На основании соотношения (12) с учетом (8) нетрудно получить приближенное уравнение, определяющее оптимальную ширину кольцевой решетки при больших значениях ее внутреннего радиуса ($\alpha R_1 \geqslant 4$)

$$\sum_{i=H,\,E} \frac{F(\alpha_i)\left[2\alpha_i W \sqrt{R_1/R_2}\exp(-\alpha_i W) - F(\alpha_i)\right]}{(1+\delta_i)\,\alpha_i^2\left[1-(2\alpha_i R_1)^{-1}+2(2\alpha_i R_1)^{-2}\right]} = 0, \tag{13}$$

где

$$F(\alpha) = 1-(2\alpha R_1)^{-1}+3(2\alpha R_1)^{-2}-\sqrt{R_1/R_2}\left[1-(2\alpha R_2)^{-1}+3(2\alpha R_2)^{-2}\right]e^{-\alpha W}.$$

Аналогичное уравнение для малых значений внутреннего радиуса решетки ($\alpha R_1 \leqslant 0.1$) принимает вид

$$\sum_{i=H,\,E} \frac{G(\alpha_i)\left[W\exp(-\alpha_i R_2)/\sqrt{R_2}-G(\alpha_i)\right]}{(1+\delta_i)\,\alpha_i\left[\ln(\gamma\cdot 2\alpha_i R_1)-2\alpha_i R_1+(\alpha_i R_1)^2\right]} = 0, \tag{14}$$

где

$$G(\alpha) = \sqrt{R_2}\,(1-\alpha R_2/3)-\sqrt{R_1}\,(1-\alpha R_1/3),$$

постоянная Эйлера $\gamma \approx 1.78$.

Литература

[1] *Tien P. K.* Opt. Lett., 1977, v. 1, N 2, p. 64—66.
[2] *Милер М., Скальски М.* Письма в ЖТФ, 1979, т. 5, № 23, с. 1447—1451; Opt. Commun., 1980, v. 33, N 1, p. 13—16.
[3] *Heitmann D., Optiz C.* IEEE J. Quantum Electron, 1981, v. 17, N 7, p. 1257—1263.
[4] *Hatakoshi G., Fujima H., Goto K.* Appl. Optics, 1984, v. 23, N 11, p. 1749—1753.
[5] *Киселев В. А., Прохоров А. М.* Квант. электр., 1982, т. 9, № 7, с. 1437—1442.
[6] *Boyd J. T., Chen C. L.* Appl. Optics, 1976, v. 15, N 6, p. 1389—1393.
[7] *Киселев В. А.* Квант. электр., 1974, т. 1, № 7, с. 1578—1584.
[8] *Киселев В. А., Прохоров А. М.* Квант. электр., 1977, т. 4, № 2, с. 544—555.
[9] Справочник по лазерам / Под ред. А. М. Прохорова. М.: Сов. радио, 1978, т. 2, с. 91.

Институт общей физики
АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
19 января 1987 г.

УДК 53 : 51

Журнал технической физики, т. 58, в. 8, 1988

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ СОЛИТОНА ПРОДОЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

А. М. Самсонов, Е. В. Сокуринская

Постоянный интерес привлекают исследования нелинейных волн конечной амплитуды в деформируемых твердых телах. Математическому изучению формирования и распространения уединенных волн и солитонов в нелинейно-упругих стержнях и пластинах посвящены, например, работы [1-4], однако при попытках экспериментального обнаружения таких волн возникают серьезные трудности. Такое несоответствие привело к уточнению исходной физической модели распространения нелинейных волн в твердом теле [5, 6] и более детальным оценкам возможности существования уединенных волн конечной деформации.

