

# Волноводное взаимодействие света с усиливающейся волной пространственного заряда

© Д.Г. Санников, Д.И. Семенцов

Ульяновский государственный университет,  
432970 Ульяновск, Россия

E-mail: sementsovdi@sdi.ulsu.ru

(Поступила в Редакцию 16 июня 2006 г.)

Рассмотрено коллинеарное взаимодействие оптических волноводных мод в тонком слое полупроводника с нарастающей вдоль направления распространения оптической неоднородностью — волной пространственного заряда. Получены решения уравнений связанных мод для случаев их однонаправленного и встречного взаимодействия. Выявлена существенная зависимость эффективности модового преобразования от уровня усиления волны пространственного заряда с учетом отстройки от условия фазового синхронизма. Показана возможность „вырождения“ встречной и падающей мод, при которой они имеют одинаковую мощность во всей возмущенной области.

PACS: 78.20.-e, 42.25.Bs

## 1. Введение

Известно, что в полупроводниковых пленках с отрицательной дифференциальной проводимостью при определенных условиях могут распространяться волны пространственного заряда (ВПЗ) с нарастающей амплитудой [1,2]. На эффекте усиления ВПЗ в полупроводниковой плазме основана работа усилителей бегущей волны и активных линий передачи, реализуемых в полупроводниковых пленках [3,4]. В последнее время вновь проявился интерес к ВПЗ в полупроводниковых структурах в связи с возможностью дифракции света на волнах этой природы (аналогично акустооптической дифракции). Эффективность рассеяния света на ВПЗ возрастает с длиной волны излучения и становится достаточно высокой в среднем и дальнем ИК-диапазонах, а также в субмиллиметровой области [5]. Теория ВПЗ и эффективный метод их возбуждения, основанный на освещении кристалла бегущей интерференционной картиной, рассматривается в [6]. В основе ВПЗ-оптического взаимодействия лежит отклонение концентрации свободных носителей заряда от равновесной, возникающее при распространении зарядовой волны в кристалле и приводящее к модуляции диэлектрической проницаемости. В [7] изучалась дифракция света на ВПЗ в безграничном полупроводниковом кристалле. В работах [8,9] рассмотрено коллинеарное брэгговское ВПЗ-оптическое взаимодействие для ВПЗ с постоянной по волноводу амплитудой. В [10] на основе приближенного решения уравнений связанных мод исследовалась эффективность преобразования оптической волноводной моды в вытекающую при ее взаимодействии с затухающей (усиливающейся) ВПЗ в пленочном полупроводниковом волноводе.

В настоящей работе исследуются особенности коллинеарного взаимодействия света оптических волноводных мод с экспоненциально нарастающей по амплитуде ВПЗ в полупроводниковом тонком слое, симметрично окру-

женным диэлектриком. На основе численного решения дисперсионного уравнения для ВПЗ и точного решения соответствующей системы уравнений связанных мод проведен анализ эффективности преобразования оптических волноводных  $TE$ - и  $TM$ -мод с ВПЗ в условиях экспоненциального роста ее амплитуды.

## 2. ВПЗ-моды в тонком слое

Как и в акустооптике, эффективность ВПЗ-оптического взаимодействия должна существенным образом определяться глубиной модуляции диэлектрической проницаемости по образцу, вносимой ВПЗ. Для оценки ее величины учтем, что вклад в диэлектрическую проницаемость полупроводника, связанный со свободными носителями, определяется выражением  $\epsilon_e \simeq 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ , где плазменная частота  $\omega_p = 4\pi n_0 e^2 / m^*$ , а  $n_0$  — равновесная концентрация носителей,  $m^*$  и  $e$  — их эффективная масса и заряд,  $\omega$  — частота оптического излучения. Изменение диэлектрической проницаемости, связанное с отклонением концентрации  $n_1$  свободных носителей в ВПЗ от равновесной, дается выражением  $\Delta\epsilon = -\omega_p^2 n_1 / \omega^2 n_0$ .

