УДК 537.311

К ТЕОРИИ ПРОВОДИМОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С МАЛОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

В. А. Кашин

Вычислены составляющие тензора поляризуемости двумерной двухкомпонентной системы с включениями круговой формы, имеющими разные радиусы. Показано, что неаналитическая зависимость эффективной электропроводности от отношения проводимостей компонент сохраняет свой вид и после усреднения по размерам кругов. Рассматриваемая система исследована и спектральным методом.

Для эффективной электропроводности σ_e двумерной двухкомпонентной системы с включениями круговой формы, имеющими разные радиусы R_1 и R_2, получена квадратичная по концентрации c поправка. Общая формула для эффективной электропроводности σ_e двухкомпонентной среды в c^2-приближении получена в работе [1], в которой квадратичная по концентрации поправка выражена через поляризуемость пары включений во внешнем электрическом поле. Эта формула была применена для случая двумерной системы с включениями круговой формы одинакового радиуса при произвольном отношении проводимостей компонент $h=\sigma_2/\sigma_1$ (σ_1 — проводимость изотропной матрицы, σ_2 — проводимость включений).

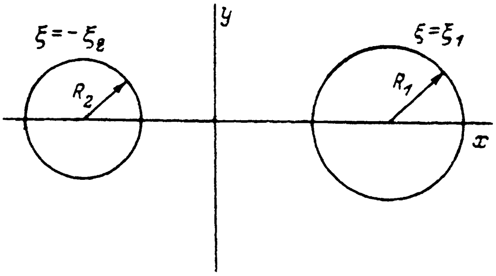
В настоящей работе показано, что эффективная электропроводность σ_e при $h \rightarrow 0$ содержит, как и в работе [1], неаналитический член вида $h^3 \ln h$ и эта логарифмическая особенность сохраняет свой вид и после усреднения по размерам кругов. Вычислены также компоненты тензора поляризуемости.

Кроме этого, в работах [1-3] была решена задача о спектре локальных колебаний, связанных как с парой включений круговой формы [1, 2], так и с включением произвольной формы (в том числе многосвязным) [3]. Оказалось, что локальные колебания (с частотами ω_ν), существующие в системе и без внешнего переменного электрического поля, возникают только при вещественных и отрицательных значениях параметра $h(\omega)=\sigma_2(\omega)/\sigma_1(\omega)$ в соответствующей области частот. При этом частоты однородных (возбуждаемых однородным внешним электрическим полем) локальных колебаний, связанных с парой включений круговой формы, могут быть найдены как полюсы ее поляризуемости. Рассматриваемая в настоящей работе система с парой круговых включений разного радиуса с произвольными (вообще говоря, комплексными) проводимостями $\sigma_1(\omega)$ и $\sigma_2(\omega)$ исследована и спектральным методом, предложенным в работе [3]. Найдены собственные функции и собственные значения локальных колебаний и получено в явном виде выражение, являющееся спектральным представлением тензора поляризуемости для двух кругов разного радиуса.

Заметим, что точно решаемая задача о поляризуемости двух круговых цилиндров является сравнительно простым, но в то же время не тривиальным примером, на котором может быть проверена работоспособность общего метода, предложенного в работе [3].

1. Вириальное разложение для эффективной проводимости

Рассмотрим двумерную систему с малой концентрацией включений круговой формы. Согласно результатам работы [1], для вычисления эффективной электропроводности такой среды в c^2-приближении необходимо найти поляризуемость пары кругов. Для пары круговых включений разного радиуса (R_1 и R_2) эта задача может быть, как и в работе [1], решена точно в биполярных координатах [4].



