

Видно, что наличие диффузии снижает напряжение растекания на величину порядка  $T \ln(n_0/n_\infty)$ , где  $n_0, n_\infty$  — концентрации электронов у катода и вдали от него,  $T$  — некоторая средняя температура. Подставляя сюда  $T=3$  эВ и  $n_0/n_\infty=10^1 \div 10^2$ , видим, что снижение напряжения составляет 7–14 В. С учетом этого снижения падение напряжения на квазинейтральной плазме оказывается совсем небольшим.

Таким образом, оценка падения напряжения в зоне расширения токового канала не исключает возможности существования больших плотностей тока в катодном пятне вакуумной дуги.

### Литература

- [1] Вакуумные дуги. Теория и приложения / Под ред. Дж. Лафферти. М.: Мир, 1982. 428 с.
- [2] Rakhovsky V. I. IEEE Trans. Plasma Sci., 1984, v. PS-12, N 3, p. 199–203.
- [3] Бейлис И. И., Зекцер М. П., Раховский В. И. ДАН СССР, 1985, т. 282, № 4, с. 854–857.
- [4] Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212 с.
- [5] Раховский В. И. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1975, № 3, в. 1, с. 11–27.
- [6] Schellekens H. J. Appl. Phys., 1983, v. 54, N 1, p. 144–149.
- [7] Shkol'nik S. M. IEEE Trans. Plasma Sci., 1985, v. PS-13, N 5, p. 336–338.
- [8] Карабаджак Г. Ф., Песков В. Д., Подальск Е. Р. Тез. докл. VI Всес. конф. по физике низкотемпературной плазмы. Л., 1983, т. 1, с. 176–178.
- [9] Robertson R. M. Phys. Rev., 1938, v. 53, p. 578.
- [10] McClure G. W. J. Appl. Phys., 1974, v. 45, N 5, p. 2078–2084.

Поступило в Редакцию  
9 апреля 1987 г.

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ПРОВОДЯЩЕМ ШАРИКЕ, ПОМЕЩЕННОМ В ПОЛЕ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Ю. А. Годин

### 1. Постановка задачи и сведение ее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим конденсатор, состоящий из плоских безграничных идеально проводящих пластин с разностью потенциалов  $V$ , расстояние между которыми равно  $H$ . Внутри конденсатора помещен идеально проводящий шарик радиуса  $a$ , имеющий потенциал  $v$  относительно нижней пластины и отстоящий от нее на расстоянии  $l$  (см. рисунок). Свяжем с центром  $O$  шарика систему сферических координат  $R, \theta, \varphi$  и начало отсчета оси  $Z$ , которая перпендикулярна пластинам конденсатора.

Потенциал  $u$  в области  $R > a, -l < z < H-l$  должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u|_{z=-l} = 0, \quad u|_{z=H-l} = V, \quad u|_{R=a} = v. \tag{2)-(4)}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы потенциалов однородного поля внутри конденсатора, поля шарика в свободном пространстве и бесконечной системы его изображений в плоскостях  $z=-l$  и  $z=H-l$

$$u = \frac{z+l}{H} V + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left\{ \left( \frac{a}{R} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) - \left( \frac{a}{R} \right)^{n+1} P_n(\cos(\pi - \theta_1)) \right\} -$$

$$-\left(\frac{a}{R_{-1}}\right)^{n+1} P_n(\cos(\pi - \theta_{-1})) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left[ \left(\frac{a}{R_k}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_k) + \left(\frac{a}{R_{-k}}\right)^{n+1} P_n(\cos(\pi - \theta_{-k})) \right]. \quad (5)$$

Здесь  $R_k$  — расстояние от центра изображения с номером  $k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) до точки наблюдения;  $P_n(\cos \theta_k)$  — многочлены Лежандра;  $b_n$  — искомые коэффициенты;  $k > 0$  ( $k < 0$ ) для изображений в плоскости  $z = H - l$  ( $z = -l$ ).

Если ряды в выражении потенциала сходятся, то потенциал будет удовлетворять условиям (1)–(3). Для выполнения (4) воспользуемся формулами переразложения осесимметричных гармонических функций [1]

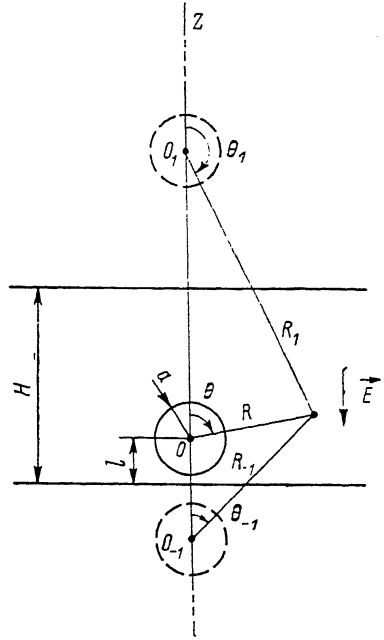
$$\left(\frac{a}{R_k}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_k) = (-1)^n \left(\frac{a}{l_k}\right)^{n+1} \times \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m! n!} \left(\frac{R}{l_k}\right)^m P_m(\cos \theta), \quad (6)$$

$$\left(\frac{a}{R_{-k}}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta_{-k}) = \left(\frac{a}{l_{-k}}\right)^{n+1} \times \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+n)!}{m! n!} \left(\frac{R}{l_{-k}}\right)^m P_m(\cos \theta). \quad (7)$$

