

УДК 537.533

О ПРЕДЕЛЬНОМ ТОКЕ ТРУБЧАТОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

В. Б. Красовицкий

Учено влияние теплового разброса и захваченных ионов на предельный ток и волновые свойства трубчатого РЭП. Показано, что оба фактора способствуют увеличению предельного тока из-за роста «тепловой» массы электронов и частичной нейтрализации заряда пучка. При токах, близких к предельному, наличие ионного фона приводит к развитию электронно-ионной (бунемановской) неустойчивости с инкрементом, зависящим от тока пучка.

Известно [1-3], что существует предельный ток тонкого трубчатого моноэнергетического релятивистского электронного пучка (РЭП), распространяющегося вдоль оси цилиндрического проводящего волновода

$$I_L = I^* (\gamma_0'^2 - 1)^{1/2}, \quad \varphi_L(r_b) = \frac{mc^2}{e} (\gamma_0 - \gamma_L), \quad \gamma_L = \gamma_0'^{1/2}, \quad (1)$$

где $I^* = mc^3/2e \ln(R/r_b)$; R , r_b — радиусы волновода и пучка; γ_0 — энергия инжекции электронов в единицах mc^2 ; $e < 0$ — заряд электрона; γ_L и $\varphi_L(r_b)$ — энергия и потенциал, соответствующие предельному току.

Анализ устойчивости РЭП относительно малых возмущений вида $\exp(-i\omega t + ikz)$ приводит к дисперсионному уравнению [2]

$$1 = -\frac{2ix^2\sigma_e}{\omega} \ln \frac{R}{r_b}, \quad \sigma_e = \frac{ie^2 N_e \omega}{m\gamma^3 (\omega - kv)^2}, \quad (2)$$

где $N_e = I/e$ — погонная плотность электронов; σ_e — высокочастотная проводимость пучка; $x^2 = k^2 - \omega^2/c^2$; γ и v — текущие значения энергии и скорости пучка.

Для осуществления коллективного ускорения ионов с помощью РЭП основной интерес представляет медленная волна, существующая в волноводе с пучком вблизи критического тока [2, 3]. Согласно [3], при $I_L - I \ll I_L$ зависимость фазовой скорости волны $v_\phi = c\beta_\phi$ от тока пучка I определяется формулой

$$\beta_\phi = \left[\frac{3}{2} (\gamma_0'^2 - 1) \left(1 - \frac{I}{I_L} \right) \right]^{1/2}, \quad (3)$$

следующей из (2). При $I \rightarrow I_L$ производная $\beta_\phi'(I)$ имеет особенность и наличие вертикального участка кривой $\beta_\phi(I)$ является «неудобным» для эксперимента [3].

В настоящей работе учтено воздействие сильного (релятивистского) теплового разброса пучка и захваченных в электронную потенциальную яму ионов на стационарное состояние (1) и волноводные свойства РЭП. В обоих случаях имеет место увеличение предельного тока по сравнению с (1). В области релятивистских температур электронов кривая $\beta_\phi(I)$ становится более пологой, а наличие ионного фона сопровождается развитием электронно-ионной неустойчивости.

Методика расчета предельного тока и фазовой скорости принципиально не отличается от [2, 3], а полученные формулы переходят в (1)–(5) в предельном случае моноэнергетического РЭП без учета ионного фона. Основные результаты коротко сформулированы в заключительной части работы.

1. Релятивистская температура электронов

Для расчета предельного тока трубчатого РЭП, нагретого до релятивистских температур, воспользуемся формулой

$$\varphi(r_b, z) = 2eN_e(z) \ln(R/r_b), \quad (4)$$

следующей из уравнения Пуассона [2]. Потенциал пучка и погонная плотность электронов удовлетворяют системе уравнений релятивистской гидродинамики [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}(N\gamma) + \frac{\partial}{\partial z}(N\gamma v) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}\right)(mG\gamma v) = -e \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{N\gamma} \frac{\partial}{\partial z}(NT),$$

$$N \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}\right)(mc^2G - T) = T \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}\right)N, \quad (5)$$