Рассмотрим волноведущую структуру, состоящую из слоя полупроводника с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , помещенного между подложкой и покровной средой, выполненными из непоглощающего диэлектрика. Для простоты дальнейшего анализа будем считать диэлектрические проницаемости окружающих сред одинаковыми и равными  $\epsilon'$ . Поместим структуру в постоянное электрическое поле  $E_0$ , ориентированное вдоль оси  $x$ , а ось  $z$  направим перпендикулярно границам раздела сред, которые совместим с плоскостями  $z = -L$  и  $z = 0$ . Основными уравнениями, определяющими волновые возмущения потока электронов в полупроводнике, являются уравнения непрерывности и Пуассона [2]. В линейном приближении по малым отклонениям па-

раметров решение указанных уравнений представляет собой распространяющуюся вдоль оси  $x$  ВПЗ. Так, для концентрации неравновесных носителей с учетом конечной толщины слоя справедливо выражение

$$n_1(t, x, z) = n_1 \exp [i(\Omega t - qx - pz)], \quad (1)$$

где  $q$  и  $p$  — продольная (константа распространения) и поперечная компоненты волнового вектора ВПЗ,  $\Omega$  — частота волны возмущений. Дисперсионное уравнение, связывающее параметры полупроводника с частотой и компонентами волнового вектора, имеет вид [9]

$$i(\Omega - qv_0) + \omega_m \left[ 1 + (\mu_d - 1) \frac{q^2}{q^2 + p^2} \right] + D(q^2 + p^2) = 0, \quad (2)$$

где  $\omega_m = 4\pi en_0\mu_0/\varepsilon$  — частота максвелловской релаксации,  $\mu_0$  и  $\mu_d$  — подвижности „неразогретых“ (в слабых полях) и „разогретых“ (дифференциальная [7]) электронов,  $v_0$  — их равновесная скорость,  $D$  — коэффициент диффузии. Для поперечной компоненты волнового вектора в простейшем случае можно использовать связь с толщиной слоя  $p = 2\pi l/L$  (где  $l = 0, 1, 2, \dots$  — номер моды ВПЗ); подставляя это выражение в (2), получаем искомое дисперсионное уравнение для ВПЗ в рассматриваемой структуре. В случае  $l = 0$  это уравнение описывает однородную по толщине слоя ВПЗ. Его решение дает два комплексных корня  $q_{1,2}$ , один из которых отвечает прямой волне, а другой — обратной. При  $l \geq 1$  решение дисперсионного уравнения, являющегося в этом случае уравнением четвертой степени относительно  $q$ , содержит четыре комплексных корня вида  $q = q' - iq''$ , два из которых соответствуют прямым, а два — обратным волнам. Особый интерес представляет прямая ВПЗ, отвечающая  $l = 1$ , которая может распространяться не только с поглощением ( $q'' > 0$ ), но и с усилением ( $q'' < 0$ ). Значению  $q'' \simeq 0$ , для которого амплитуда ВПЗ при распространении по образцу остается практически неизменной, соответствует частота  $\Omega_c = v_0\sqrt{-\mu_d\omega_m/D}$ . Для частот  $\Omega < \Omega_c$  имеет место режим усиления ВПЗ [9]. В результате зависимость возмущения диэлектрической проницаемости от координат, связанная с ВПЗ в слое полупроводника, с учетом (1) может быть представлена функцией

$$\Delta\varepsilon(x, z) = \Delta\varepsilon(z) \cos(\Omega t - q'x) \exp(-q''x). \quad (3)$$

Учитывая волновой характер возмущения диэлектрической проницаемости, находим выражение для глубины ее модуляции по длине волновода  $\Delta\varepsilon(z) \approx |\varepsilon E_1 q/m^*\omega^2|$ , где  $E_1$  — амплитуда возмущающего электрического поля, возникающего в полупроводнике в преддомном режиме, для которого характерна генерация нарастающих ВПЗ [1,2]. Проведем численные оценки величины  $\Delta\varepsilon$  для кристалла  $n$ -GaAs, взяв в качестве рабочей длину оптической волны  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ ,  $m^* \approx 0.07 m_0$ , где  $m_0$  — масса свободных электронов,  $\varepsilon \approx 12$ ,  $E_1 \approx 300 \text{ V/cm}$  ( $E_1 \ll E_0$ ;  $E_0 \approx 3 \text{ kV/cm}$  —

обычно используемое в эксперименте значение внешнего поля [2]). Для эффективной связи оптических мод, распространяющихся в окне прозрачности полупроводника, пространственный период  $\Lambda$  возмущения диэлектрической проницаемости должен быть порядка длины волны оптического излучения; следовательно,  $q' = 2\pi/\Lambda \sim 1 \mu\text{m}^{-1}$  и  $q'' \simeq 10^{-3} \mu\text{m}^{-1}$ . При этом амплитуда возмущения принимает значения  $\Delta\varepsilon 10^{-5}$  того же порядка, что и в случае акустооптического взаимодействия, для которого  $\Delta\varepsilon \approx 10^{-4} - 10^{-6}$  [7].

