

УДК 63 : 51

## О ПРИМЕНЕНИИ ДВУСТОРОННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ИМПЕДАНСНОГО ТИПА

С. М. Журав

Методом Винера—Хопфа решена задача дифракции собственной магнитной волны плоского волновода на полубесконечной резистивной пленке конечной толщины. Аналитическое решение, полученное при условии постоянства поля на торце, сравнивается с решением, основанным на двустороннем импедансном условии.

В настоящее время является актуальным исследование омических потерь в структурах, содержащих тонкие по сравнению с длиной волны проводящие ребра. В случае сильного скин-эффекта ( $\sqrt{|\varepsilon|} 2kb \gg 1$ ,  $2b$  — толщина ребра,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость материала,  $k = 2\pi/\lambda$ ) потери вдали от ребра могут быть определены при помощи условий Леонтовича, а вблизи ребра — по методике работ [1, 2]. Для определения потерь при слабом скин-эффекте ( $\sqrt{|\varepsilon|} 2kb \ll 1$ ), т. е. в резистивной пленке, как правило, применяются двусторонние граничные условия [3, 4]. В работе [5] эти условия применялись для исследования полей вблизи края пленки. Ниже исследуются потери в резистивной пленке при учете ее конечной толщины и без использования двусторонних граничных условий.

### 1. Общее решение

Пусть на полубесконечную резистивную пленку толщиной  $2b$  с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ , расположенную в центре плоского волновода высотой  $2c$  с идеально проводящими стенками (рис. 1), набегаёт справа волна  $H_1$  с единственной компонентой электрического поля

$$E_y^{(i)}(x, z) = e^{-ihz} \cos \frac{\pi x}{2c}, \quad h = \sqrt{k^2 - \pi^2/4c^2}. \quad (1)$$

Решение этой задачи получим методом Винера—Хопфа [6].

Возбужденное поле полностью описывается единственной составляющей электрического поля  $E_y(x, z)$ , которую в силу симметрии поля (1) достаточно определить в области  $0 \leq x \leq c$ . Разобьем эту область на три: 1)  $b \leq x \leq c$ ; 2)  $0 \leq x \leq b, z \geq 0$ ; 3)  $0 \leq x \leq b, z \leq 0$ . Будем считать, что в каждой из этих областей полное поле  $E_y^{(t)} = E_y^{(i)} + E_y$ , и введем Фурье-преобразование компоненты поля  $E_y$

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi_+(x, \alpha) + \varphi_-(x, \alpha), \quad (2a)$$

$$\varphi_+(x, \alpha) = \int_0^\infty E_y(x, z) e^{i\alpha z} dz, \quad \varphi_-(x, \alpha) = \int_{-\infty}^0 E_y(x, z) e^{i\alpha z} dz, \quad (2б)$$

которые удовлетворяет в областях 1, 2, 3 соответственно уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2\right)\varphi^{(1)}(x, \alpha) = 0, \quad (3a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2\right)\varphi_+^{(2)}(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial z} E_y^{(2)}(x, 0) - i\alpha E_y^{(2)}(x, 0), \quad (3б)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - q^2\right)\varphi_-^{(3)}(x, \alpha) = -\frac{\partial}{\partial z} E_y^{(3)}(x, 0) + i\alpha E_y^{(3)}(x, 0) + i\frac{(\varepsilon - 1)k^2}{\alpha - h} \cos \frac{\pi x}{2c}, \quad (3в)$$

где  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ ;  $q = \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon k^2}$ ; верхние индексы определяют область, а нижние индексы «+» и «-» означают регулярность функции в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной  $\alpha$ . Представив поле на торце в виде рядов с неизвестными коэффициентами

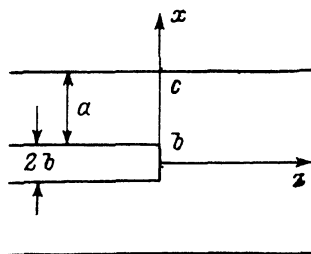


Рис. 1.

$$E_y^{(2)}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{b},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_y^{(2)}(x, 0) = i \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \frac{\pi n x}{b}, \quad (4)$$

