Журнал технической физики, 2014, том 84, вып. 6

03

Тепловой кризис вихреисточника в реальном газе, истекающем в вакуум с теплоподводом при постоянном давлении

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Московская область, Россия
e-mail: ank@aerocentr.msk.su , ank19512006@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 6 сентября 2013 г.)

Исследован тепловой кризис вихреисточника при энергоподводе в условиях постоянного давления. Рассмотрены интенсивности энерговыделения, заданные на единицу массы и в единицу объема в режиме I — истечение вихреисточника в вакуум. Изучены аналитические решения для газодинамических параметров и алгоритм построения функции интенсивности тепловыделения в различных вариантах вихреисточника. Определены ограничения на протяженность участка с постоянным давлением, получены зависимости критических координат зоны энергоподвода, критических температур, параметров энергоподвода от расхода, циркуляции газа, от начальной координаты зоны энергоподвода. Рассмотрены ситуации с малыми поправками на изменения теплоемкости газа с ростом температуры и с существенными при температуре торможения 1000 K.

Введение

В многочисленных ситуациях с распределенными источниками энергии, причиной которых являются электрический разряд, лазерное излучение, оптический пробой, химические реакции [1–9] или другие причины, возможен тепловой кризис. В стационарных одномерных течениях с цилиндрической и сферической симметрией наблюдается ограничение по расходу [10], запирание, так же как и в строго одномерном случае [11,12].

В цилиндрическом и сферическом источниках различают режимы истечения в вакуум (I), в затопленное пространство (II), из затопленного пространства (III), из вакуума (IV) [13,14]. Существенную роль в цилиндрическом вихреисточнике играет циркуляция [14,15]. Рассматривают энерговыделение, заданное в единицу объема (E-вариант) и на единицу массы (Q-вариант).

В режиме I истечения цилиндрического вихреисточника в разреженное пространство (в вакуум) в рамках модели совершенного (идеального) газа с постоянной теплоемкостью ранее найдены ситуации с постоянным давлением в области энергоподвода, которые описываются аналитическими решениями [16] и имеют отличительные особенности от случая заданного распределения интенсивности источников тепла $f(r)$. При постоянном давлении в зоне энерговыделения полная скорость потока газа также постоянна. В ситуации энергоподвода на единицу массы (Q-вариант) величина $f_Q(r)$ также является постоянной.

В реальном газе с учетом изменения теплоемкости с ростом температуры [17,18] показаны существенные отличия по сравнению с моделью совершенного газа с постоянной теплоемкостью [19–22], например, для зависимости координаты критических сечений r_*, а также критических значений энергетических параметров подобия E и Q от циркуляции Γ.

В настоящей работе в рамках модели газа с изменяющейся темплоемкостью $C_p(T)$ в диапазоне температур T порядка $3 \cdot 10^2 - 10^3$ K (реальный двуатомный газ, смесь азота и кислорода — воздух) исследуем тепловой кризис при истечении вихреисточника в вакуум (режим I) при условии постоянства давления в зоне энергоподвода за счет специального выбора интенсивности теплоподвода $f(r)$.

Постановка задачи

Исходные уравнения для газодинамических величин плотности ρ, давления p, температуры T, компонент скорости u, v и полной скорости $V = \sqrt{(u^2 + v^2)}$, полной энтальпии $H = V^2 + h(T)$ приведены, например, в [19–22]

$$r\rho u = m \equiv \frac{m_0}{2\pi\rho_{n0}u_{n0}r_0}, \tag{1}$$

$$V\frac{dV}{dr} + \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0\rho}\frac{dp}{dr} = 0, \quad V^2 = u^2 + v^2. \tag{2}$$

$$v = \frac{\Gamma}{r} \equiv \frac{\Gamma_0}{2\pi u_{n0}r_0 r}. \tag{3}$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{f(r)}{\gamma_0\rho u}\begin{cases} E \\ Q\rho(r), \end{cases}$$

$$E = \frac{(\gamma_0 - 1)g_0 r_0}{u_{n0}p_{n0}}, \quad Q = \frac{(\gamma_0 - 1)\rho_{n0}q_0 r_0}{u_{n0}p_{n0}}, \tag{4}$$

$$H = h + V^2 = \Phi(r) \equiv H_{00} + \frac{1}{\gamma_0 m}\begin{cases} EF(r) \\ QF_\rho(r), \end{cases}$$