### 3. Уравнения для оптических мод

Описание взаимодействия света в планарном волноводе с нарастающей вдоль направления его распространения оптической неоднородностью, задаваемой соотношением (3), проведем на основе метода связанных волн [11]. Будем считать, что оптические волноводные моды распространяются вдоль оси  $x$  коллинеарно с ВПЗ и имеют зависимость компонент поля от времени вида  $\exp(i\omega t)$ . Наличие ВПЗ в волноведущем слое приводит к возмущению волноводных решений, имевших место в невозмущенном волноводе. Собственными волнами невозмущенного волновода в рассматриваемом случае являются  $TE$ - и  $TM$ -моды. Связь константы распространения  $m$ -й моды  $\beta_m$  с параметрами структуры с учетом ее симметричности дается уравнением

$$hL = 2 \arctg \left( \frac{\xi g}{h} \right) + \pi m, \quad (4)$$

где параметр  $\xi = 1$  для  $TE$ - и  $\xi = \varepsilon/\varepsilon'$  для  $TM$ -мод;  $h^2 = k_0^2\varepsilon - \beta_m^2$ ;  $g^2 = \beta_m^2 - k_0^2\varepsilon'$  — поперечные компоненты волнового вектора в каждой из сред;  $k_0 = \omega/c$ ;  $c$  — скорость света в вакууме. Для эффективного ВПЗ-оптического взаимодействия необходимо выполнение условия фазового синхронизма для связанных мод, которое имеет вид  $\beta_m \mp \beta_n = lq'$ , где знаки минус и плюс отвечают однонаправленным и встречным оптическим модам. Поскольку  $q' = 2\pi/\Lambda$ , для сильной связи однонаправленных оптических мод требуется генерация ВПЗ с большей длиной волны  $\Lambda$ , чем для встречных мод. Кроме условия для волновых чисел фазовый синхронизм предполагает выполнение условия для частот взаимодействующих оптических мод и ВПЗ:  $\omega_m = \omega_n \pm \Omega$ . В силу того что частота ВПЗ имеет порядок  $\Omega \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ s}^{-1}$  и на два-три порядка меньше оптических частот, можно считать  $\omega_m = \omega_n$ . Отметим, что условие между волновыми числами ВПЗ и оптических мод может быть достигнуто путем изменения как внешних (приложенное поле  $E_0$ , частота света и т.д.), так и внутренних (уровень легирования пленки  $n_0$ ) характеристик.

Уравнения связи для однонаправленных волн с амплитудами  $A_m$  и  $A_n$ , распространяющихся в положительном

направлении оси  $x$ , с учетом (3) запишем в виде

$$\begin{aligned} dA_m/dx &= -i\kappa_{mn} \exp[2i\delta x] \exp(-q''x)A_n, \\ dA_n/dx &= -i\kappa_{nm}^* \exp[-2i\delta x] \exp(-q''x)A_m, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $2\delta = \beta_m - \beta_n - q'$  — отстройка от фазового синхронизма, а  $\kappa_{mn}$  — коэффициент связи оптических мод. В силу симметрии рассматриваемой структуры интегралы перекрытия и, следовательно, коэффициенты связи  $\kappa_{mn}$  не равны нулю лишь для четных и нечетных пар мод. В общем случае коэффициенты связи для  $TE$ - и  $TM$ -мод определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_{mn}^{TE} &= \frac{\omega}{4\pi} \iint E_{my}(z) \Delta \varepsilon(z) E_{ny}(z) dy dz, \\ \kappa_{mn}^{TM} &= \frac{\omega}{4\pi(\varepsilon k_0)^2} \iint \Delta \varepsilon(z) \\ &\times \left\{ \beta_m \beta_n H_{my}(z) H_{ny}(z) - \frac{dH_{my}(z)}{dz} \frac{dH_{ny}(z)}{dz} \right\} dy dz, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E_{my}(z)$  и  $H_{my}(z)$  — нормированные профильные функции; нормировка соответствует единице мощности, переносимой модой на единице ширины волновода [9]. Отличные системы уравнений (5) от известных уравнений связи для периодических волноводов заключается в наличии экспоненциального множителя, определяющего нарастание амплитуды оптической неоднородности ( $q'' < 0$ ) в направлении распространения оптических мод. Ее решение в общем виде может быть представлено с помощью цилиндрических функций Бесселя и Неймана [12]