Уравнение длинных нелинейных волн продольной деформации в нелинейно-упругом стержне имеет вид уравнения «с двумя дисперсиями» [5]

$$v_{tt}-c_0^2 v_{xx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\rho}v^2+\nu^2 R^2\left(v_{tt}-c_1^2 v_{xx}\right)\right]_{xx}, \tag{1}$$

где $v=u_x$ — продольная деформация, t — время, x — продольная координата, ρ — плотность и ν — коэффициент Пуассона материала, c_0 и c_1 — скорости продольной и сдвиговой волн в стержне, R — радиус поперечного сечения стержня, $\beta=3E+2l\,(1-2\nu)^3+4m(1-2\nu)\times(1+\nu)^2+6n\nu^2$ — параметр нелинейности, а E — модуль Юнга материала. При выводе (1) предполагалось, что материал стержня описывается в рамках нелинейной модели Мурнагана с модулями упругости (l, m, n), учитывались конечные деформации («геометрическая нелинейность») и влияние поперечного движения частиц стержня в виде связи поперечного смещения w с продольной деформацией (пуассоново сжатие или растяжение): $w = -r\nu v$, где r — радиальная координата. Последнее вытекает из гипотезы плоских сечений и предположения о том, что боковая поверхность стержня свободна от радиальных напряжений. Члены в правой части (1) должны быть малы по сравнению со слагаемыми основного волнового оператора; баланс нелинейного и дисперсионных членов позволяет изучать квазистационарные и, в том числе, уединенные волны. Обычный путь оценки параметров возможного солитона деформации основан на приведении (1) к эволюционному уравнению Кортевега де Вриза (КдВ) (см. [1–4, 7]), что, как следует из [5, 6], сужает класс локализованных решений (1) и дает грубые оценки для амплитуды A, ширины λ и скорости V солитона деформации, а именно: $V > c_0$, $\lambda^2 \sim A^{-1}$.

Однопараметрическое семейство локализованных решений (1) вида $v(x, t) = A\,\mathrm{ch}^{-2}[\lambda^{-1}(x \pm \pm Vt)]$ приводит к более точным зависимостям

$$V^2 = c_0^2 + \frac{A\beta}{3\rho}, \quad \lambda^2 = 2\nu^2 R^2 \left[1 + \frac{3\rho}{A\beta}(c_0^2 - c_1^2)\right], \tag{2}$$

причем тип нелинейности влияет не только на величину, но и на знак β. Запись λ^2 из (2) в виде $\lambda^2 = 2\nu^2 R^2 (V^2 - c_1^2)(V^2 - c_0^2)^{-1}$ и требование локализации импульса $\lambda^2 > 0$ приводит к ограничениям на скорость V нелинейной волны $V > c_0$ или $0 < V < c_1$ и существованию так называемой «мертвой» зоны скоростей $c_1 < V < c_0$, при которых распространение локализованных нелинейных волн невозможно [6]. Формирование сверхзвуковых солитонов с $V > c_0$ можно предсказать по анализу уравнения КдВ, но существование дозвуковых солитонов с $0 < V < c_1$ следует только из анализа уравнения (1). Солитоны уравнения КдВ совпадают с частными решениями (1) при $V > c_0$, $A \ll 3E\,(1+2\nu)[2\beta\,(1+\nu)]^{-1}$.

Вторая трудность в экспериментах по возбуждению уединенных волн деформации состоит в выборе таких параметров начального импульса, которые позволят избежать «мертвой» зоны скоростей, оставляя справедливыми предположения о малости и равенстве по порядку величины нелинейных и дисперсионных членов в уравнении (1). Как известно, большие амплитуды начального импульса деформации порождают ударную волну в твердом теле (сильная нелинейность), а малые приводят к дисперсионному расплыванию импульса; поэтому для создания локализованной волны необходимо удовлетворить условию, связывающему постоянные материала и параметры начального возбуждения

$$|v_{\max}|_{t=0} = |A|_{t=0} \sim \frac{6E}{|\beta|}\left(\frac{\nu R}{\lambda}\right)^2 \frac{|V^2 - c_1^2|}{c_0^2}\Bigg|_{t=0}, \tag{3}$$

которое следует из анализа уравнения (1).