$$H_{00} = T_{00} + h_{\varepsilon 0}, \tag{5}$$

$$h(T) = T + h_\varepsilon, \quad h_\varepsilon(T) = \frac{(\gamma_0 - 1)}{\gamma_0}X(T),$$

$$F = \int_{r_b}^{r} f r dr, \quad F_\rho = \int_{r_b}^{r} \rho(r) f r dr, \tag{6}$$

$$X = \frac{X_{O_2}\theta_{O_2}}{\exp(\theta_{O_2}/T) - 1} + \frac{X_{N_2}\theta_{N_2}}{\exp(\theta_{N_2}/T) - 1},$$

$$X_T = \frac{dX}{dT}, \quad \theta_{O_2} = \frac{T_{O_2}}{T_{n0}}, \quad \theta_{N_2} = \frac{T_{N_2}}{T_{n0}}, \tag{7}$$

$$p = \rho T, \tag{8}$$

$$c^2(T) = \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0} T\gamma(T),$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_v(T)} = \gamma_0 \frac{1 + \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} X_T}{1 + (\gamma_0 - 1)X_T}, \tag{9}$$

$$M_r^2 = \frac{2\gamma_0 u^2}{(\gamma_0 - 1)T\gamma(T)}, \quad M^2 = \frac{2\gamma_0 V^2}{(\gamma_0 - 1)T\gamma(T)}. \tag{10}$$

Все величины безразмерные, r — координата. Характерные физические величины: p_{n0} — давление на бесконечности в затопленном пространстве, ρ_{n0} — плотность на бесконечности, $u_{n0} = \sqrt{h_{n0}}$ — максимальная скорость, которая достигается при истечении в вакуум совершенного (идеального) газа, $h_{n0} = C_{\rho 0}T_{n0} = \gamma_0 p_{n0}/(\gamma_0 - 1)\rho_{n0}$ — энтальпия, C_{p0} — теплоемкость при постоянном давлении совершенного газа, $T_{n0} = \mu p_{n0}/R\rho_{n0}$ — температура, где R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса газа, r_0 — физический минимальный радиус. Расход газа есть m_0, kg/s, циркуляция — Γ_0, m^2/s, M, M$_r$ — полное и радиальное числа Маха, E, Q — параметры энергоподвода при интенсивности тепловыделения в единицу объема g_0, W/m^3 или на единицу массы q_0, W/kg соответственно (приняли $g_0 = \rho_0 q_0$); $f(r)$ — заданная в интервале $[r_1, r_2]$ функция, нормированная к единице $2\pi \int r f dr = 1$. Безразмерный расход газа есть $m = m_0/(2\pi\rho_{n0}u_{n0}r_0)$, циркуляция — $\Gamma = \Gamma_0/(2\pi u_{n0}r_0)$. Функции $F(r)$, $F_\rho(r)$, $\Phi(r)$ характеризуют энергию, подведенную к текущему сечению r, и полную подведенную (с учетом уже имевшейся в потоке) энергию, величина $H(r)$ — полную энтальпию газа в долях h_{n0}.

Функция $X(T)$ и параметры θ_{O_2}, θ_{N_2} характеризуют степень возбуждения колебательных энергетических уровней молекул кислорода O_2 и азота N_2, эффект является существенным при θ_{O_2}, $\theta_{N_2} \le 1$. Молярные концентрации кислорода и азота равны $X_{O_2} = 0.21$ и $X_{N_2} = 0.79$, характеристические колебательные температуры — $T_{O_2} = 2228$ K, $T_{N_2} = 3336$ K.

Начальная и замыкающая координаты равны $r_b = r_1$, $r_{ex} = r_2$ для вихреисточника и $r_b = r_2$, $r_{ex} = r_1$ для вихрестока. Тепловой кризис наступает в сечении, в котором $M_r = 1$. Критическое сечение, совпадающее с замыкающим, обозначим r_{cr} ($r_{cr} = r_2$ — вихреисточник, $r_{cr} = r_1$ — вихресток), не совпадающее — r_* (при этом $dM_r(r_*)/dr = 0$ [10,23], $r_* < r_2$ — вихреисточник, $r_* > r_1$ — вихресток). Различают критические параметры энерговыделения E_{cr}, Q_{cr} и E_*, Q_* соответственно в зависимости от реализации кризиса в замыкающем сечении или до него.