где $G(\xi) = K_3(\xi)/K_2(\xi)$; $\xi = mc^2/T$; K_2 и K_3 — модифицированные функции Бесселя [5]; N, T — плотность и температура в системе покоя электронов, связанные с лабораторными величинами N_e и T_e формулами

$$N_e = \gamma N, \quad T_e = T/\gamma. \quad (6)$$

Полагая в (5) $\partial/\partial t = 0$ и интегрируя уравнения, находим

$$N\gamma v = I/e,$$

$$mc^2G(\xi)\gamma + e\varphi = mc^2\gamma_0G(\xi_0),$$

$$N = CT K_2(\xi) \exp[\xi G(\xi)], \quad (7)$$

где C — постоянная интегрирования. Система интегралов (7) совместно с (4) позволяет определить предельный ток пучка. Вводя в рассмотрение безразмерный импульс $Q = \beta\gamma$, находим

$$\frac{I_0}{I^*} = \gamma_0 G(\xi_0) \frac{Q}{(1+Q^2)^{1/2}} - G(\xi) Q,$$

$$Q = \gamma_0 \beta_0 \frac{\xi}{\xi_0} \frac{K_2(\xi_0)}{K_2(\xi)} \exp[\xi_0 G(\xi_0) - \xi G(\xi)]. \quad (8)$$

Кривая $I(Q)$ имеет максимум, соответствующий предельному току. Численные расчеты показывают, что эта величина возрастает с ростом температуры инжекции электронов T_0 из-за увеличения «тепловой» массы электронов $m_x = mG(\xi)$. Соответствующие кривые приведены на рис. 1, 2.

Для анализа устойчивости РЭП относительно малых возмущений вычислим плотность тока j_x из линеаризованных уравнений (5) и подставим $c_s = j_x/E_x$ (E_x — продольное электрическое поле волны) в формулу (2). В результате получаем дисперсионное уравнение

$$1 = \frac{I x^2 c^3}{I^* \gamma^3 v} \left[(\omega - kv)^2 G - \frac{mc^2 G'_x}{mc^2 G'_x - 1} \left(k - \frac{\omega v}{c^2}\right)^2 \frac{T}{m} \right]^{-1}, \quad (9)$$

обобщающее формулу (2) на случай $T > 0$. Зависимость фазовой скорости волны от тока пучка для разных температур иллюстрирует рис. 2.

Для нерелятивистских температур $\xi_0 \gg 1$ можно воспользоваться асимптотиками функций Бесселя [5] и упростить (8) и (9)¹

¹ В этом приближении соотношения (7) совпадают с формулами нерелятивистской гидродинамики [6].

$$G = 1 + \frac{5}{2\xi}, \quad G'_\tau = \frac{5}{2mc^2}, \quad \xi = \xi_0 \left(\frac{Q}{\gamma_0 \beta_0} \right)^{2/3}. \quad (10)$$

Соответствующее значение предельного тока пучка равно

$$\frac{I_m}{I^*} = Q_L^3 + \frac{5\gamma_0^{2/3} Q_L}{2\xi_0} \left[1 - \left(\frac{\beta_0}{Q_L} \right)^{2/3} \right], \quad Q_L = (\gamma_0^{2/3} - 1)^{1/2}. \quad (11)$$

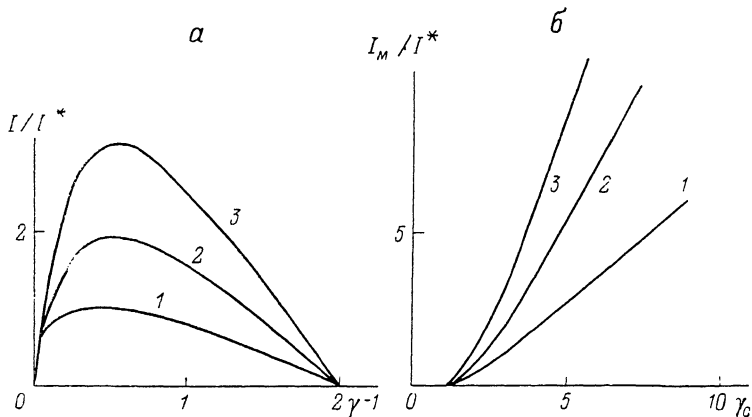


Рис. 1. Зависимость тока пучка от энергии электронов при $T/mc^2=0$ (1), 0.5 (2), 1 (3).