решения уравнений (3) относительно (Фурье-преобразований (2) получаем в виде

$$\varphi^{(1)}(x, \alpha) = A \operatorname{sh} \gamma(x - c), \quad (5a)$$

$$\varphi_+^{(2)}(x, \alpha) = B \operatorname{ch} \gamma x - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n - \alpha a_n}{\gamma^2 + \pi^2 n^2 / b^2} \cos \frac{\pi n x}{b}, \quad (5б)$$

$$\varphi_-^{(3)}(x, \alpha) = C \operatorname{ch} q x - i \frac{(\varepsilon - 1)k^2}{\alpha - h} \frac{1}{q^2 + \pi^2 / 4c^2} \cos \frac{\pi x}{2c} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n - \alpha a_n}{q^2 + \pi^2 n^2 / b^2} \cos \frac{\pi n x}{b}. \quad (5в)$$

Подставляя в эти решения и их производные по  $x$ , которые будем обозначать штрихом, значение  $x = b$  и исключая неизвестные  $A, B, C$ , имеем

$$\varphi^{(1)}(b, \alpha) = -\frac{\operatorname{sh} \gamma a}{\gamma \operatorname{ch} \gamma a} \varphi^{(1)'}(b, \alpha), \quad a = c - b, \quad (6a)$$

$$\varphi_+^{(2)}(b, \alpha) = \frac{\operatorname{ch} \gamma b}{\gamma \operatorname{sh} \gamma b} \varphi_+^{(2)'}(b, \alpha) - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n - \alpha a_n}{\gamma^2 + \pi^2 n^2 / b^2}, \quad (6б)$$

$$\begin{aligned} \varphi_-^{(3)}(b, \alpha) &= \frac{\operatorname{ch} q b}{q \operatorname{sh} q b} \left( \varphi_-^{(3)'}(b, \alpha) - \frac{i\pi}{2c} \frac{(\varepsilon - 1)k^2}{\alpha - h} \frac{\sin(\pi b / 2c)}{q^2 + \pi^2 / 4c^2} \right) - \\ &- i \frac{(\varepsilon - 1)k^2}{\alpha - h} \frac{\cos(\pi b / 2c)}{q^2 + \pi^2 / 4c^2} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n - \alpha a_n}{q^2 + \pi^2 n^2 / b^2}. \end{aligned} \quad (6в)$$

Принимая во внимание равенства  $\varphi^{(1)}(b, \alpha) = \varphi_+^{(2)}(b, \alpha)$ ,  $\varphi_+^{(1)'}(b, \alpha) = \varphi_+^{(2)'}(b, \alpha)$ ,  $\varphi_-^{(1)}(b, \alpha) = \varphi_-^{(3)}(b, \alpha)$ ,  $\varphi_-^{(1)'}(b, \alpha) = \varphi_-^{(3)'}(b, \alpha)$ , следующие из соответствующих граничных условий, и исключая из (6)  $\varphi^{(1)}(b, \alpha)$ ,  $\varphi_+^{(2)}(b, \alpha)$  и  $\varphi_-^{(3)}(b, \alpha)$ , получаем функциональное уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L(\alpha)} \varphi_-^{(3)'}(b, \alpha) + \frac{1}{K(\alpha)} \varphi_+^{(2)'}(b, \alpha) - \frac{i}{c} (\varepsilon - 1) k^2 \times \\ &\times \left[ \frac{g(\alpha)}{(\alpha - h)(q^2 + \pi^2 / 4c^2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (b_n - \alpha a_n)}{(\gamma^2 + \pi^2 n^2 / b^2)(q^2 + \pi^2 n^2 / b^2)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$L(\alpha) = \frac{c^2 \gamma q \operatorname{sh} qb \operatorname{ch} \gamma a}{f(\alpha)}, \quad K(\alpha) = \frac{c \gamma \operatorname{sh} \gamma b \operatorname{ch} \gamma a}{\operatorname{ch} \gamma c}, \quad (8)$$

$$f(\alpha) = c \gamma \operatorname{ch} \gamma a \operatorname{ch} qb + qc \operatorname{sh} qb \operatorname{sh} \gamma a, \quad g(\alpha) = \cos \frac{\pi b}{2c} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi b}{2c} \frac{\operatorname{ch} qb}{cq \operatorname{sh} qb}. \quad (9)$$