Наиболее простым опытом представляется возбуждение сверхзвуковой уединенной нелинейной волны (солитона) сжатия ($A < 0$), не приводящей к пластическому течению. Из (2) и (3) следует, что для этого параметры начального импульса должны удовлетворять условиям

$$V > c_0, \quad |A| < e_{\text{п}}, \quad \lambda > \nu R \sqrt{\frac{3E}{|\beta|\, e_{\text{п}}} \frac{(1+2\nu)}{(1+\nu)}}, \tag{4}$$

где $e_{\text{п}}$ — предел пластичности материала; кроме того, необходимо $\beta < 0$. Последнее, по данным [8], выполняется для большинства металлов, полимеров типа полистирола, кристаллов типа поваренной соли. Расчеты показывают, что при возбуждении в торце стержня импульса сжатия с максимальным давлением P_0 и шириной λ, удовлетворяющей (4), на расстоянии l от конца стержня может сформироваться локализованная плоская волна сжатия, имеющая амплитуду A, ширину λ и скорость V

$$l \sim \frac{R\nu}{4}\left(\frac{E}{|A\beta|}\right)^{3/2}, \quad |A| \sim \frac{P_0}{E}, \quad \lambda \sim \nu R \sqrt{2 + \frac{3E\,(1+2\nu)}{A\beta\,(1+\nu)}}, \quad V \sim c_0 \sqrt{1 + \frac{A\beta}{3E}}. \tag{5}$$

Максимальное смещение w боковой поверхности стержня вследствие пуассонова расширения оценивается по величине А: $w = -R\nu A$.

В частности, для полубесконечного стержня из полистирола ($R = 0.4$ см, $E = 3.6 \cdot 10^9$ Н/м², $c_0 = 1.8 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = 0.35$, $E/\beta = -0.06$, $e_{\text{п}} = 10^{-2}$), нагруженного ударной волной с $P_0 = 300$ атм, длительностью $\tau = 3$ мкс ($\lambda \sim 5$ мм), можно ожидать формирования уединенной волны (солитона) сжатия с характеристиками: $|A| \sim 8 \cdot 10^{-3}$, $\lambda \sim 7$ мм, $V = 1.02 c_0$, $|w| \sim 10$ мкм на расстоянии $l \sim 7$ мм от торца.

Приведем также пример расчета параметров солитона сжатия для стержня с $R = 0.4$ см из латуни Л-62 ($E = 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0.3$, $c_0 = 3.4 \cdot 10^3$ м/с, $E/\beta = -0.08$, $e_п = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $P_0 = 1000$ атм, $\tau \sim 4$ мкс, $\lambda \sim 1.4$ см): $|A| \sim 10^{-3}$, $\lambda \sim 2.0$ см, $V = 1.002 c_0$, $|w| \sim 1.2$ мкм, $l \sim 20$ см.

В стержнях из материалов с $\beta > 0$ (полимеры, оргстекло, плавленый кварц, стекло) возможно возбуждение сверхзвукового солитона растяжения ($A > 0$). Оценка параметров такой нелинейной волны по (5) в стержне из плавленого кварца ($E = 7.8 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\nu = 0.25$, $E/\beta = 0.17$, $c_0 = 5.4 \cdot 10^3$ м/с, $e_п = 6.4 \cdot 10^{-3}$, $R = 0.4$ см), сформировавшейся из начального импульса при $P_0 = 780$ атм и $\tau \sim 2$ мкс ($\lambda \sim 11$ мм) дает: $l \simeq 50$ см от торца, $A \sim 10^{-3}$, $\tau \approx 3$ мкс ($\lambda \approx 24$ мм), $V \approx 1.001 c_0$, $|w| \sim 1$ мкм.