$$\begin{aligned} A_m(x) &= -i \exp(\nu q''x) (C_1 J_\nu(u) + C_2 N_\nu(u)), \\ A_n(x) &= \exp(-(\nu + 1)q''x) (C_1 J_{\nu+1}(u) + C_2 N_{\nu+1}(u)), \end{aligned} \quad (7)$$

где параметры  $\nu = i\delta/2q'' - 1/2$ ,  $u = u_0 \exp(-q''x)$ ,  $u_0 = \kappa_{mn}/q''$ . Постоянные коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  должны определяться из граничных условий при  $x = 0$ . Выбирая значения для амплитуд взаимодействия мод на входе ( $x = 0$ ) в волновод  $A_m(0) = 1$  и  $A_n(0) = 0$  и используя функциональные соотношения [11]

$$J_{\nu+1}(u)N_\nu(u) - J_\nu(u)N_{\nu+1}(u) = 2/(\pi u), \quad (8)$$

получаем следующие выражения для искоемых коэффициентов:

$$C_1 = -\pi u_0 N_{\nu+1}(u_0)/2, \quad C_2 = \pi u_0 J_{\nu+1}(u_0)/2. \quad (9)$$

Эффективность модового преобразования для моды  $n$  в случае однонаправленного взаимодействия дается выражением

$$\begin{aligned} \eta^{\uparrow\downarrow}(x) &= |A_n(x)/A_m(0)|^2 \\ &= \exp(-q''x) |C_1 J_\nu(u) + C_2 N_\nu(u)|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

При  $q'' \rightarrow 0$  в формуле (10) необходимо использовать соответствующие асимптотические соотношения

для функций  $J_\nu$  и  $N_\nu$ , в результате чего она переходит в известное выражение для случая брэгговского взаимодействия света с оптической неоднородностью с постоянной амплитудой глубины модуляции

$$\eta^{\uparrow\downarrow}(x) = \left| \kappa / \sqrt{|\kappa|^2 + \delta^2} \right|^2 \sin^2 \left[ x \sqrt{|\kappa|^2 + \delta^2} \right]. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие между противоположно направленными волноводными модами, обозначив амплитуды прямой и обратной мод через  $A_m$  и  $B_n$ . Будем считать, что область взаимодействия ограничена интервалом  $0 \leq x \leq d$ . Уравнения связанных мод в этом случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} dA_m/dx &= -i\kappa_{mn} B_n \exp[2i\delta x] \exp(-q''x), \\ dB_n/dx &= i\kappa_{nm}^* A_m \exp[-2i\delta x] \exp(-q''x), \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь отстройка от фазового синхронизма  $2\delta = \beta_m + \beta_n - q'$ . Система уравнений (12) имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \exp(\nu q''x) (C_1 I_\nu(u) + C_2 K_\nu(u)), \\ B_n(x) &= -i \exp(-(\nu + 1)q''x) (C_1 I_{\nu+1}(u) - C_2 K_{\nu+1}(u)), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $I_\nu(u)$  и  $K_\nu(u)$  — модифицированные функции Бесселя и Неймана [12]. Для нахождения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  выберем граничные условия в виде  $A_m(0) = 1$ , а  $B_n(d) = 0$ . В результате получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \left( I_\nu(u_0) + K_\nu(u_0) \frac{I_{\nu+1}(u(d))}{K_{\nu+1}(u_0)} \right)^{-1}, \\ C_2 &= C_1 \frac{I_{\nu+1}(u(d))}{K_{\nu+1}(u(d))}. \end{aligned} \quad (14)$$

Величина эффективности модового преобразования

$$\begin{aligned} \eta_m^{\uparrow\downarrow} &= |B_n(x)/A_m(0)|^2 \\ &= \exp(-q''x) |C_1 I_{\nu+1}(u) - C_2 K_{\nu+1}(u)|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