Для того чтобы решить уравнение (7), факторизуем функции (8) [3], т. е. представим их в виде  $L(\alpha) = L_+(\alpha) L_-(\alpha)$ ,  $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$  ( $L_-(\alpha) = L_+(-\alpha)$ ,  $K_-(\alpha) = K_+(-\alpha)$ ) и умножим это уравнение на произведение  $L_+(\alpha) K_-(\alpha)$

$$\frac{K_-(\alpha)}{L_-(\alpha)} \left\{ \varphi_{-}^{(3)'}(b, \alpha) - \frac{i}{c} (\varepsilon - 1) k^2 L(\alpha) \left[ \frac{g(\alpha)}{(\alpha - h)(q^2 + \pi^2/4c^2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (b_n - \alpha a_n)}{(\gamma^2 + \pi^2 n^2/b^2)(q^2 + \pi^2 n^2/b^2)} \right] \right\} + \frac{L_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} \varphi_{+}^{(2)'}(b, \alpha) = 0. \quad (10)$$

Второе слагаемое в этом уравнении регулярно в верхней полуплоскости переменной  $\alpha$ , а первое слагаемое имеет в нижней полуплоскости простые полюса при  $\alpha = -\alpha_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), где  $\alpha_n$  — корни уравнения  $f(\alpha) = 0$  (9), и при  $\gamma^2 + \pi^2 n^2/b^2 = 0$ , т. е. при  $\alpha = -\alpha_{bn}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\alpha_{bn} = [k^2 - \pi^2 n^2/b^2]^{1/2}$ . Вычитая и добавляя главные значения в указанных полюсах, представляем уравнение (10) в виде двух слагаемых, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной  $\alpha$ . В силу теоремы Лиувилля каждое из этих слагаемых порознь равно нулю, что позволяет представить решение в виде

$$\varphi_{+}^{(2)'}(b, \alpha) = -M_+(\alpha) \Phi_+(\alpha), \quad (11a)$$

$$\varphi_{-}^{(3)'}(b, \alpha) = \frac{i}{c} (\varepsilon - 1) k^2 L(\alpha) \left[ \frac{g(\alpha)}{(\alpha - h)(q^2 + \pi^2/4c^2)} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (b_n - \alpha a_n)}{(\gamma^2 + \pi^2 n^2/b^2)(q^2 + \pi^2 n^2/b^2)} \right] + \frac{1}{M_-(\alpha)} \Phi_+(\alpha), \quad (11b)$$

где

$$\Phi_+(\alpha) = -i(\varepsilon - 1) k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\alpha + \alpha_n} \left[ \frac{g(\alpha_n)}{(\alpha_n + h)(c^2 q_n^2 + \pi^2/4)} + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (b_p + \alpha_n a_p)}{c^2 (\gamma_n^2 + \pi^2 p^2/b^2)(q_n^2 + \pi^2 p^2/b^2)} \right] + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} M_+(\alpha_{bn}) L(\alpha_{bn}) \frac{(-1)^n (b_n + \alpha_{bn} a_n)}{\alpha_{bn} (\alpha + \alpha_{bn})},$$

$$M_+(\alpha) = \frac{K_+(\alpha)}{L_+(\alpha)} = \left[ \frac{K(0)}{L(0)} \right]^{1/2} \frac{1 + \frac{\alpha}{k}}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon} k}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{\alpha}{\alpha_{bn}}}{1 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}_{bn}}} \frac{1 + \frac{\alpha}{\alpha_n}}{1 + \frac{\alpha}{\beta_{bn}}},$$

$$\bar{\alpha}_{bn} = [\varepsilon k^2 - \pi^2 n^2/b^2]^{1/2}, \quad \beta_{bn} = [k^2 - \pi^2 (n - 1/2)^2/c^2]^{1/2},$$

$$\xi_n = M_+(\alpha_n) \frac{c \gamma_n q_n}{\alpha_n N_n} \operatorname{sh} q_n b \operatorname{ch} \gamma_n a, \quad \gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2},$$

