УДК 53 : 51 Журнал технической физики, т. 58, в. 8, 1988

ЭФФЕКТ ДИССИПАЦИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В СВОБОДНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВОЛЧКЕ

В. В. Кротов

Будем предполагать, что хотя волчок и состоит из обычной упругой сплошной среды с «почти обратимыми» деформациями, однако главные моменты инерации J_1 $(=J_2)$, J_3 можно считать неизменными, а кинетическую энергию волчка в любой момент времени равной с достаточной степенью точности его кинетической энергии вращения как абсолютно твердого тела. Чтобы решить такую задачу в аналитическом виде, рассмотрим волчок, диссипация для которого просто рассчитывается благодаря его специальной форме — наличию тонкого стержня вдоль оси x_3 волчка. Остальную часть волчка будем считать недеформируемой при рассматриваемых скоростях движения (например, «волчок» наиболее привычной для нас с детства формы, но только с тонкой «осью»).

В системе координат, равномерно вращающейся со скоростью прецессии волчка $\Omega_{\text{пр}}$, ось инерции x_3 данного тела занимает в первом приближении фиксированное положение, а каждая точка стержня, кроме осевых, равномерно вращается по окружности достаточно малого радиуса. В силу последнего обстоятельства кориолисовыми силами, действующими на материальные точки тонкого стержня, можно пренебречь, учитывая лишь центробежное поле инерции $\mathbf{g}=[\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}\,[\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}]$ рассматриваемой системы отсчета. Данное поле изгибает стержень в соответствующей плоскости (ограничимся случаем слабого квазиравновесного изгиба, определяемого упругими силами), причем в собственной системе волчка указанный изгиб равномерно поворачивается с частотой $\dot\psi$ (ψ — угол собственного вращения), так что материальные элементы стержня испытывают переменные во времени деформации с частотой собственного вращения тела. Это приводит к поддерживанию в теле волчка градиентов температуры, вызывающих необратимые процессы переноса тепла, и к диссипации механической энергии благодаря внутреннему трению.[1]

Поскольку волчок в ходе указанных диссипативных процессов остается при своем свободном движении замкнутой системой материальных точек, то для его момента импульса имеем $\mathbf{M}=\text{const}$ и, следовательно (в силу соотношения $\mathbf{M}=J_1\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$), $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}=\text{const}$. При фиксированном $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$ между $\dot\psi$ и углом нутации θ для симметрического волчка существует однозначная связь (см. формулы 35, 4 [1])

$$\dot\psi=\frac{1}{J_3}(J_1-J_3)\,\Omega_{\text{пр}}\cos\theta, \tag{1}$$

а значит, и кинетическая энергия волчка (см. 35,2 [1]) однозначно связана с углом θ

$$E=\frac{J_1\Omega_{\text{пр}}^2}{2J_3}(J_1\cos^2\theta+J_3\sin^2\theta). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), получим

$$\frac{dE}{dt}=\frac{J_1\Omega_{\text{пр}}^2}{2J_3}(J_3-J_1)\sin 2\theta\,\frac{d\theta}{dt}. \tag{3}$$

Если производную $\frac{dE}{dt}(\theta)$ вычислить независимо, то в итоге придем к уравнению, описывающему функцию $\theta(t)$.

Прямой расчет $\frac{dE}{dt}(\theta)$ для тонкого стержня вдоль оси x_3 может быть проведен методами, сходными с использующимися при определении затухания поперечных колебаний тонких стержней [2]. В соответствии с 35,1 [2] для данного случая, когда значительно более быстрое изменение температура T испытывает поперек стержня (в плоскости изгиба, направлении y), имеем

$$\frac{dE_{\varkappa\eta\zeta}}{dt}=-\frac{\varkappa}{T}\int\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 dV-2\eta\int\left(\dot u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\dot u_{ee}\right)^2 dV-\zeta\int \dot u_{ee}^2\,dV, \tag{4}$$

[1] Вклад могут давать и другие явления переноса, а также конкретные локальные процессы (например, обратимая химическая реакция).