В случае истечения в вакуум (настоящая задача) и малого отличия характерных давления p_{n0} и температуры торможения T_{n0} от условий в стандартной атмосфере на уровне моря [24–26] $p_{n0} = 101325$ Pa, $T_{n0} = 288.15$ K, величины $h_{\varepsilon 0}$, h_ε порядка 10^{-4}, ими можно пренебречь, безразмерные $T_{00} = 1 \approx H_{00}$. Без энергоподвода $f = 0$ из (2), (4) получим адиабату Пуассона $p = \rho^{\gamma 0}$ и решения $T(r)$, $V(r)$, $\rho(r)$, $p(r)$, $u(r)$, $v(r)$ такие же, как в совершенном газе:

$$r^2 = \frac{\frac{m^2}{T^{2/(\gamma_0-1)}} + \Gamma^2}{H_{00} - T}, \quad \rho = p^{1/\gamma_0} = T^{1/(\gamma_0 - 1)} = \frac{m}{ru},$$

$$v = \frac{\Gamma}{r}, \quad H = T + V^2 = H_{00}. \tag{11}$$

Величину H_{00} (≈ 1) оставим, имея в виду общий случай $H_{00} \ge 1$. В сечении $r = r_m = 1$ радиальное число Маха M$_r = 1$. Из условия минимума $dr/dT|_{r=1} = 0$ находим температуру $T_m = T(1)$, другие газодинамические величины, а также связь расхода m с циркуляцией Γ

$$T_m = \frac{2}{\gamma_0 + 1}(H_{00} - \Gamma^2) = \left(\frac{2m^2}{\gamma_0 - 1}\right)^{(\gamma_0-1)/(\gamma_0+1)}. \tag{12}$$

Один из параметров подобия m или Γ независимый, как и физические величины Γ_0 и m_0

$$r_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi u_{n0}\Gamma} \equiv \frac{m_0}{2\pi\rho_{n0}u_{n0}m}. \tag{13}$$

Решение (11) дает в сечении r_b на входе в зону нагрева начальные параметры T_b, p_b, ρ_b, u_b, v_b, V_b, M_{rb}, M_{vb}, M_b.

Решение при постоянном давлении

Аналитические решения в рассматриваемом случае реального (с переменой теплоемкости) газа мало отличаются от решений для совершенного (идеального) газа [16]. Внутри зоны энергоподвода из системы исходных уравнений выведем уравнение для производной dp/dr и потребуем постоянства давления $p \approx p_b = \text{const}$ (т. е. $dp/dr \approx 0$):

$$\frac{M_r^2 - 1}{\gamma p}\frac{dp}{dr} = \frac{M_r^2 r g(r)}{\gamma m T}\frac{\gamma - 1}{\gamma_0 - 1} - \frac{M^2}{r} \approx 0 \tag{14}$$

при условии, что радиальное число Маха еще не достигло строго единицы:

$$\mathrm{M}_r^2 \ne 1. \tag{15}$$

При этом из уравнения (2) следует, что полная скорость постоянна $V \approx V_b = \text{const}$. Радиальная скорость равна

$$u(r) = \sqrt{V_b^2 - \Gamma^2/r^2}, \tag{16}$$

и при $\Gamma = 0$ радиальная скорость u постоянна, $u \approx u_b = \text{const}$. Из (1), (6) находим

$$\rho(r) = \rho_b \frac{r_b u_b}{ru(r)}, \quad T(r) = T_b \frac{ru(r)}{r_b u_b},$$

$$\mathrm{M}_r^2 = \frac{2\gamma_0 u^2}{(\gamma_0 - 1)\gamma T} = \mathrm{M}_{rb}^2 \frac{\gamma_b r_b u(r)}{u_b \gamma r}. \tag{17}$$

Решение (17) будет справедливо до критического сечения r_*, в котором радиальное число Маха достигло единицы и которое примем за замыкающее зону $r = r_2 = r_{\text{ex}}$. Строго говоря, равной критической координата замыкающего сечения будет только с некоторой малой погрешностью, пренебрегая которой будем говорить о равенстве $r_2 \approx r_*$. Предполагаем также, что в замыкающем сечении производная от радиального числа Маха по координате равна нулю $dM_r(r)/dr = 0$ (r_* введено в [10,23], как отмечено выше; численные решения приведены, например в [10,16,20,22,23]), и за „критическим" сечением значение M_r удаляется от единицы. Таким образом, стационарное решение справедливо, течение не разрушилось, не перестроилось из-за теплового кризиса. С таким условием примем приближенное равенство всех параметров критическим u_*, ρ_*, T_*, M_{r_*}.