Выберем координатную систему (x, y) согласно рисунку. Биполярные координаты ξ, ϑ вводятся с помощью соотношений [4]

$$x = a\,\mathrm{sh}\,\xi/(\mathrm{ch}\,\xi + \cos\vartheta), \quad y = a\sin\vartheta/(\mathrm{ch}\,\xi + \cos\vartheta). \tag{1}$$

Линия $\xi=\mathrm{const}$ есть окружность радиуса $a/\mathrm{sh}\,\xi$ с центром в точке $x=a\,\mathrm{cth}\,\xi$, $y=0$; границам включений отвечают $\xi=\xi_1$ (для правого круга) и $\xi=-\xi_2$ (для левого), причем

$$\exp[\pm(\xi_1+\xi_2)] = \{[\rho^2-(R_1-R_2)^2]^{1/2} \pm [\rho^2-(R_1+R_2)^2]^{1/2}\}^2/(4R_1R_2),$$
$$\xi_1 = \ln\{[\rho/2 + a + (R_1^2-R_2^2)/2\rho]/R_1\}, \quad \xi_2 = \ln\{[\rho/2 + a - (R_1^2-R_2^2)/2\rho]/R_2\}, \tag{2}$$

а расстояние между центрами кругов ρ определяется из уравнения

$$\rho = (R_1^2+a^2)^{1/2} + (R_2^2+a^2)^{1/2}. \tag{3}$$

Асимптотическое выражение для потенциала запишем в виде

$$\psi = -\mathbf{E}_0\mathbf{r} + 2\mathbf{p}\mathbf{r}/r^2 + \ldots, \quad p_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}E_{0\beta}. \tag{4}$$

Частными решениями уравнения Лапласа, остающимися конечными вне круговых включений $\xi \leqslant \xi_1$ и $\xi \geqslant -\xi_2$ и периодическими по ϑ, являются $\mathrm{sh}\,n\xi\cos n\vartheta$, $\mathrm{ch}\,n\xi\sin n\vartheta$, $\mathrm{sh}\,n\xi\sin n\vartheta$ и $\mathrm{ch}\,n\xi\cos n\vartheta$. В работе [1] при рассмотрении включений из пары кругов одинакового радиуса достаточно было использовать первые две из этих функций. Для случая пары кругов с разными радиусами $R_1 \neq R_2$ необходимо пользоваться всеми решениями. Поэтому потенциал вне включений ищем в виде

$$\psi_e = -\mathbf{E}_0\mathbf{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\{(a_ne^{-n\xi}+d_ne^{n\xi})\sin n\vartheta + (b_ne^{-n\xi}+c_ne^{n\xi})\cos n\vartheta\}, \quad -\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1. \tag{5}$$

Внутри правого включения

$$\psi_{in}^{(1)} = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(1)}\sin n\vartheta + b_n^{(1)}\cos n\vartheta)\,e^{-n\xi}, \quad \xi \geqslant \xi_1, \tag{6}$$

внутри левого включения

$$\psi_{in}^{(2)} = a_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(2)}\sin n\vartheta + b_n^{(2)}\cos n\vartheta)\,e^{n\xi}, \quad \xi \leqslant -\xi_2. \tag{7}$$

Граничные условия на правом и левом включениях обычные — непрерывность потенциала и нормальной составляющей плотности тока. Удовлетворяя граничным условиям при $\xi=\xi_1$ и $\xi=-\xi_2$, находим коэффициенты разложений (5)—(7)

$$a_n = A_n E_{0y}(1+\delta_0 e^{-2n\xi_1}) e^{-2n\xi_2}, \quad b_n = A_n E_{0x}(1-\delta_0 e^{-2n\xi_1}) e^{-2n\xi_2},$$
$$d_n = A_n E_{0y}(1+\delta_0 e^{-2n\xi_2}) e^{-2n\xi_1}, \quad c_n = -A_n E_{0x}(1-\delta_0 e^{-2n\xi_2}) e^{-2n\xi_1},$$
$$a_n^{(1)} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2} A_n E_{0y}(1+\delta_0 e^{-2n\xi_2}), \quad b_n^{(1)} = -\frac{2\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2} A_n E_{0x}(1-\delta_0 e^{-2n\xi_2}),$$
$$a_n^{(2)} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2} A_n E_{0y}(1+\delta_0 e^{-2n\xi_1}), \quad b_n^{(2)} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2} A_n E_{0x}(1-\delta_0 e^{-2n\xi_1}),$$
$$A_n = 2a\delta_0(-1)^n/[1-\delta_0^2 e^{-2n(\xi_1+\xi_2)}], \quad \delta_0=(\sigma_1-\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)=(1-h)/(1+h),$$
$$h=\sigma_2/\sigma_1, \quad a_0^{(2)} = -a_0^{(1)} = aE_{0x}. \tag{8}$$