где $\varkappa$, η — коэффициент теплопроводности и сдвиговая вязкость стержня; ζ — вязкость к изменению объема V. Связанная с диссипацией осциллирующая часть отличных от нуля компонентов тензора деформации u_{ik} имеет для изогнутого стержня вид

$$u_{11} = u_{22} = -\sigma_{\text{ад}} K y = -\sigma_{\text{ад}} K r' \sin\psi, \quad u_{33} = K y = K r' \sin\psi, \tag{5}$$

где K — кривизна оси стержня; $\sigma_{\text{ад}}$ — адиабатический коэффициент Пуассона; r' — расстояние до оси стержня, имеющего радиус r ($\ll \chi_2 - \chi_1$; χ_1 и χ_2 — координаты вдоль оси x_3 точки крепления и свободного конца стержня). С учетом формул 35,2 [2] и 22,4 [2] для вклада механизма теплопроводности стержня получаем

$$\frac{dE_\varkappa}{dt} = -\frac{\varkappa}{T}\int\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 dV = -\left(\pi\varkappa a^2 T E_{\text{ад}}^2 r^2 / 9\rho^2 c_p\right)\int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} K^2(x_3)\,dx_3, \tag{6}$$

где ρ, a — плотность и коэффициент теплового расширения стержня; $E_{\text{ад}}$ — его адиабатический модуль Юнга; c_p — теплоемкость при постоянном давлении. В соответствии с (4) и (5) для диссипации за счет вязкостей имеем

$$\frac{dE_{\eta\zeta}}{dt} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)(1 - 2\sigma_{\text{ад}})^2\,\dot\psi^2 r^4 \int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} K^2(x_3)\,dx_3. \tag{7}$$

Величина входящего в (6) и (7) интеграла для поля $\mathbf{g} = [\mathbf{\Omega}_{\text{пр}}[\mathbf{R}\mathbf{\Omega}_{\text{пр}}]]$ определяется с помощью формул 17,8 и 17,11 [2]

$$\int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} K^2(x_3)\,dx_3 = \rho^2 \Omega_{\text{пр}}^4 L^7 \sin^2 2\theta / r^4 E_{\text{ад}}^2,$$

где

$$L^7 \equiv 0.105\chi_2^7 - \frac{4}{9}\chi_2^6\chi_1 + \frac{2}{5}\chi_2^5\chi_1^2 - \frac{1}{3}\chi_2^4\chi_1^3 - \frac{1}{9}\chi_2^3\chi_1^4 + \frac{2}{15}\chi_2^2\chi_1^5 - \frac{1}{63}\chi_1^7 \quad (>0).$$

Интересующая нас в итоге зависимость $dE_{\varkappa\eta\zeta}/dt$ от θ имеет вид

$$\frac{dE_{\varkappa\eta\zeta}}{dt} = -\frac{\pi L^7 \Omega_{\text{пр}}^2}{r^2}\left(\frac{\varkappa a^2 T}{9 c_p} + a^2\cos^2\theta\right)\sin^2 2\theta, \tag{8}$$

где

$$a \equiv \rho r \Omega_{\text{пр}} (J_1 - J_3)(1 - 2\sigma_{\text{ад}})\sqrt{\frac{4}{3}\eta + \zeta}\Big/ 2 J_3 E_{\text{ад}}.$$

Из (3) и (8), полагая, что $dE/dt = dE_{\varkappa\eta\zeta}/dt$, получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1 + b^2\cos^2\theta}{2t_\varkappa}\sin 2\theta, \tag{9}$$

где

$$t_\varkappa \equiv 9 J_1 (J_1 - J_3) c_p^2 r^2 / 4\pi\varkappa a^2 T J_3 \Omega_{\text{пр}}^2 L^7 \quad (>0 \text{ при } J_1 > J_3),$$
$$b \equiv 3 a c_p / a\sqrt{\varkappa T}.$$

Из (9) для $\theta \ll 1$ получаем экспоненциальный рост возмущения, а для $\theta' \equiv \pi/2 - \theta \ll 1$ экспоненциальное убывание (определяющееся только диссипативным механизмом теплопроводности [2])

$$\theta = \theta_0 \exp\left(\frac{1 + b^2}{t_\varkappa} t\right), \quad \theta' = \theta_0' \exp\left(-\frac{t}{t_\varkappa}\right)$$

(при $J_1 < J_3$ устойчивое и неустойчивое состояния вращения меняются местами). Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$t = \frac{t_\varkappa}{1 + b^2}\left[\left(1 + \frac{b^2}{2}\right)\ln \operatorname{tg}\theta + \frac{b^2}{2}\ln\frac{1 + b^2\cos^2\theta}{b^2\sin\theta\cos\theta}\right]_{\theta_0}^{\theta}. \tag{10}$$

[2] В соответствии с (9) при $b^2 \ll 1$ механизм теплопроводности определяет весь процесс ($0 < \theta < \pi/2$) «перевертывания» волчка: $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 \exp(t/t_\varkappa)$, а при $b^2\cos^2\theta \gg 1$ перевертывает механизм вязкости (последний не зависит от r!).