Из уравнения (14) находим в Q-варианте с учетом нормировки f в критическом сечении

$$f_Q\big(T(r)\big) = \frac{\gamma(\gamma_0 - 1)p_b V_b^2}{(\gamma - 1)mQ},$$

$$Q_* = 2\pi(\gamma_0 - 1)\,\frac{p_b V_b^2}{m}\int\limits_{r_b}^{r_*}\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,r\,dr. \qquad (18)$$

Функция $f(r)$ в реальном газе непостоянна, так как зависит от $\gamma\big(T(r)\big)$. В E-варианте получим

$$f_E(r) = \rho(r)\,\frac{\gamma(\gamma_0 - 1)P_b V_b^2}{(\gamma - 1)mE},$$

$$E_* = 2\pi(\gamma_0 - 1)\,\frac{p_b V_b^2}{m}\int\limits_{r_b}^{r_*}\rho(r)\,\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,r\,dr. \qquad (19)$$

Окончательно

$$f_Q(T) = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)2\pi\int_{r_b}^{r_*}\frac{\gamma r}{\gamma - 1}\,dr},$$

$$f_E(T) = \frac{\rho(r)\gamma}{(\gamma - 1)2\pi\int_{r_b}^{r_*}\frac{\rho\gamma r}{\gamma - 1}\,dr}. \qquad (20)$$

Отметим, что решения для $T(r)$, $u(r)$, $\rho(r)$, $V(r)$, $M(r)$, $M_r(r)$, $c(r)$ идентичны в E- и Q-вариантах. Различны распределения интенсивности тепловыделения $f_Q(r)$, $f_E(r)$ и параметры подобия, описывающие энергоподвод (Q и E): $f_Q(r)$ близко к постоянному при температурах торможения T_0, близких к T_{n0} и $\gamma(T)$, близких к γ_0; $f_E(r)$ близко к решению для плотности $\rho(r) = m/[r\sqrt{(V_b^2 - \Gamma^2/r^2)}]$.

Из условия кризиса $\mathrm{M}_r^2(r_*) \approx 1$, используя решения (17) в критической точке, приходим к уравнениям для r_*^2 и T_*:

$$\left(\frac{r_*}{r_b}\right)^4 + B\left(\frac{r_*}{r_b}\right)^2 + C = 0,$$

$$B = -\frac{4m^2V_b^2}{(\gamma_0 - 1)^2 r_b^2 p_b^2}\,\frac{\gamma_0^2}{\gamma_*^2} = -\mathrm{M}_{rb}^2\mathrm{M}_b^2\,\frac{\gamma_b^2}{\gamma_*^2}, \qquad (21)$$

$$C = \frac{4m^2\Gamma^2}{(\gamma_0 - 1)^2 r_b^2 p_b^2}\,\frac{\gamma_0^2}{\gamma_*^2} = \mathrm{M}_r^2\mathrm{M}_{vb}^2\,\frac{\gamma_b^2}{\gamma_*^2},$$

$$\left(\frac{r_*}{r_b}\right)^2 = -\frac{B}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}}\right],$$

$$\left(\frac{T_*}{T_b}\right)^2 + \beta\,\frac{T_*}{T_b} + \delta = 0, \quad \beta = -\mathrm{M}_b^2\,\frac{\gamma_b}{\gamma_*},$$

$$\delta = \frac{\mathrm{M}_{vb}^2}{\mathrm{M}_{rb}^2}, \quad \frac{T_*}{T_b} = -\frac{\beta}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\beta^2}}\right]. \qquad (22)$$

Дискриминант D в решениях квадратных уравнений (21), (22) одинаков и равен

$$D = 1 - \frac{4C}{B^2} = 1 - \frac{4\delta}{\beta^2} = 1 - \frac{4\mathrm{M}_{vb}^2}{\mathrm{M}_{rb}^2\mathrm{M}_b^4}\,\frac{\gamma_*^2}{\gamma_b^2}. \qquad (23)$$