Находя асимптотическое выражение для потенциала ψ_e из (5) и сравнивая его с выражением (4), получаем главные значения тензора $\Lambda_{\alpha\beta}^{(2)}$.

$$\Lambda_{xx}^{(2)} = -4a^2\delta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n(\xi_1+\xi_2)}}{1-\delta_0^2 e^{-2n(\xi_1+\xi_2)}} [\operatorname{ch} n(\xi_1-\xi_2) - \delta_0 e^{-n(\xi_1+\xi_2)}],$$
$$\Lambda_{yy}^{(2)} = -4a^2\delta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n(\xi_1+\xi_2)}}{1-\delta_0^2 e^{-2n(\xi_1+\xi_2)}} [\operatorname{ch} n(\xi_1-\xi_2) + \delta_0 e^{-n(\xi_1+\xi_2)}]. \tag{9}$$

При $\rho\to\infty$ имеем $\hat{\Lambda}^{(2)}(\infty) = \hat{\Lambda}_1^{(1)} + \hat{\Lambda}_2^{(1)}$, где $\hat{\Lambda}_i^{(1)}/\pi R_i^2$ — поляризуемость изолированного (отдельного) включения; $i=1, 2$. Таким образом, получаем

$$\operatorname{Sp}[\hat{\Lambda}^{(2)} - \hat{\Lambda}_1^{(1)} - \hat{\Lambda}_2^{(1)}] = -8a^2\delta_0^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-3n(\xi_1+\xi_2)}}{1-\delta_0^2 e^{-2n(\xi_1+\xi_2)}} \operatorname{ch} n(\xi_1-\xi_2), \tag{10}$$

а пространственное усреднение дает

$$\int_{R_1+R_2}^{\infty} \operatorname{Sp}[\hat{\Lambda}^{(2)} - \hat{\Lambda}_1^{(1)} - \hat{\Lambda}_2^{(1)}]\, d\rho = -2\pi R_1^2 R_2^2 \delta_0^3 F(\delta_0;\ R_1,\ R_2), \tag{11}$$

$$F(\delta_0;\ R_1,\ R_2) = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \frac{t^{3n-3}(1-t^2)^3}{1-\delta_0^2 t^{2n}} \varphi(t;\ R_1,\ R_2)\, dt, \tag{12}$$
$$\varphi(t,\ R_1,\ R_2) = \frac{R_1R_2}{2(R_1+tR_2)(R_2+tR_1)} \left[\left(\frac{R_1+tR_2}{R_2+tR_1}\right)^n + \left(\frac{R_2+tR_1}{R_1+tR_2}\right)^n\right].$$

При усреднении вместо ρ в (11) вводится новая переменная t, равная выражению (2), взятому с нижним знаком. При $h\to 0$ в разложении F (12), а следовательно, и f имеется неаналитический член

$$\Delta F = 32\zeta(3)\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} h^3 \ln h, \tag{13}$$

при $R_1=R_2$ совпадающий с полученным в работе [1]. Здесь $\zeta(3)=1.202\ldots$ — дзета-функция Римана. Очевидно, что при дополнительном усреднении по радиусам включений вид особенности $h^3\ln h$ сохраняется. Как показано в работе [1], функция $f(p, z)$ аналитична во всей плоскости z, разрезанной вдоль отрицательной вещественной полуоси. Здесь $f=\sigma_e/\sigma_1$, $p=1-c$.

2. Локальные колебания и тензор поляризуемости

Обратимся к исследованию локальных колебаний системы с включениями [3], свойства которой непосредственно связаны с поведением функции $f(p, z)$ на разрезе в комплексной плоскости аргумента z. Задача о спектре локальных колебаний, связанных с парой включений круговой формы разного радиуса, также может быть решена в биполярных координатах. При рассмотрении задачи о спектре локальных колебаний в системе с включениями потенциал ищется в виде разложения (5)—(7) с $E_0=0$.

