметим также, что при получении окончательного выражения (16) использовалось представление двойного векторного произведения через скалярное произведение, а также условие (8).

От результата работы [2] для $\delta^2 M$ в рассматриваемом случае синхронизма (см. подстрочное примечание на с. 371 в [2]) наше выражение (16) отличается наличием последнего слагаемого в фигурных скобках. Именно это слагаемое может быть отрицательным при соответствующем подборе фаз составляющего поля и возмущения и «перекрыть» все заведомо положительные первые слагаемые, так что результирующая величина $\delta^2 M$ будет отрицательной, а значит, и соответствующее равновесное состояние магнитостатического поля будет неустойчиво в рассматриваемом случае синхронизма.[1] При этом полезно отметить, что в (16) все первые заведомо положительные слагаемые имеют характерную величину $|\eta|^2|\mathbf{k}|^2|\mathbf{B}|^2$, а все слагаемые в фигурных скобках, которые могут быть отрицательными, имеют характерную величину либо $|\eta|^2|\alpha||\mathbf{k}||\mathbf{B}|^2$, либо $|\eta|^2|\alpha|^2|\mathbf{B}|^2$. Таким образом, при отрицательной величине последних слагаемых в (16) они «перекрывают» положительные слагаемые при условии

$$s|\alpha|>|\mathbf{k}|, \quad (17)$$

где s — некоторый коэффициент, определяемый общим числом положительных и отрицательных слагаемых.

Условие (17), при котором $\delta^2 M$ может быть отрицательным и соответственно возможна неустойчивость пространственно-периодического магнитостатического поля, согласуется с условием работы [5].

3. Проиллюстрируем сделанный выше вывод о возможной неустойчивости для частного случая пространственно-периодического магнитостатического

---

[1] В отсутствие синхронизма в (16) будут присутствовать только заведомо положительные слагаемые с индексом λ, в результате чего условие $\delta^2 M>0$ показывает, что поле будет всегда устойчиво в этом случае.

поля, а именно для бессилового поля Белтрами (1). Если представить это поле в виде (3), то будем иметь

$$\mathbf{B}_1 = \left(0,\ \frac{B_1}{2},\ -\frac{i}{2} B_1\right),$$

$$\mathbf{B}_2 = \left(-\frac{i}{2} B_2,\ 0,\ \frac{B_2}{2}\right),$$

$$\mathbf{B}_3 = \left(\frac{B_3}{2},\ -\frac{i}{2} B_3,\ 0\right),$$

$$\mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{x}_0,\ \mathbf{a}_2 = \alpha \mathbf{y}_0,\ \mathbf{a}_3 = \alpha \mathbf{z}_0, \tag{18}$$

где $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$ — единичные векторы в направлении соответствующих осей.

Пусть возмущение η состоит из одной пространственной составляющей (в комплексном представлении — из двух комплексно-сопряженных компонент), т. е.

$$\eta = \eta_1 e^{i\mathbf{kx}} + \eta_{-1} e^{-i\mathbf{kx}}, \tag{19}$$

где $\eta_{-1} = \eta_1^*$.

Условие синхронизма определим равенствами

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{k} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{k},$$

$$-\mathbf{a}_1 + \mathbf{k} = -\mathbf{a}_2 - \mathbf{k}, \tag{20}$$

которые выполняются для пар $\nu=(1, -1)$ и $\nu'=(2, 1)$ и соответственно для пар $-\nu=(-1, 1)$ и $-\nu'=(-2, -1)$ из всех двенадцати всевозможных пар $(-3 \leqslant n \leqslant 3, m=\pm 1)$ для этого случая. При этом полученное общее выражение (16) для $\delta^2 M$ примет вид

$$2\delta^2 M = 2|\eta_1|^2 (|\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_1|^2 + |\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_2|^2 + 2|\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_3|^2) + 2|\eta_1^*(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_1) - \eta_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_2)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\{2(\mathbf{a}_1\cdot\eta_1)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_2)(\eta_1\cdot\mathbf{B}_1^*) - 2(\mathbf{a}_2\cdot\eta_1)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_1^*)(\eta_1\cdot\mathbf{B}_2) - (\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{B}_2)(\mathbf{a}_2\cdot\eta_1)(\mathbf{B}_1^*\cdot\eta_1) - (\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{B}_1^*)(\mathbf{a}_1\cdot\eta_1)(\mathbf{B}_2\cdot\eta_1)\}. \tag{21}$$

Конкретизируем наш пример следующими условиями:

$$\eta_1 = \eta_x \mathbf{x}_0 + \eta_y \mathbf{y}_0, \tag{22}$$

где $\eta_x = \eta$ — действительное $\eta_y = i\eta$ — мнимое,

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0, \tag{23}$$

$$k_x = -k_y = k,$$

$$B_1 \approx B_2 \approx B_3 = B. \tag{24}$$

Подставляя (18) с учетом (24) в (21), а также принимая во внимание (22), (23), получаем

$$2\delta^2 M = 8\eta^2 k^2 B^2 - 2\alpha\eta^2 k B^2. \tag{25}$$

При условии

$$\frac{1}{4}\alpha > k \tag{26}$$

получаем $\delta^2 M < 0$, т. е. рассматриваемое поле Белтрами будет неустойчиво по отношению к заданному возмущению.

Отметим, что $k^{-1} = L$ — пространственный масштаб возмущения η, α^{-1} — пространственный масштаб поля. Таким образом, условие (26) для возможной неустойчивости запишется в виде

$$\frac{1}{4} L > \alpha^{-1}. \tag{27}$$

Этот пример и полученное необходимое условие неустойчивости (27) дает основание считать, что для пространственно-периодических магнитостатических полей в случае синхронизма комбинационных составляющих поля и возмущения сохраняется доказанный ранее в работе [5] критерий, согласно которому пространственно-периодическое поле устойчиво для мелкомасштабных (по сравнению с масштабом самого поля) возмущений, а неустойчивость возможна только в противоположном (по соотношению масштабов) случае.

Автор благодарит В. И. Арнольда за стимулирующее участие в написании данной работы.

Литература

[1] *Moffatt H. K.* J. Fluid. Mech., 1985, v. 154, p. 493—507.
[2] *Moffatt H. K.* J. Fluid. Mech., 1986, v. 166, p. 359—378.
[3] *Арнольд В. И.* В кн.: Н. Е. Кочин и развитие механики. М.: Наука, 1984, с. 185—192.
[4] *Dombre T.* et al. J. Fluid. Mech., 1986, v. 167, p. 353—391.
[5] *Molodensky M. M.* Sol. Phys., 1974, v. 39, N 2, p. 393—404.

Московский текстильный институт
им. А. Н. Косыгина

Поступило в Редакцию
16 октября 1987 г.