Здесь  $l_k$  — расстояние между центрами шарика и соответствующего изображения

$$l_k = \begin{cases} kH, & k = 2, 4, \dots, \\ (k+1)H - 2l, & k = 1, 3, \dots, \end{cases}$$

$$l_k = \begin{cases} |k|H, & k = -2, -4, \dots, \\ (|k|-1)H + 2l, & k = -1, -3, \dots \end{cases}$$



Подставляя (6), (7) в выражение потенциала (5), получим

$$u = \frac{R \cos \theta + l}{H} V + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ b_n \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{(m+n)!}{m! n!} \left[ \left(\frac{a}{l_1}\right)^{m+1} \left(\frac{R}{l_1}\right)^n + (-1)^{m+n} \left(\frac{a}{l_{-1}}\right)^{m+1} \left(\frac{R}{l_{-1}}\right)^n - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{m+k} \left( \left(\frac{a}{l_k}\right)^{m+1} \left(\frac{R}{l_k}\right)^n + (-1)^n \left(\frac{a}{l_{-k}}\right)^{m+1} \left(\frac{R}{l_{-k}}\right)^n \right) \right] \right\} P_n(\cos \theta). \quad (8)$$

Из условия (4) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов  $b_n$

$$b_n - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{(m+n)!}{m! n!} f(m, n, \mu) h^{m+n+1} = \left(v - \frac{l}{H} V\right) \delta_{n,0} - \frac{a}{H} V \delta_{n,1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

причем  $h = a/2l$ ;  $\mu = l/H$ ;  $\delta_{n, \xi}$  — символ Кронекера,

$$f(0, 0, \mu) = \pi \mu \operatorname{ctg} \pi \mu - 2\mu [\psi(1 - \mu) + C],$$

$$f(m, n, \mu) = (-1)^{m+1} \mu^{m+n+1} \left\{ \frac{1 + (-1)^{m+1}}{(1 - \mu)^{m+n+1}} + \zeta(m+n+1) - \zeta(m+n+1, 1 - \mu) + (-1)^n [\zeta(m+n+1) - \zeta(m+n+1, \mu)] \right\}, \quad m+n \geq 1. \quad (10)$$

Здесь  $C=0.5772$ . . . — постоянная Эйлера;  $\psi(z)$  — пси-функция,  $\zeta(z)$  — дзета-функция Римана;  $\zeta(z, s)$  — обобщенная дзета-функция Римана, определяемая соотношением [2]

$$\zeta(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^{-s}, \quad s \neq 0; \quad -1; \quad -2; \quad \dots$$

Не умаляя общности, можно считать  $\mu \leq 1/2$ . Тогда выражение  $f(m, n, \mu)$  ограничено для любых  $m, n, \mu$  и можно показать (см. [1]), что при  $h < 1/2$

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m! n!} |f(m, n, \mu)| h^{m+n+1} < +\infty. \quad (11)$$

Следовательно, (9) является нормальной системой Пуанкаре—Коха [3], решение которой существует для любых  $0 \leq h < 1/2$ , кроме, быть может, счетного набора значений этого параметра; это решение может быть получено редукцией системы (9). Для достаточно малых  $h$  существует единственное абсолютно суммируемое решение системы (9), которое может быть получено методом редукции или в виде ряда по степеням параметра  $h$ . Тем самым обоснована сходимость ряда (5).

## 2. Построение эффективного решения и вычисление заряда и силы, действующей на шарик

Будем искать решение системы (9) в виде

$$b_n = \left(v - \frac{l}{H} V\right) \delta_{n,0} - \frac{a}{H} V \delta_{n,1} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} h^{m+n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в (9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ , находим коэффициенты  $d_{nm}$

$$d_{n,0} = f(0, n, \mu) \left(v - \frac{l}{H} V\right),$$

$$d_{n,1} = \left(v - \frac{l}{H} V\right) f(0, 0, \mu) f(0, n, \mu) - (n+1) \frac{a}{H} V f(1, n, \mu),$$

$$d_{n,2} = f(0, n, \mu) \left\{ \left(v - \frac{l}{H} V\right) f^2(0, 0, \mu) - \frac{a}{H} V f(1, 0, \mu) \right\},$$