$$q_n = \sqrt{\alpha_n^2 - \varepsilon k^2}, \quad N_n = \frac{f'(\alpha_n)}{c^2 \alpha_n} = \operatorname{sh} q_n b \operatorname{ch} \gamma_n a \left[ \frac{b}{c} \frac{\gamma_n}{q_n} + \frac{a}{c} \frac{q_n}{\gamma_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\gamma_n c} \left( 1 - \frac{\gamma_n^2}{q_n^2} \right) \operatorname{cth} q_n b - \frac{\gamma_n}{q_n} \operatorname{cth}^2 q_n b \right], \quad M_-(\alpha) = M_+(-\alpha). \quad (12)$$

Правые части соотношений (6б) и (6в) не должны иметь полюсов соответственно при  $\alpha = \alpha_{bm}$  и  $\alpha = -\bar{\alpha}_{bm}$ . Эти условия приводят к равенствам

$$\varphi_+^{(2)'}(b, \alpha_{bm}) = \frac{i}{2} \epsilon_m b (-1)^m (b_m - \alpha_{bm} a_m),$$

$$\varphi_-^{(3)'}(b, -\bar{\alpha}_{bm}) = \frac{ic}{2\pi} \frac{\sin(\pi b/2c)}{c^2 m^2/b^2 - 1/4} \frac{(\epsilon - 1)k^2}{\bar{\alpha}_{bm} + h} - \frac{i}{2} \epsilon_m b (-1)^m (b_m + \bar{\alpha}_{bm} a_m),$$

где  $\epsilon_0 = 2$ ,  $\epsilon_m = 1$  при  $m \geq 1$ . Подставляя в эти равенства соотношения (11), приходим к двум связанным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$

$$\frac{i}{2} \epsilon_m b (-1)^m (b_m - \alpha_{bm} a_m) + M_+(\alpha_{bm}) \Phi_+(\alpha_{bm}) = 0, \quad (13a)$$

$$\Phi_+(-\bar{\alpha}_{bm}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13б)$$

Для определения амплитуд собственных волн в волноводах необходимо вычислить обратное Фурье-преобразование соотношений (5), в которых

$$A = \frac{1}{\gamma \operatorname{ch} \gamma a} (\varphi_+^{(2)'}(b, \alpha) + \varphi_-^{(3)'}(b, \alpha)), \quad B = \frac{1}{\gamma \operatorname{sh} \gamma b} \varphi_+^{(2)'}(b, \alpha),$$

$$C = \frac{1}{q \operatorname{sh} qb} \left( \varphi_-^{(3)'}(b, \alpha) - \frac{i\pi}{2c} \frac{\sin(\pi b/2c)}{q^2 + \pi^2/4c^2} \frac{(\epsilon - 1)k^2}{\alpha - h} \right),$$

т. е. выражаются через соотношения (11). Эти вычисления сводятся, как обычно, к нахождению вычетов. В результате получаем

$$E_y^{(t)}(x, z) = e^{ihz} \cos \frac{\pi x}{2c} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\beta_n z} \cos \frac{\pi \bar{n} x}{c} \quad \text{при } z > 0, \quad (14a)$$

$$E_y^{(t)}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-i\alpha_n z} \begin{cases} \operatorname{ch} q_n x, & 0 \leq x \leq b \\ \frac{\operatorname{ch} q_n b}{\operatorname{sh} \gamma_n a} \operatorname{sh} \gamma_n (c - x), & b \leq x \leq c \end{cases} \quad \text{при } z < 0, \quad (14б)$$

где  $A_n$ ,  $B_n$  — амплитуды собственных волн

$$A_n = \frac{-i\pi \bar{n} \sin(\pi \bar{n} b/c) \Phi_+(-\beta_{cn})}{c \beta_{cn} L(\beta_{cn}) M_+(\beta_{cn})}, \quad \bar{n} = n - 1/2, \quad (15a)$$

$$B_n = \frac{i\gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n a}{\alpha_n N_n} \left\{ \frac{i}{c} (\epsilon - 1) k^2 \left[ \frac{g(\alpha_n)}{(\alpha_n - h)(q_n^2 + \pi^2/4c^2)} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (b_p - \alpha_n a_p)}{(\gamma_n^2 + \pi^2 p^2/b^2)(q_n^2 + \pi^2 p^2/b^2)} \right] + \frac{M_+(\alpha_n)}{K(\alpha_n)} \Phi_+(\alpha_n) \right\}. \quad (15б)$$