При $r_b = r_m = 1$ имеем $\mathrm{M}_{rb} = 1$, $\mathrm{M}_b^2 = 1 + \mathrm{M}_{vb}^2 = 1 + \mathrm{M}_{vm}^2 = 1 + (\Gamma/u_b)^2$ и (23) запишем с учетом малого отличия показателя адиабаты γ_* от начального $\gamma_b \approx \gamma_0$:

$$D = \frac{[(1 + \mathrm{M}_{vm}^2)^2 - 4\mathrm{M}_{vm}^2(1 - \gamma_1)^2]}{\mathrm{M}_m^4} \approx \frac{[(1 - \mathrm{M}_{vm}^2)^2 + 8\mathrm{M}_{vm}^2\gamma_1 + \ldots]}{\mathrm{M}_m^4}, \qquad (24)$$

$$\gamma_* \approx \gamma_0(1 - \gamma_1 + \ldots), \quad \gamma_b \approx \gamma_0,$$

$$\gamma_1 = \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{\gamma_0}\,X_T(T_*) \ll 1.$$

В главном приближении совершенного газа, пренебрегая величинами $\sim \gamma_1$ при нулевом значении дискриминанта $D = 0$ (совпадающие корни в (21), (22)), получим из (24): $\mathrm{M}_{v,m} = \Gamma/c_m = 1$, $u_m = c_m = \Gamma$, $T_m = 2u_m^2/(\gamma_0 - 1) = 2\Gamma^2/(\gamma_0 - 1)$. Следовательно, с учетом (12) температура $T_m = 2(1 - \Gamma^2)/(\gamma_0 + 1)$, окончательно находим $\Gamma^2 = (\gamma_0 - 1)/2\gamma_0 = u_m^2 = v_m^2$, $T_m = 1/\gamma_0$. При $r_b > r_m$ дискриминант $D(\Gamma)$ имеет минимум при некоторой циркуляции Γ, но всегда больше нуля. В качестве критических r_* и T_* годятся решения со знаком „плюс" перед радикалом.

В случае реального газа с переменной теплоемкостью дискриминант $D(\Gamma)$ имеет минимум при $r_b \geq r_m$, но больше нуля везде, включая $r_b = r_m = 1$. Для определения критических r_* и T_* из (21), (22) можно применить итерационную процедуру. Отличие от случая идеального газа связано с показателем γ_*, который отличается от γ_0 на малую величину $\gamma_1 \sim 0.1X_T(T_*)$.