Рассмотрим условие возбуждения дозвуковых солитонов. Определение V по (2) при ограничении $|A| < e_п$ приводит к следующему условию на упругие модули Мурнагана и другие упругие характеристики материала, в котором можно было бы ожидать формирования дозвуковых солитонов сжатия ($\beta > 0$) или растяжения ($\beta < 0$):

$$\varkappa \equiv \frac{3E(1+2\nu)}{2|\beta| e_п (1+\nu)} < 1. \tag{6}$$

Однако для большинства материалов $\varkappa \gg 1$: $\varkappa = 10^3$ для оргстекла, $\varkappa = 500$ для стали, $\varkappa = 200$ для латуни, и, значит, по нашим оценкам, в стержнях из таких материалов дозвуковые солитоны образоваться не могут. Материал, удовлетворяющий условию (6), и, следовательно, допускающий формирование дозвуковых солитонов, должен иметь большие значения параметра нелинейности $|\beta|$ и $e_п$. Подходящими характеристиками могут, по-видимому, обладать полимеры ($\varkappa \sim 10$ для некоторых полистиролов). Следует также отметить, что уравнение (1) описывает длинные нелинейные волны из несжимаемых высокоэластичных нелинейных материалов неогукова типа, поэтому можно ожидать выполнения условия (6) для резин, каучуков и т. п.

Важно оценить влияние диссипации на распространение нелинейных волн в стержне. Известно [9], что механизм диссипации упругих волн прежде всего обусловлен объемной и сдвиговой вязкостью, рассеянием на микронеоднородностях и теплопроводностью. Эксперименты и расчеты [9] показывают, что для тех частот, при которых еще не возникает рассеяния на отдельных кристаллах в структуре вещества, т. е. при значениях λ, много больших межатомного расстояния, затухание волн можно считать экспоненциальным с коэффициентом затухания α. Однако зависимость α от параметров материала и λ различна [9, 10] для линейной (индекс «1») и нелинейной (индекс «2») волн

$$\alpha_1 = \pi \varepsilon \lambda^{-1}, \quad \alpha_2 = 8\pi^2 \eta (\rho c \lambda^2)^{-1}, \tag{7}$$

где ε — постоянный коэффициент потерь, η — вязкость. В случае $\alpha_1 \ll \alpha_2$ затухание волн описывается линейной теорией, при $\alpha_1 \gg \alpha_2$ наоборот. Оценка α_1 и α_2 для солитона деформации растяжения в стержне из плавленого кварца радиуса $R = 0.4$ см при параметрах: $\varepsilon = 1.7 \cdot 10^{-6}$, $\eta = 6.7 \cdot 10^{-4}$ кг/м·с, $\lambda \sim 24$ мм дает: $\alpha_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$, $\alpha_2 = 7 \cdot 10^{-6}$ м$^{-1} \ll \alpha_1$, т. е. характерное расстояние затухания $\alpha_2^{-1} \sim 10^5$ м приблизительно на порядок превышает расстояние затухания α_1^{-1}, оцененное по линейной теории.

Литература

[1] *Nariboli G. A., Sedov A.* J. Math. Anal. and Appl., 1970, v. 32, N 3, p. 661—677.
[2] *Островский Л. А., Сутин Л. М.* ПММ, 1977, т. 41, № 3, с. 531—537.
[3] *Самсонов А. М.* ДАН СССР, 1984, т. 277, № 2, с. 332—335.
[4] *Самсонов А. М., Сокуринская Е. В.* ПММ, 1987, т. 51, в. 3, с. 483—488.
[5] *Samsonov A. M.* In: Proc. of the Intern. Conf. on Plasma Phys. Kiev: Naukova dumka, 1987, v. 4, p. 88—90.
[6] *Самсонов А. М.* ДАН СССР, 1988, т. 299, № 5, с. 1111 1114.
[7] *Вигдорчик Н. Е., Иоффе И. В.* Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, № 5, с. 314—316.
[8] *Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Банута С. А.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наукова думка, 1982. 286 с.
[9] *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 312 с.
[10] *Полякова А. Л.* Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 7, № 2, с. 76—78.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступила в Редакцию
3 ноября 1987 г.