## 2. Физические результаты

При рассматриваемой поляризации поле вблизи торца особенностей не имеет, поэтому если считать, что поле на торце постоянно, т. е. в (4) и во всех остальных формулах сохранить только коэффициенты  $a_0$  и  $b_0$ , то решение становится аналитическим, так как  $a_0$  и  $b_0$  находятся из линейной системы второго порядка (13). Резистивную пленку будем характеризовать поверхностным импедансом  $W = \zeta/2|\epsilon|kb$ , где  $\zeta = 120\pi$  Ом,  $\epsilon = i|\epsilon|$ . При этом корни  $\alpha_n$  имеют как вещественные, так и мнимые части. Первые из этих корней находились численно, а остальные по асимптотической формуле

$$\gamma_n c \approx i \left[ \pi \bar{n} - \frac{bp}{2c\pi \bar{n}} - \frac{p}{4\pi^2 \bar{n}^2} \sin \frac{2\pi \bar{n} b}{c} - \frac{p^2 b a}{4c^2 \pi^2 \bar{n}^3} \left( \frac{b}{a} - \sin^2 \frac{\pi \bar{n} b}{c} \right) \right], \quad (16)$$

$p = (\epsilon - 1) k^2 c^2$ ,  $\bar{n} = n - 1/2$ , справедливой при  $|\gamma_n c| \gg \sqrt{|p|}$ . Ряды, которые входят в линейную систему второго порядка относительно коэффициентов  $a_0$  и  $b_0$  и в функцию  $\Phi_+(a)$ , сходятся быстро, так как их члены убывают не хуже, чем  $1/n^3$ . При расчетах сохранялось несколько десятков членов этих рядов. Вычисление этих рядов усложняется при  $c/b \gg 1$ , поскольку первые  $N = [c/\pi b]$  членов некоторых рядов пропорциональны  $1/n$ , число сохраняемых членов должно быть больше  $N$ . При вычислении значений функции  $M_+(a)$  (12) бесконечное произведение заменялось конечным, причем отброшенное бесконечное произведение заменялось приближенным выражением  $1 - iab(\epsilon - 1) \times \times (c^2 - b^2) k^2 / 4\pi^3 N^2$ , где  $N$  — число сохраняемых множителей. Произведение в (12) также сходится довольно быстро, так как при  $n \gg 1$  имеем  $\alpha_{bn} \approx \bar{\alpha}_{bn}$ ,  $\alpha_n \approx \beta_{cn}$ .

На рис. 2 приведены вычисленные в этом приближении коэффициент  $T_1 = P_1/P_0$ , где  $P_0, P_1$  — мощности, переносимые падающей волной (1) и основной волной волновода с пленкой при  $z=0$ , и величина  $1 - |A_1|^2$  ( $A_1$  — амплитуда отраженной волны), характеризующая мощность, поглощенную в пленке, в зависимости от толщины пленки  $2b/\lambda$ . При этом  $kc=3$ ,  $W=200$  Ом. Горизонтальные прямые соответствуют расчетам в приближении двусторонних граничных условий. Из рис. 2 следует, что при фиксированном импедансе  $W$  зависимость от толщины пленки величин  $T_1$  и  $1 - |A_1|^2$  слабая.

При  $W = \text{const}$  и  $2b/\lambda \rightarrow 0$  формулы для  $A_n$  и  $B_n$  (15) аналитически преобразуются в соответствующие формулы, полученные в приближении двусторонних импедансных условий. Причем в этом случае  $a_0 = 0$  (1),  $b_0 = 0$  ( $\ln c/b$ ). Коэффициент  $a_0$  остается в предельных выражениях. Следовательно, двусторонние граничные условия применимы для расчета интегральных характеристик — коэффициентов отражения и прохождения.