В ультрарелятивистском пределе $\xi_0 \ll 1$ (при малых значениях аргументов функций Бесселя [5]) формулы (8) и (9) имеют вид

$$\frac{I}{I^*} = \frac{4}{\xi_0} \left[\frac{\gamma_0 Q}{(1+Q^2)^{1/2}} - (\gamma_0 \beta_0 Q^2)^{1/3} \right], \quad \xi = \xi_0 \left(\frac{Q}{\gamma_0 \beta_0} \right)^{1/3}, \quad (12)$$

$$1 = \frac{I \kappa^2 c^3 \xi}{4 I^* \gamma^3 v} \left[(\omega - k v)^2 - \frac{c^2}{3} \left(k - \frac{\omega v}{c^2} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (13)$$

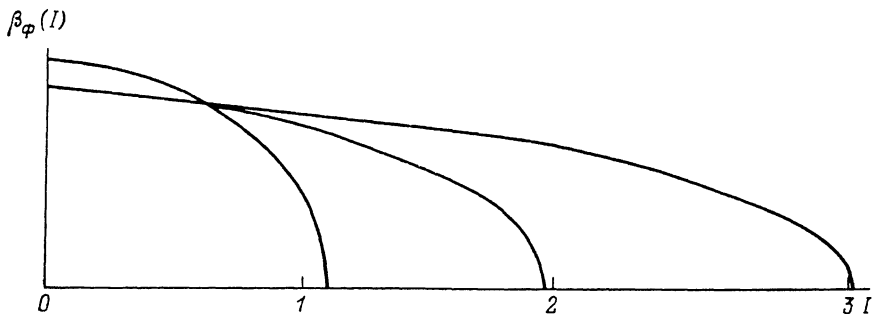


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости волны от тока пучка при $\gamma_0=3$, $T/mc^2=0$ (1), 0.5 (2), 1 (3).

Из (12) следует уравнение

$$\frac{\gamma_0}{(1+Q_m^2)^{1/2}} - \frac{2}{3} \left(\frac{\gamma_0 \beta_0}{Q_m} \right)^{1/3} = 0, \quad (14)$$

определяющее предельное значение импульса Q_m пучка и имеющее решение при $\gamma_0^2 > 3/2$. Асимптотическое решение (14) имеет вид

$$Q_m = \gamma_m = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \gamma_0^{1/2}, \quad \frac{I_m}{I^*} = \frac{4\gamma_0}{\xi_0}, \quad \gamma_0^{1/2} \gg 1. \quad (15)$$

Вблизи предельного тока (15) зависимость фазовой скорости волны от тока пучка имеет вид

$$\beta_\phi = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \gamma_0^{1/2} \left[2\left(1 - \frac{I}{I_m}\right)\right]^{1/2}. \quad (16)$$

Эта формула получена разложением (13) по малому параметру $(I_m - I)/I_m \ll 1$ и является аналогом (3) при ультрарелятивистских температурах электронов. Кривая $\beta_\phi(I)$ является более полой, чем в случае холодного пучка [3]. из-за увеличения предельного тока в $4/\xi_0$ раз и растяжения продольного масштаба (рис. 2).

Отметим, что увеличение предельного тока пучка (11) и (15) связано с ростом «тепловой» массы электронов в нагретом пучке

$$m_r = m \begin{cases} 1 + 5/2\xi_0, & \xi_0 \gg 1, \\ 4/\xi_0, & \xi_0 \ll 1. \end{cases} \quad (17)$$

2. Захваченные ионы

Будем считать, что ионы, захваченные кулоновским полем электронов пучка, сосредоточены в объеме пучка и их плотность равна

$$n_i(r, z) = \frac{q\nu(z)}{2\pi r} \delta(r - r_b), \quad (18)$$

где ν и $q > 0$ — погонная плотность и заряд ионов. Учитывая в уравнении Пуассона наряду с электронами (18), получаем формулу

$$\varphi(r_b) = 2\left(\frac{I}{\nu} + q\nu\right) \ln \frac{R}{r_b}, \quad (19)$$

обобщающую (4).