$$d_{n,3} = f(0, n, \mu) f(0, 0, \mu) \left\{ \left(v - \frac{l}{H} V\right) f^2(0, 0, \mu) - \frac{a}{H} V f(1, 0, \mu) \right\} + \\ + (n+1) f(1, n, \mu) f(0, 1, \mu) \left(v - \frac{l}{H} V\right); \quad \dots,$$

$$d_{n,m} = -(n+1) \frac{a}{H} V f(1, n, \mu) \delta_{m,1} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(n+k)!}{n! k!} f(k, n, \mu) d_{k, m-2k-1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Решение редуцированной системы (9) порядка  $n$  имеет вид

$$b_k^{(n)} = \sum_{m=0}^n \{(I - G)^{-1}\}_{nm} y_m, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (14)$$

Здесь  $I, G$  —  $n \times n$  матрицы, причем

$$I_{nm} = \delta_{n,m} - \text{единичная матрица,}$$

$$G_{nm} = \frac{(m+n)!}{m! n!} f(m, n, \mu) h^{m+n+1},$$

$$y_0 = v - \frac{l}{H} V, \quad y_1 = -\frac{a}{H} V, \quad y_k = 0, \quad k \geq 2.$$

Заряд и сила, действующая на шарик, определяются по формулам

$$Q = -\varepsilon \int_S \frac{\partial u}{\partial R} dS, \quad F = \frac{\varepsilon}{2} \int_S \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 \cos \theta dS, \quad (15), (16)$$

где  $S$  — поверхность шарика. Учитывая выражение потенциала (8), после преобразования, подобных приведенным в [1], получаем

$$Q = 4\pi\varepsilon a b_0, \quad F = 4\pi\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_k b_{k+1}, \quad (17), (18)$$

причем коэффициенты  $b_k$  в выражениях (17) и (18) эффективно определяются формулами (12) или (14). Проиллюстрируем полученные результаты несколькими примерами.

Пусть  $\mu = l/H \rightarrow 0$ , так что шарик находится в однородном поле  $E = V/H$  над плоскостью  $z = -l$ . При этом из формулы (10) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} f(m, n, \mu) = (-1)^{n+m}. \quad (19)$$

Из выражений (12), (13), (17) и (18) находим связь между зарядом и потенциалом, а также силу, действующую на шарик

$$Q = 4\pi\varepsilon a \{v - El + (v - El)h + [v - E(l - a)]h^2 + [v - E(l - a)]h^3 + [2v - E(2l - a)]h^4 + O(h^5)\}, \quad (20)$$

$$F = -4\pi\varepsilon \{Ea(v - El) + Ea(v - El)h + ((v - El)[v - E(l - a)] + E^2a^2)h^2 + ((v - El)[2v - E(2l - 5a)] + E^2a^2)h^3 + ((v - El)[3v - E(3l - 8a)] + 7E^2a^2)h^4 + O(h^5)\}, \quad h = a/2l. \quad (21)$$

В случае  $E = 0$  из (20), (21) получаем значение емкости шарика над плоскостью и силу, действующую на него

$$c = 4\pi\varepsilon a \{1 + h + h^2 + h^3 + 2h^4 + O(h^5)\}, \quad (22)$$

$$F = -4\pi\varepsilon v^2 h^2 \{1 + 2h + 3h^2 + 8h^3 + O(h^4)\}, \quad (23)$$

которые совпадают с разложением в ряд по параметру приведенных в [4] точных результатов.

Заряд и сила, действующая на шарик, касающийся идеально проводящей плоскости, вычислялись по точному решению, полученному с помощью вырожденных бисферических координат, в [5]

$$Q = -\frac{2}{3} \pi^3 \varepsilon E a^2 \approx -20.7 \varepsilon E a^2,$$

$$F = 4\pi\varepsilon E^2 a^2 \{\zeta(3) + 1/6\} \approx 17.2 \varepsilon E^2 a^2.$$

Эти же величины, найденные по формулам (14), (17), (18) методом редукции системы (9) ( $v = 0$ ;  $l = a$ ;  $n = 2$ ), оказываются равными

$$Q = -20.5 \varepsilon E a^2, \quad F = 17.2 \varepsilon E^2 a^2.$$

Учитывая низкий порядок редукции, совпадение следует признать хорошим.

Автор глубоко признателен А. С. Зильберглейту за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

### Литература

- [1] Годин Ю. А., Зильберглейт А. С. ЖТФ, 1986, т. 56, № 6, с. 1082—1090.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973, т. 1, 296 с.
- [3] Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, 1922. 522 с.
- [4] Смайт Т. В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [5] Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. 420 с.

Ленинградский  
научно-исследовательский и конструкторский  
институт химического машиностроения

Поступило в Редакцию  
14 апреля 1987 г.