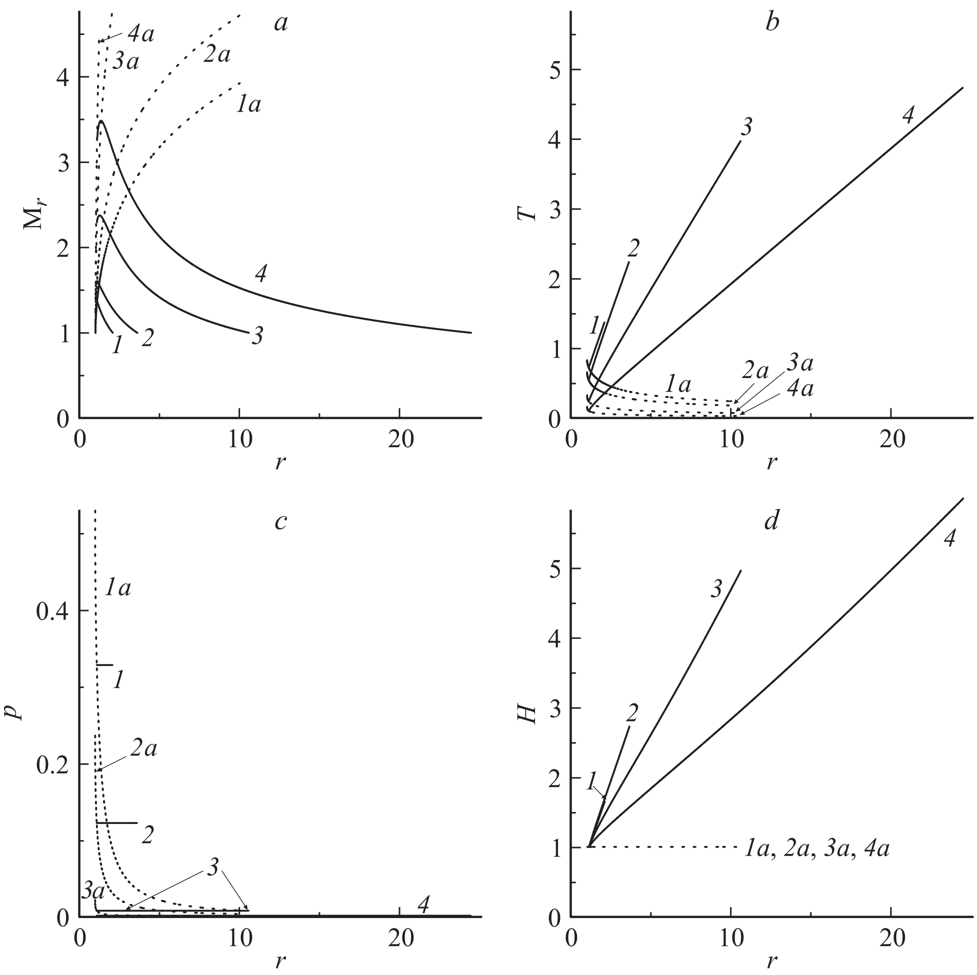

Рис. 1. *a* — распределения радиальных чисел Маха $\mathrm{M}_r(r)$; *b* — температуры $T(r)$, *c* — давления $p(r)$, *d* — полной энтальпии $H(r)$, *1* — $\Gamma = 0$ ($m \approx 0.2588$), *2* — 0.454 (0.1294), *3* — 0.7766 (0.016175), *4* — 0.8953 (0.00202), *1, a* — *4, a* — без теплоподвода, $r_b = 1.1$, $\gamma_0 = 1.4$.

Решение за зоной энергоподвода

Теплоподвод увеличивает температуру газа. Учтем изменения теплоемкости с ростом температуры. Выражение для полной скорости $V(r)$, полученное из (5), подставим в уравнение сохранения импульса (2), получим [21,22]:

$$\frac{d}{dr}\ln\left(\frac{p}{\rho^{\gamma_0}}\right) = -(\gamma_0 - 1)\,\frac{X_T}{T}\,\frac{dT}{dr},$$

$$p = \rho^{\gamma_0}\varphi(T)^{\gamma_0-1}, \quad \varphi = C_2\exp\left[-\int\limits_{T_*}^{T}\frac{X_T dT}{T}\right],$$

$$p = \frac{T^{\gamma_0/(\gamma_0-1)}}{\varphi(T)}, \quad \rho = \frac{T^{1/(\gamma_0-1)}}{\varphi(T)}, \quad C_2 = \left(\frac{p_b}{\rho_*^{\gamma 0}}\right)^{1/(\gamma_0-1)}. \tag{25}$$

Постоянную интегрирования определили, используя полученную плотность $\rho_* = m/[r_*\sqrt{(V_b^2 - \Gamma^2 r_*^2)}]$ и давление $p = p_0 = p_*$ в замыкающем критическом сечении зоны энергоподвода r_*. Из интегралов сохранения массы (1) и энергии (5) находим решение, связь координаты r с температурой T:

$$r^2 = \frac{\Gamma^2 + \frac{m^2\varphi^2(T)}{T^{2/(\gamma_0-1)}}}{\Phi_* - T - h_\varepsilon(T)},$$

$$\Phi_* \equiv H_{00} + \frac{1}{\gamma_0 m}\begin{cases} E_* F(r_*) \\ Q_* F_\rho(r_*) \end{cases}. \tag{26}$$

При необходимости функции $f(r)$ в малой окрестности сечения r_* можно задать так, чтобы решение за зоной гладко сопрягалось с решением в конце зоны энергоподвода.

Результаты

На рис. 1 представлены распределения радиальных чисел Маха $\mathrm{M}_r(r)$, температуры $T(r)$, давления $p(r)$ и полной энтальпии $H(r)$ при различных циркуляциях —