Для решения самосогласованной задачи необходимо выразить плотность ионов через потенциал. При этом следует учитывать, что функция распределения захваченных частиц является произвольной функцией их энергии и зависит от способа создания потенциальной ямы. Поэтому, следуя работам [7-9], рассмотрим простую математическую модель, полагая

$$f(u) = A[u^2(\varphi) - u^2]^{1/2}, \quad A = -\nu_m M / \pi q \varphi_m, \quad (20)$$

где $u^2(\varphi) = -2q\varphi/M$, ν_m — погонная плотность ионов в минимуме электронного потенциала φ_m (соответствующего предельному току), M — масса иона. Интегрируя (20), находим [7-9]

$$\nu(\varphi) = \int_{-u(\varphi)}^{u(\varphi)} f(u) du = \nu_m \frac{\varphi}{\varphi_m}. \quad (21)$$

Зависимость тока от потенциала определяется формулами (19), (21) и законом сохранения энергии (7) (для холодного пучка $G=1$). Следуя работе [2], находим

$$\frac{I}{I^*} = \left(1 - \frac{q\nu c}{I^* \varphi_m}\right) \Phi [1 - (\gamma_0 + \Phi)^{-2}]^{1/2}, \quad (22)$$

где $\Phi = e\varphi/mc^2$. Приравняв нулю производную $I'(\Phi_m)$, получаем

$$I_m = I_L - q\nu_m v_L, \quad v_L = c(1 - \gamma_0^{-2})^{1/2} \quad (23)$$

(I_L и $\Phi_m = \Phi_L$ совпадают с (1)).

Сравнивая (23) и (1), видим, что захваченные ионы не изменяют предельной энергии пучка γ_L , но увеличивают предельный ток из-за частичной нейтрализации заряда электронов. Энергия захваченных ионов в минимуме потенциала равна

$$\frac{Mu^2(\varphi_m)}{2} = -q\varphi_m = -\frac{mc^2 q}{e} (\gamma_0 - \gamma_0^{1/2}). \quad (24)$$

Изменение волновых свойств РЭП из-за захвата ионов можно учесть, вычисляя ионную проводимость [8]

$$\sigma_i = -\frac{i\pi q^2 \omega A}{M k^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right), \quad \alpha = \frac{v_\phi}{u(\varphi)}. \quad (25)$$

Заменяя в (2) $\sigma_e \rightarrow \sigma_e + \sigma_i$, получаем дисперсионное уравнение

$$1 = 2\kappa^2 \ln \frac{R}{r_b} \left[\frac{eI}{m\gamma^3 v (\omega - kv)^2} + \frac{q\nu_m}{k^2 \varphi_m} \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right) \right]. \quad (26)$$

Вблизи критического тока $I_m - I \ll I_m$ и $q\nu_m v_L \ll I_m$ формула (26) упрощается к виду

$$2 \frac{v_\phi}{v_L} = -\frac{aa}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + b, \quad (27)$$

$$a = \frac{q\nu_m v_L}{|I_m|}, \quad b = \gamma_0^{1/2} \left[6 \left(1 - \frac{I}{I_m}\right) \right]^{1/2}, \quad \alpha = \frac{v_\phi}{(2\mu)^{1/2} v_L}, \quad \mu = \frac{m\gamma_0}{M}.$$

В отсутствие ионов $\nu_m = 0$ формула (27) переходит в (3).

Дисперсионное уравнение (27) является алгебраическим уравнением четвертого порядка относительно v_ϕ . Так как его решение в общем виде является довольно громоздким, то удобнее рассмотреть асимптотики. При $\alpha \gg 1$ степень уравнения понижается

$$z^3 + \Delta z^2 + \mu = 0, \quad (28)$$

$$z = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \frac{v_\phi}{v_L}, \quad \Delta = \frac{a-b}{(4a)^{1/2}}.$$

Комплексные корни уравнения (28), соответствующие неустойчивости моноэнергетического РЭП в холодной ионной плазме [8], появляются при $\Delta > \Delta_c = -3(\mu/4)^{1/2}$. Максимум инкремента достигается при $\Delta \rightarrow 0$

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \mu^{1/2}, \quad |\Delta| \ll \mu^{1/2}. \quad (29)$$