На рис. 3 приведены зависимости величин  $T_1$  и  $1 - |A_1|^2$  от импеданса  $W$  при  $kc=3$  и  $2b/\lambda = 0.02$  (1), 0.1 (2), 0.2 (3). Кривые 4 при  $2b/\lambda = 0$  получены в приближении двусторонних импедансных условий. Для контроля вычислений величина  $P_0(1 - |A_1|^2)$  сравнивалась с полной мощностью, прошедшей в волновод с пленкой при  $z=0$ . Эти величины совпали с хорошей точностью, причем различие уменьшалось с увеличением точности расчетов.

Если считать, что  $|\epsilon - 1|kb \ll 1$  ( $W \gg 1$ ) и  $b/c \ll 1$ , и разложить по этим малым параметрам выражения (15) для первых амплитуд  $A_n$  и  $B_n$ , получим

$$A_n \approx \frac{-(\epsilon - 1) k^2 b}{c\beta_{cn}(\beta_{cn} + k)}, \quad B_n \approx \frac{(\epsilon - 1) k^2 b}{c\beta_{cn}(\beta_{cn} - k)} \quad \text{при } n \neq 1,$$

$$B_1 \approx 1 - \frac{\epsilon - 1}{2} k^2 bc \left( \frac{1}{k^2 c^2 - \pi^2/4} - \frac{1}{\pi^2/4} \right).$$

В этом случае первые корни  $\alpha_n$  оценивались по формуле

$$\gamma_n a \approx i[\pi \bar{n} + \mu_n(1 - 2b/a) - \mu_n^2/\pi \bar{n}], \quad \mu_n = (-b/a\pi \bar{n})(\pi^2 \bar{n}^2 + (\epsilon - 1)k^2 a^2).$$

Рассмотрим амплитуды  $B_n$  при произвольных  $W$  и  $n \gg 1$ . Из (15), используя (16), несложно получить

$$B_n \approx \frac{1}{n^2} \left[ C_1 \sin \frac{\pi \bar{n} b}{c} + C_2 \left( \sin \frac{\pi \bar{n} b}{c} - \frac{(\epsilon - 1) k^2 bc}{2\pi \bar{n}} \cos \frac{\pi \bar{n} b}{c} \right) \right], \quad (17)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные. Из этой оценки следует, что ряд (14б) можно один раз почленно проинтегрировать или по  $z$ , или по  $x$ . Следовательно, вблизи ребра имеем

$$E_y^{(t)}(0, z) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 z + 0(z), \quad (18)$$

где  $\bar{C}_1$  и  $\bar{C}_2$  не зависят от  $z$ . Поэтому поперечные к ребру компоненты магнитного поля  $H_x, H_z=0$  (1), тогда как для двусторонних граничных условий [5] при данной поляризации эти компоненты имеют логарифмическую особенность. Если  $c/b \gg 1$ , то при  $n \ll c/\pi b$  из (17) имеем  $B_n \sim 1/n^2$ , т. е.  $\bar{C}_2 \sim \ln(c/b)$ ; следовательно, множитель  $\ln z$  появится во втором слагаемом в (18) (см. [6]) на расстояниях от края, больших толщины пленки. Физически очевидно, что все разложения, полученные в [5], справедливы при том же ограничении, т. е. на расстояниях от края пленки, больших ее толщины. Двусторонние импедансные условия (так же как и условия Леонтовича) не учитывают особенностей полей на торцах, которые появятся при  $\mu \neq 1$  или при наличии компонент электрического поля, перпендикулярных к ребру, поэтому они неприменимы для определения полей в непосредственной окрестности торца. В рассмотренной задаче поле вблизи торца особенностей не имеет, однако учет толщины и в этом случае приводит к результату, отличному от [5].