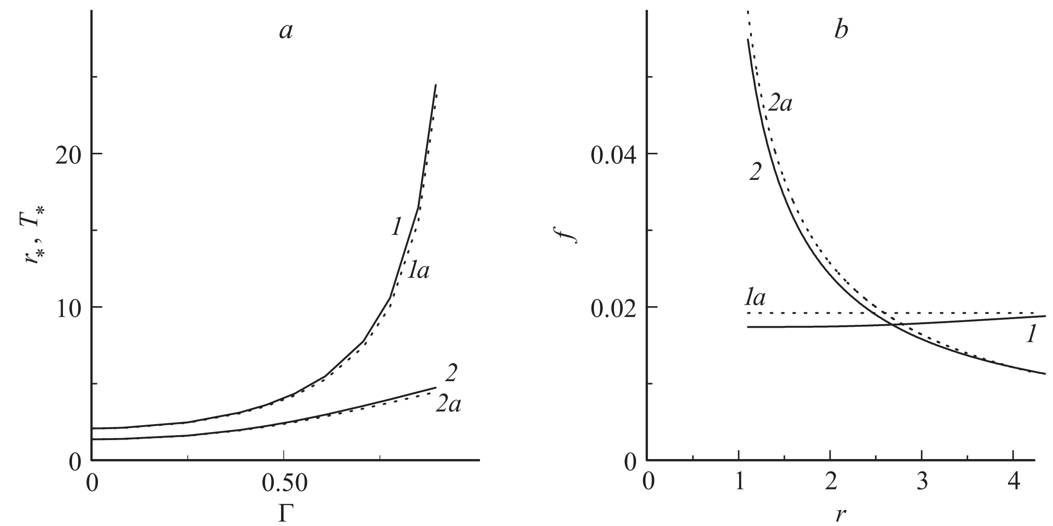

Рис. 2. a — зависимости критических радиусов r_* (*1*) и температур T_* (*2*) от циркуляции Γ вихреисточника, истекающего в вакуум (режим I), при нагреве с постоянным давлением $p \approx p_b = \text{const}$; *1, a*, *2, a* — совершенный (идеальный) газ; b — интенсивность тепловыделения $f(r)$ при циркуляции $\Gamma \approx 0.5283$, *1* — Q-вариант, *2* — E-вариант, *1, a*, *2, a* — совершенный газ, $r_b = 1.1$, $\gamma_0 = 1.4$, $T_0 = 288.15\,\text{K}$.

$\Gamma = 0$ (*1*), 0.454 (*2*), 0.7766 (*3*), 0.8953 (*4*). Приведены также соответствующие распределения газодинамических величин *1a*, *2a*, *3a*, *4a* в вихреисточнике без теплоподвода, истекающем в вакуум, режим I. Начало зоны энергоподвода расположено недалеко от минимального сечения при $r_b = 1.1$. Критические радиусы составили $r_* = 2.078$ (*1*), 3.611 (*2*), 10.58 (*3*), 24.47 (*4*), температуры — $T_* = 1.373$ (*1*), 2.233 (*2*), 3.864 (*3*), 4.735 (*4*). Увеличение полной энтальпии H происходит почти в 6 раз. Отметим, что при температуре около 3000 K теплоемкость увеличивается приблизительно на 27% по сравнению с теплоемкостью при нормальных условиях, отношение $C_p/C_v = \gamma(T)$ („показатель адиабаты") уменьшается приблизительно на 8% [19,22]. При циркуляции $\Gamma > 0.6083$ вблизи входа в зону энергоподвода появляется локальный максимум радиального числа Маха $\mathrm{M}_r(r)$.

Как показывают данные, приведенные на рис. 2, a, критические радиусы r_* и температуры T_* слабо отличаются от соответствующих значений в совершенном газе при температуре торможения $T_0 \approx 288.15\,\text{K}$. Обе величины в случае совершенного газа слегка занижены. Если задать некоторую фиксированную протяженность $d = r_2 - r_b$ зоны энергоподвода и увеличивать циркуляцию Γ вихреисточника, наступит такой момент, что кризис не реализуется в рассматриваемой области, так как критический радиус r_* больше, чем координата замыкающего сечения r_2. Температура в конце зоны энергоподвода может быть значительно выше температуры T_b на входе в зону.

На рис. 2, b построены функции распределения интенсивности источников тепла $f_Q(r)$ (*1*) и $f_E(r)$ (*2*) в Q- и E-вариантах соответственно, *1a* и *2a* — совершенный газ, в этом случае значения f_Q и f_E завышены. Циркуляция $\Gamma = 0.528$, при $\Gamma = 0$ и $\Gamma \to \Gamma_{\max}$ распределения $f(r)$ аналогичны. Относительные расхождения максимальны для Q-варианта на входе в зону энерговыделения при $r = r_b$ и составили 1.65, 10.1 и 26.0% при циркуляции $\Gamma = 0$, 0.528 и 0.895 соответственно. Для E-варианта расхождения составили приблизительно 1.39, 6.64 и 14.8%. Значения интенсивности f_Q составили $f_Q \approx 0.02$ на рис. 2, b, (*1, 1a*) приблизительно в 5 раз больше при циркуляции $\Gamma = 0$ и в 20 раз меньше при $\Gamma \approx 0.895$. Функция f_Q слабо растет, $f_E(r)$ в несколько раз убывает с ростом r от r_b до r_*.