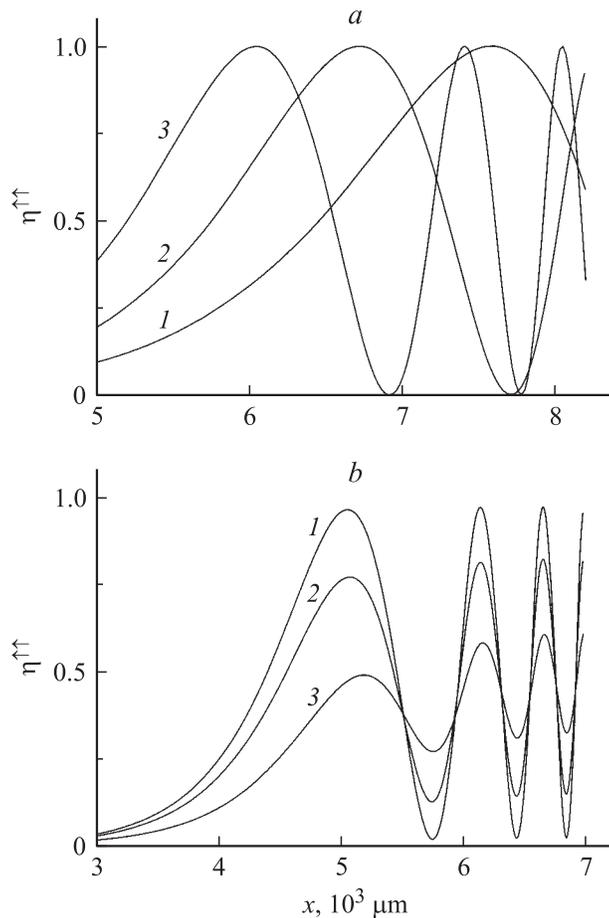
в случае  $x = 0$  является фактически отражательной способностью, а величина

$$\eta_m^{\uparrow\downarrow} = \exp(-q''x) |C_1 I_\nu(u) + C_2 K_\nu(u)|^2 \quad (16)$$

в случае  $x = d$  — пропускательной способностью волноводной структуры с ВПЗ.

## 4. Численный анализ

Анализ полученных решений для случаев однонаправленного и встречного взаимодействий мод проведем для характерного в рассматриваемой волноведущей структуре значения коэффициента связи  $\kappa = 10^{-5} \mu\text{m}^{-1}$  [9] и разных значений фазовой отстройки  $\delta$  и параметра усиления  $q''$ . Параметры излучения и структуры выбраны следующими:  $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ ,  $\varepsilon' = 11.2$  (для пленки  $n$ -GaAs на выбранной длине волны).