В нерезонансном случае имеем

$$z = \pm i(\mu/\Delta)^{1/2}, \quad \Delta \gg \mu^{1/2}. \quad (30)$$

В области малых фазовых скоростей $\alpha \ll 1$, когда становится существенным тепловое движение ионов, справедлива другая асимптотика уравнения (27)

$$\frac{v_\phi}{v_L} = \left[1 \pm \frac{ia}{(8\mu)^{1/2}} \right]^{-1} \frac{b}{2}. \quad (31)$$

В переходной области $\alpha \sim 1$ решение (27) имеет простой вид при условии $a \gg (8\mu)^{1/2}$

$$\frac{v_\phi}{v_L} = \pm i \left(\frac{2\mu}{a^2/b^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad a > b. \quad (32)$$

Легко видеть, что при $a - b \ll a$ и $a \gg b$ формула (32) совпадает соответственно с (30) и (31). При малой плотности ионов $\nu_m \rightarrow 0$ формула (31) совпадает с (3) и описывает зависимость фазовой скорости от тока вблизи предельного значения [3].

3. Основные результаты

Предельный ток нагретого пучка возрастает из-за увеличения «тепловой» массы электронов и в области ультрарелятивистских температур и $\gamma_0 = 3$ превосходит предельный ток холодного пучка в отношении T/mc^2 (рис. 1, а).

Эта же пропорция сохраняется и для ультрарелятивистского пучка $\gamma_0 \gg 1$, когда справедлива формула (15). Существенно, что в данном случае условие $T \geq mc^2$ может быть выполнено для пучка с достаточно малой температурой электронов в лабораторной системе $T_e = T/\gamma_0 \ll mc^2$ (см. (6)). При $\gamma_0 = 10$ и $T_e = 0.25 mc^2$ из (15) следует $I_{\mu}/I_L = 10$. Отметим, что эффект увеличения предельного тока РЭП с ростом температуры электронов качественно совпадает с результатом работы [10] для скомпенсированного по заряду пучка.

Вблизи предельного тока энергия ультрарелятивистского пучка ($\gamma_0 \gg 1$, $\xi_0 \ll 1$) пропорциональна $\gamma_0^{1/4}$ по сравнению с $\gamma_0^{1/2}$ для холодного пучка. Предельная температура электронов превосходит температуру инжекции.

Увеличение предельного тока с ростом температуры электронов сопровождается уменьшением наклона кривой $\beta_{\phi}(l)$ по сравнению с холодным пучком.

Захваченные кулоновским полем холодного РЭП ионы частично нейтрализуют заряд электронов, и предельный ток увеличивается по сравнению с [1-3] при неизменных потенциале и энергии пучка.

При токах пучка, близких к критическому, движение РЭП относительно ионного фона сопровождается раскачкой низкочастотной электронно-ионной неустойчивости, инкремент которой зависит от тока пучка и обращается в нуль для предельного тока.

Автор благодарен В. Г. Дорофеевко, выполнившему численные расчеты, за помощь в работе.

Литература

- [1] Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. УФН, 1971, т. 103, № 4, с. 609—640.
- [2] Breizman V. N., Ryutov D. D. Nuclear Fusion, 1974, N 14, p. 873—907.
- [3] Briggs R. J. Phys. Fluids, 1976, v. 19, N 8, p. 1257—1258.
- [4] Джаватишвили Д. В., Цинцадзе Н. Л. ЖЭТФ, 1973, т. 64, № 4, с. 1314—1325.
- [5] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962, с. 965.
- [6] Брагинский С. И. В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. Леонтовича М. А. М.: Госатомиздат, 1963, с. 183.
- [7] Vohm D., Gross E. P. Phys. Rev., 1949, N 75, p. 1864—1866.
- [8] Красовицкий В. Б. ЖТФ, 1967, т. 37, № 3, с. 493—497.
- [9] Красовицкий В. Б. ЖЭТФ, 1970, т. 59, № 7, с. 176—181.
- [10] Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А., Тараканов В. П. ЖТФ, 1972, т. 42, № 4, с. 900—901.

Ростовский-на-Дону
государственный университет
им. М. А. Суслова

Поступило в Редакцию
6 апреля 1986 г.
В окончательной редакции
11 декабря 1986 г.