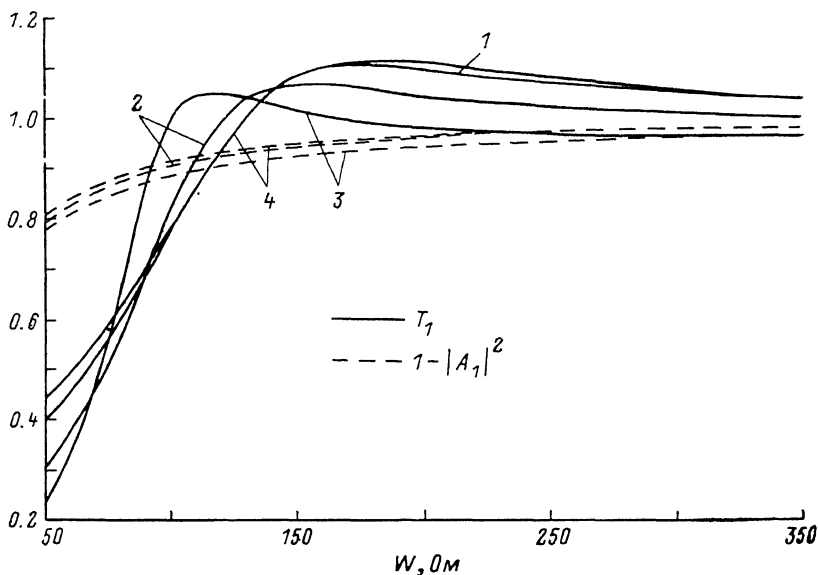


Рис. 3.

В заключение сравним поведение полей вблизи торца ребра конечной толщины  $2b$  при сильном ( $\sqrt{|\epsilon|}2kb \gg 1$ ) и слабом ( $\sqrt{|\epsilon|}2kb \ll 1$ ) скин-эффекте, т. е. в резистивной пленке в случае, когда электрическое поле параллельно ребру. Очевидно, что в случае сильного скин-эффекта на расстояниях от торца, больших  $2b$ , поверхностный ток пропорционален  $1/\sqrt{s}$ , где  $s$  — расстояние от торца; на расстояниях, меньших  $2b$ , но больших толщины скин-слоя  $d$ , ток пропорционален  $1/\sqrt{s}$ , а на расстояниях, меньших толщины скин-слоя, ребро можно считать диэлектрическим, на котором при данной поляризации особенностей нет, т. е. ток постоянен. Если считать ребро бесконечно тонким и применять условия Леонтовича, то, во-первых, реальные поля у края нельзя описать правильно, а во-вторых, получаются разложения по  $s$ , применимые только на расстоянии порядка толщины скин-слоя (также разложения построены в [7]), а на больших расстояниях поверхностный ток по-прежнему пропорционален  $1/\sqrt{s}$ . Поэтому в приближении бесконечно тонкого ребра торцевые потери пропорциональны  $d \ln(d/\lambda)$  [8], тогда как при учете толщины [1] потери пропорциональны  $d \ln(2b/\lambda)$ . Для резистивной пленки существует значительный участок пленки вблизи торца ( $b \ll s \ll \min(c, \lambda, d)$ ), где поля могут быть описаны разложениями из [6], полученными в приближении двусторонних импедансных условий.

Все результаты, полученные на основе двусторонних импедансных условий, заимствованы из работы [9]. Автор благодарен Л. А. Вайнштейну за обсуждение результатов и советы при написании статьи и П. Ш. Фридбергу за представление результатов работы [9] до их опубликования.

#### Литература

- [1] Вайнштейн Л. А., Журав С. М., Суков А. И. ДАН СССР, 1986, т. 289, № 6, с. 1338—1342.
- [2] Вайнштейн Л. А., Журав С. М. Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, № 12, с. 723—727.
- [3] Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 429 с.
- [4] Karjala D. S., Mittra R. Appl. Sci. Res. (Sec. B), 1965, v. 12, p. 157—164.
- [5] Бравер И. М., Гарб Х. Л., Фридберг П. Ш., Яковер И. М. ДАН СССР, 1986, т. 286, № 5, с. 1092—1096.
- [6] Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 278 с.
- [7] Зайцев С. В. Изв. вузов. Радиофизика, 1986, т. 29, № 10, с. 1215—1222.
- [8] Ильинский А. С., Слепня Г. Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983. 232 с.
- [9] Бравер И. М., Гарб Х. Л., Фридберг П. Ш., Яковер И. М. РиЭ, 1987, т. 32, № 2, с. 264—269.

Московский институт управления  
им. С. Орджоникидзе

Поступило в Редакцию  
6 апреля 1987 г.