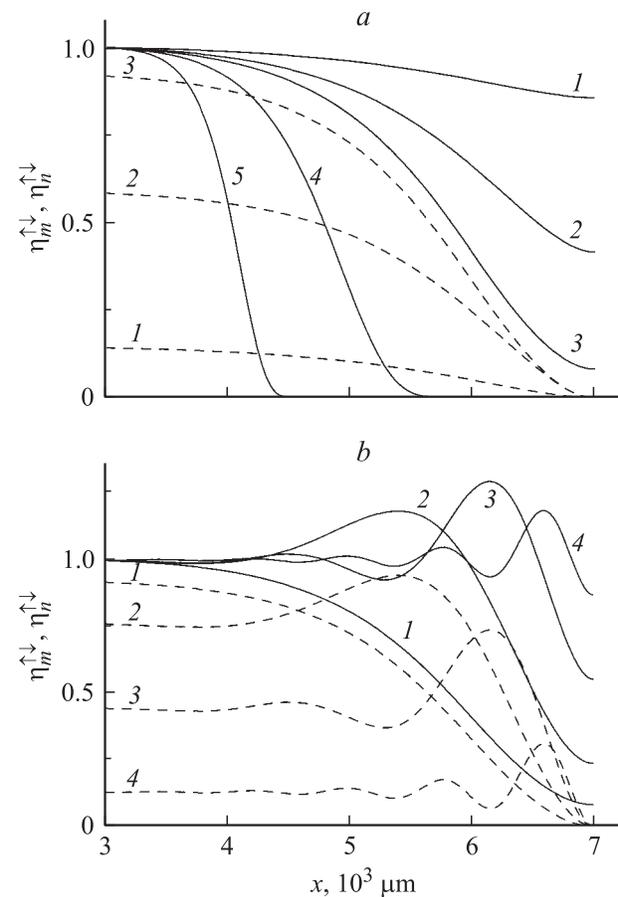


**Рис. 1.** Зависимость эффективности преобразования однонаправленных мод от пройденного по волноводу расстояния. *a* —  $\delta = 0$ ,  $q'' = -6$  (1),  $-7$  (2) и  $-8 \text{ cm}^{-1}$  (3); *b* —  $q'' = -10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\delta = \pm 1$  (1),  $\pm 3$  (2) и  $\pm 6 \text{ cm}^{-1}$  (3).

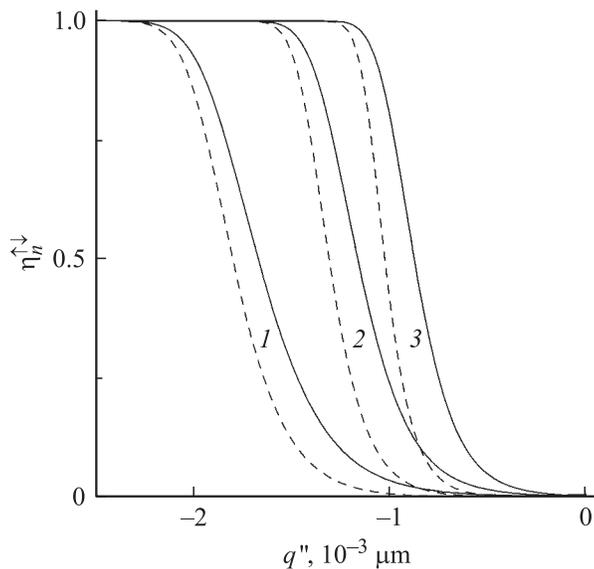
На рис. 1 представлены зависимости эффективности однонаправленного преобразования оптической моды от продольной координаты  $x$ , построенные для случая фазового синхронизма  $\delta = 0$  и различных значений параметра усиления ВПЗ, а также различных значений фазовой отстройки  $\delta$  и  $q'' = -10 \text{ cm}^{-1}$ . Из приведенных зависимостей следует, что для случая  $q'' \neq 0$  уже нельзя говорить о пространственном периоде, на котором происходит обмен энергией между связанными оптическими модами, поскольку расстояние между соседними максимумами величины  $\eta^{\uparrow\uparrow}$  (длина межмодовой перекачки мощности) уменьшается с увеличением пройденного оптической модой расстояния  $x$  по волноводу. Заметный обмен мощностью между модами начинается после  $x \approx 3 \text{ mm}$  и зависит от уровня усиления ВПЗ: для больших  $|q''|$  перекачка мощности возникает на меньшей длине волновода. В целом, амплитуда эффективности преобразования с ростом усиления практически не изменяется. Дополнительный анализ показал, что длина перекачки увеличивается с уменьшением  $\kappa_{mn}$ , как и при отсутствии усиления. Влияние фазовой отстройки  $\delta$  на

эффективность межмодового однонаправленного преобразования при фиксированном уровне усиления выражается в том, что даже небольшая отстройка от фазового синхронизма существенно уменьшает эффективность преобразования, незначительно смещая ее максимумы в сторону больших расстояний  $x$ , проходимых модами по волноводу.

На рис. 2 представлены зависимости эффективности встречного преобразования прямой и отраженной мод от продольной координаты  $x$ , полученные для области взаимодействия длиной  $d = 4 \text{ mm}$  и различных значений параметра усиления ВПЗ  $q''$  и фазовой отстройки  $\delta$ . Видно, что в условиях полного фазового синхронизма рост усиления в среде приводит к спаду мощности прямой волны, вызванному перекачкой мощности во встречную моду. Дальнейшее увеличение усиления приводит к „вырождению“ встречной и падающей мод, когда в пределах графической точности указанные моды имеют одинаковую мощность по всей длине их взаимодействия (кривые 4, 5). Это означает, что межмодовый обмен мощностью наиболее эффективен, так как вся энергия



**Рис. 2.** Зависимость эффективности встречного преобразования прямой (сплошные) и отраженной (штриховые кривые) мод от продольной координаты  $x$  для области взаимодействия длиной  $d = 4 \text{ mm}$ , *a* —  $\delta = 0$ ,  $q'' = -9$  (1),  $-12$  (2),  $-14$  (3),  $-25$  (4) и  $-50 \text{ cm}^{-1}$  (5); *b* —  $q'' = -14 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\delta = 0$  (1),  $\pm 1$  (2),  $\pm 2$  (3) и  $\pm 4 \text{ cm}^{-1}$  (4).