Условие применимости проведенных расчетов эффекта (но не его наличия вообще) может быть записано в виде $|\, dF/dE \,| \ll 1$, где F — свободная энергия тонкого стержня круглого сечения

$$F = \frac{\pi}{8} r^4 E_{\text{ад}} \int\limits_{\chi_1}^{\chi_2} K^2 (x_3)\, dx_3 = \pi \rho^2 \Omega^4_{\text{пр}} L^7 \sin^2 2\theta / 8 E_{\text{ад}}.$$

Используя (3), получим

$$\rho^2 M^2 L^7 / J_1^3 E_{\text{ад}} \left| 1 - \frac{J_1}{J_3} \right| \ll 1.$$

В системе координат x_1, x_2, x_3 свободно вращающегося асимметрического волчка (пусть $J_1 > J_2 > J_3$) вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ непрерывно перемещается по конической поверхности, опирающейся на полодию (типа [1], рис. 51), представляющую линию пересечения двух эллипсоидов

$$J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 + J_3 \Omega_3^2 = 2E, \quad J_1^2 \Omega_1^2 + J_2^2 \Omega_2^2 + J_3^2 \Omega_3^2 = M^2. \qquad \text{(11а), (11б)}$$

Одного факта указанного перемещения достаточно для заключения о неравенстве $dE/dt < 0$. Экстремумов функции E (Ω_1, Ω_2, Ω_3) при наложенном условии (11б) не существует, а $\max E$ и $\min E$ достигаются при вращениях вокруг осей x_3 и x_1 соответственно, так что вращение вокруг первой является диссипативно неустойчивым, а движение тела в асимптотике представляет собой вращение вокруг оси x_1.[3] Для тонкого диска $\min E / \max E = 1/2$, так что, например, изолированная монета, вращающаяся вокруг своего диаметра, потеряет в итоге половину кинетической энергии (см. [3]).

Рассмотренный эффект должен проявляться, когда характерное время текучести материала больше времени ориентационной релаксации вращения тела, что, в частности, может иметь место для некоторых космических объектов. Представляет интерес и противоположное по объекту проявление эффекта (в соответствующей квантовой форме) — для молекул. Наибольшей скорости релаксации следует, очевидно, ожидать, когда поля инерции очень сильно меняют форму тела. Примером могла бы служить диссипативная релаксация тонкого кольца, вращающегося вокруг оси, проходящей через его плоскость. Центробежное поле в этом случае превращает тело в хорошо выраженный асимметрический волчок, вращающийся вокруг оси x_2, а неустойчивость такого вращения проявится в отличие от диссипативной очень скоро. Другим примером может быть тонкий стережень (еще лучше — очень длинная винтовая пружина), достаточно быстро вращающийся в исходном состоянии вокруг своей оси. Старт процесса диссипативного перевертывания резко ускоряется здесь из-за упругой неустойчивости тела в собственном центробежном поле (упруго устойчивым в данном случае является состояние сильного изгиба стержня, который вследствие этого может опять-таки превратиться в асимметрический волчок, вращающийся вокруг оси x_2), причем $\min E / \max E \ll 1$, так что в итоге в тепло перейдет почти вся начальная энергия вращения.

Автор благодарен Г. Е. Скворцову за полезные замечания по работе.

Литература

[1] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
[2] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
[3] *Кротов В. В.* Коллоидный журн., 1986, т. 48, № 4, с. 699—712.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступило в Редакцию
1 июля 1987 г.

---

[3] Применение к (11) сходной схемы расчетов дает аналог формулы (10)

$$t = \frac{1}{2} J_1 J_2 (J_1 - J_2)\, M^2 \int\limits_{u_0}^{u} du / \varphi(u)\, [J_2^2 + (J_1^2 - J_2^2)\, u]^2.$$

Здесь $\varphi(u) \equiv dE_{x\eta\zeta}/dt$ — среднее за оборот $\boldsymbol{\Omega}$ вдоль данной полодии, отвечающей величине $u \equiv \cos^2 \Phi$, где Φ — максимальный для этой полодии угол между $\boldsymbol{\Omega}$ и осью x_1; при циклической перестановке индексов и $u \equiv \sin^2 \Phi'$ угол Φ' — максимальный для полодии угол между $\boldsymbol{\Omega}$ и осью x_3. Как и $t(\Phi)$, решение $t(\Phi')$ описывает движение $\boldsymbol{\Omega}$ лишь поперек полодий — семейства $\Phi' < \pi/2$, охватывающего ось $x_3 > 0$ (чисто диссипативное), и уже по одной этой причине нельзя предсказать, в какое из граничащих с ним при $\Phi' = \pi/2$ семейств — с $x_1 > 0$ или $x_1 < 0$ (см. рис. 51 [1]) — попадет вектор $\boldsymbol{\Omega}$ на своем последнем «винтовом» обороте вокруг оси x_3. Знаки $\Omega_1 |_{t \to \infty} = \pm M/J_1$ оказываются в данных условиях равновероятными.