В работе [3] были получены и обсуждались общие свойства локальных колебаний. Был также рассмотрен конкретный пример пары круговых цилиндров одинакового радиуса. В частности, было показано, что ортонормированную систему образуют не сами собственные функции $\psi_\nu(\mathbf{r})$, а их градиенты: $\mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})=\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})$.

Используя условие нормировки для собственных векторов $\mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})$ и граничные условия при $\xi=\xi_1$ и $\xi=-\xi_2$ для пары круговых цилиндров разного радиуса, получаем два набора собственных значений

$$\varepsilon_{1n}=-\sigma_2(\omega_{1n})/\sigma_1(\omega_{1n})=\operatorname{th}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2),\qquad \varepsilon_{2n}=-\sigma_2(\omega_{2n})/\sigma_1(\omega_{2n})=\operatorname{cth}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2) \tag{14}$$

и соответствующие им четыре типа собственных функций $\psi_{\lambda n}(\mathbf{r})$. Здесь $\lambda=1, 2, 3, 4$; $n=1, 2, \ldots$ Нормированные собственные функции первого типа (соответствующие уровням ε_{1n}) имеют вид

$$\psi_{1n}^{(e)}(\mathbf{r})=A_n\operatorname{ch}n\tilde{\xi}\sin n\vartheta,\qquad -\xi_2\leqslant\xi\leqslant\xi_1,$$

$$\psi_{1n}^{(1)}(\mathbf{r})=A_n\operatorname{ch}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\,e^{-n(\xi-\xi_1)}\sin n\vartheta,\qquad \xi\geqslant\xi_1,$$

$$\psi_{1n}^{(2)}(\mathbf{r})=A_n\operatorname{ch}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\,e^{n(\xi+\xi_2)}\sin n\vartheta,\qquad \xi\leqslant-\xi_2,$$

$$A_n=\left(\frac{1-\varepsilon_{1n}}{2\pi n}\right)^{1/2},\qquad \varepsilon_{1n}=\operatorname{th}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2),\qquad \tilde{\xi}=\xi-\frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2). \tag{15}$$

Нормированные собственные функции второго типа (соответствующие уровням ε_{2n}) имеют вид

$$\psi_{2n}^{(e)}(\mathbf{r})=-B_n\operatorname{sh}n\tilde{\xi}\cos n\vartheta,\qquad -\xi_2\leqslant\xi\leqslant\xi_1,$$

$$\psi_{2n}^{(1)}(\mathbf{r})=-B_n\operatorname{sh}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\,e^{-n(\xi-\xi_1)}\cos n\vartheta,\qquad \xi\geqslant\xi_1,$$

$$\psi_{2n}^{(2)}(\mathbf{r})=B_n\operatorname{sh}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\,e^{n(\xi+\xi_2)}\cos n\vartheta,\qquad \xi\leqslant-\xi_2,$$

$$B_n=\left(\frac{\varepsilon_{2n}-1}{2\pi n}\right)^{1/2},\qquad \varepsilon_{2n}=\operatorname{cth}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2),\qquad \tilde{\xi}=\xi-\frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2). \tag{16}$$

Функции третьего типа $\psi_{3n}(\mathbf{r})$ с собственными значениями $\varepsilon_{3n}=\varepsilon_{1n}$ получаются из (15) заменой $\sin n\vartheta\to\cos n\vartheta$, функции четвертого типа $\psi_{4n}(\mathbf{r})$ с собственными значениями $\varepsilon_{4n}=\varepsilon_{2n}$ получаются из (16) заменой $\cos n\vartheta\to\sin n\vartheta$. Для пары включений одинакового радиуса ($\xi_1=\xi_2=\xi_0$) формулы (15), (16) совпадают с формулами, полученными в работе [3].