**Рис. 3.** Зависимость отражательной способности встречной моды от уровня усиления ВПЗ.  $\delta = 0$  (сплошные) и  $\pm 10 \text{ см}^{-1}$  (штриховые кривые),  $d = 3$  (1), 4 (2) и 5 мм (3).

прямой моды переходит в энергию встречной моды. С увеличением  $|q''|$  длина волнового встречного преобразования уменьшается. Форма кривых  $\eta_m^{\uparrow\downarrow}(x)$  и  $\eta_m^{\downarrow\uparrow}(x)$  сильно меняется при наличии фазовой отстройки: по мере распространения прямой моды возникают нарастающие осцилляции мощности, которые обуславливают „необычную“ (для случая  $q'' = 0$ ) ситуацию, когда для прямой моды  $\eta_m^{\uparrow\downarrow}(x) > 1$  благодаря передаче мощности от усиливающейся ВПЗ к оптическим модам. Фазовое рассогласование приводит к заметному уменьшению мощности встречной моды.

При анализе ВПЗ-оптического взаимодействия в реальных структурах разной длины  $d$  следует учитывать, что комплексная константа распространения  $q$  одновременно определяет уровень усиления и задает фазовое рассогласование. На рис. 3 представлены зависимости эффективности преобразования встречной моды на входе в волновод ( $x = 0$ ) от параметра усиления ВПЗ  $q''$ , полученные для разных длин структуры  $d$  и значений фазовой отстройки  $\delta$ . Характер приведенных зависимостей показывает, что увеличение длины брэгговского взаимодействия способствует скорейшему достижению максимума эффективности преобразования с ростом усиления ВПЗ, тогда как фазовое рассогласование заметно замедляет рост отражательной способности встречной моды для любой длины волновода.

## 5. Заключение

Проведенный анализ эффективности преобразования однонаправленных и встречных волноводных мод в тонком слое полупроводника в результате их взаимодействия с нарастающей вдоль направления распростра-

нения усиливающейся ВПЗ показал существенную зависимость эффективности модового преобразования от уровня усиления ВПЗ и величины отстройки от фазового синхронизма. Полученные решения уравнений связанных оптических мод пригодны и в других физических ситуациях, когда в возмущенной области можно создать экспоненциально усиливающуюся (или убывающую) по амплитуде волну неоднородности (акустическую, спиновую и т.д.). Показана также возможность „вырождения“ встречной и падающей мод, при которой они имеют одинаковую мощность во всей возмущенной области.

## Список литературы

- [1] А.А. Барыбин. Волны в тонкопленочных полупроводниковых структурах с горячими электронами. Наука, М. (1986). 288 с.
- [2] М.С. Шур. Современные приборы на основе арсенида галлия. Мир, М. (1991). 632 с.
- [3] А.И. Михайлов, С.А. Сергеев. Радиоэлектроника 10, 43 (1995).
- [4] А.А. Барыбин, И.Б. Вендик, О.Г. Вендик и др. Микроэлектроника 8, 3 (1979).
- [5] Ю.В. Гуляев, В.В. Проклов, В.И. Миргородский, Г.Н. Шкердин. РЭ 24, 1 (1995).
- [6] В.В. Брыксин, П. Кляйнерт, М.П. Петров. ФТТ 45, 1946 (2003).
- [7] Г.Е. Чайка, В.Н. Мальнев, М.И. Панфилов. Опт. и спектр. 81, 481 (1996).
- [8] В.Н. Лазоренко, В.Н. Мальнев, Г.Е. Чайка. Опт. и спектр. 88, 1023 (2000).
- [9] Д.Г. Санников, Д.И. Семенцов. РЭ 51, 720 (2006).
- [10] Д.Г. Санников, Д.И. Семенцов. Письма в ЖТФ 32, 68 (2006).
- [11] А. Ярив, П. Юх. Оптические волны в кристаллах. Мир, М. (1987). 616 с.
- [12] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Наука, М. (1964). 344 с.