Вычисляя собственные векторы $\mathbf{e}^{(e)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{r})$ во внешней области, внутри правого и внутри левого включений соответственно, легко проверить теперь их ортонормированность

$$\int\mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_\mu(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\delta_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Для этого необходимо проинтегрировать в биполярной системе координат по площади правого и левого включений и по внешней к ним области. При этом выполняются и «локальные» условия ортогональности [3]

$$\int\mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_\mu(\mathbf{r})\,\vartheta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\frac{1}{1+\varepsilon_\nu}\delta_{\mu\nu},\qquad \int\mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_\mu(\mathbf{r})\,[1-\vartheta(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r}=\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\delta_{\mu\nu},$$

где $\vartheta(\mathbf{r})=1$ внутри включения и $\vartheta(\mathbf{r})=0$ вне его.

Найденные собственные функции и собственные значения позволяют определить тензор поляризуемости $\hat{\Lambda}$ рассматриваемого тела. Общая формула для $\hat{\Lambda}$, полученная в работе [3], имеет вид

$$\Lambda_{\alpha\beta}(z) = -\frac{1-z}{4\pi}\sum_{\nu}(1+\varepsilon_\nu)^2\frac{u_{\nu\alpha}u_{\nu\beta}}{z+\varepsilon_\nu}, \tag{18}$$

которая дает спектральное представление тензора поляризуемоти макроскопического включения произвольной формы. Здесь

$$\mathbf{u}_\nu = \int \mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})\,\vartheta(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}. \tag{19}$$

Подставляя в (19) собственные векторы $\mathbf{e}_\nu(\mathbf{r})$, соответствующие собственным значениям ε_{1n} и ε_{2n}, и выполняя интегрирование в биполярной системе координат, для векторов $\mathbf{u}_{1n}$ и $\mathbf{u}_{2n}$ получаем выражения

$$u_{1n,\,x}=0,\quad u_{1n,\,y}=-4\pi an(-1)^n A_n e^{-\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)}\operatorname{ch}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\operatorname{ch}\frac{1}{2}n(\xi_1-\xi_2),$$

$$u_{2n,\,y}=0,\quad u_{2n,\,x}=-4\pi an(-1)^n B_n e^{-\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)}\operatorname{sh}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\operatorname{ch}\frac{1}{2}n(\xi-\xi_2). \tag{20}$$

Аналогичные вычисления для векторов $\mathbf{u}_{3n}$ и $\mathbf{u}_{4n}$ приводят к следующему результату:

$$u_{3n,\,y}=0,\quad u_{3n,\,x}=-4\pi an(-1)^n A_n e^{-\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)}\operatorname{ch}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\operatorname{sh}\frac{1}{2}n(\xi_1-\xi_2),$$

$$u_{4n,\,x}=0,\quad u_{4n,\,y}=-4\pi an(-1)^n B_n e^{-\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)}\operatorname{sh}\frac{1}{2}n(\xi_1+\xi_2)\operatorname{sh}\frac{1}{2}n(\xi_1-\xi_2). \tag{21}$$

Тогда составляющие тензора поляризуемости (18) принимают вид

$$\Lambda_{xx}=-a^2(1-z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{1n})}{(z+\varepsilon_{1n})(z+\varepsilon_{2n})}\left\{(1+z)\operatorname{ch}n(\xi_1-\xi_2)-(1-z)\,e^{-n(\xi_1+\xi_2)}\right\},$$

$$\Lambda_{yy}=-a^2(1-z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_{1n})}{(z+\varepsilon_{1n})(z+\varepsilon_{2n})}\left\{(1+z)\operatorname{ch}n(\xi_1-\xi_2)+(1-z)\,e^{-n(\xi_1+\xi_2)}\right\}. \tag{22}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (9) и (22) совпадают, что подтверждает справедливость спектрального подхода.

В заключение выражаю благодарность Б. Я. Балагурову за обсуждение работы.

Список литературы

[1] Балагуров Б. Я. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 5. С. 1796—1809.
[2] Балагуров Б. Я. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 5. С. 1664—1675.
[3] Балагуров Б. Я. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. № 1. С. 316—329.
[4] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. Гл. 10. 896 с.

ВНИПКТИ источников тока
Москва

Поступило в Редакцию
8 февраля 1989 г.