Высокие температуры торможения T_0

Рассмотрим вихреисточник, истекающий в вакуум (режим I), в котором температура торможения T_0 может быть существенно выше, чем температура в нормальных условиях. Вместе с тем предполагаем, что в некотором сечении r_n с ненулевой скоростью имеем условия как в стандартной атмосфере на уровне моря $p_{n0} \approx 101\,325\,\text{Pa}$, $T_{n0} \approx 288.15\,\text{K}$, величина $h_\varepsilon(T_{n0})$ равна по порядку 10^{-4}. Без энергоподвода $f = 0$ с такой погрешностью ниже сечения r_n получим адиабату Пуассона $p \approx \rho^{\gamma 0}$. В качестве характерных величин выбрали, как и ранее, температуру T_{n0}, давление p_{n0}, плотность ρ_{n0}, энтальпию совершенного газа h_{n0}, скорость $u_{n0} = \sqrt{(2h_{n0})}$, минимальный физический радиус r_0 согласно (13). Интегралы (1), (3), (5) сохранения массы, азимутальной компоненты количества движения, энергии справедливы и в случае больших T_0, уравнение состояния Клапейрона (8) — до некоторого предела. До зоны энергоподвода безразмерные полная энтальпия H_{00} и температура торможения T_{00} могут в несколько раз превышать единицу:

$$H = T + h_\varepsilon(T) + V^2 = T_m + h_{\varepsilon m} + V_m^2 = H_{00} > 1. \quad (27)$$

Решение уравнения сохранения радиальной компоненты импульса (2) запишем аналогично (25) с нормировкой в сечении r_n, где $T = T_n = 1$:

$$p = \rho^{\gamma_0}\psi(T)^{\gamma_0-1}, \quad p = \frac{T^{\gamma_0/(\gamma_0-1)}}{\psi(T)}, \quad \rho = \frac{T^{1/(\gamma_0-1)}}{\psi(T)}, \tag{28}$$

$$\psi = \psi_m \exp\left[-\int\limits_{T_m}^{T} \frac{X_T dT}{T}\right] = \exp\left[\int\limits_{T}^{1} \frac{X_T dT}{T}\right],$$

$$\psi_m = \exp\left[\int\limits_{T_m}^{1} \frac{X_T dT}{T}\right]. \tag{29}$$

При $T < 1$ можно принять $X_T = 0$, $\psi = 1$, так как вклад малых $X_T \leq 10^{-4}$ — за пределами погрешности модели. Решение до зоны есть

$$r^2 = \frac{\Gamma^2 + \frac{m^2\psi^2(T)}{T^{2/(\gamma_0-1)}}}{H_{00} - T - h_\varepsilon(T)}. \tag{30}$$

Вместе с интегралами сохранения массы, энергии и уравнением состояния решение (30) задает величины T_m, p_m, u_m, ρ_m, V_m, $\mathrm{M}_{r,m}$, M_m в минимальном сечении $r_m = 1$ и начальные условия T_b, u_b, p_b, V_b, M_{rb}, M_b при $r = r_b$ на входе в область энергоподвода [19–21].

Заметим, что непосредственно из исходных уравнений (1), (3), (5) сохранения массы, количества движения, энергии и уравнения состояния (8) в отсутствие теплоподвода следует сохранение энтропии S [17,27] до и после зоны энергоподвода (см. Приложение).

Внутри зоны энергоподвода справедливы решения (16), (17). Для определения критического сечения r_* и других критических параметров достаточно решить, например с помощью итераций, одно из уравнений (21) или (22). Функции распределения источников энергии $f_Q(r)$, $f_E(r)$ определяются по формулам (18)–(20).

Условие минимума координаты $dr/dT|_{r=1} = 0$ выполняется одновременно, как нетрудно убедиться, с условием равенства радиальной компоненты скорости u_m значению скорости звука c_m (радиального числа Маха M_r — единице):

$$u_m^2 = c_m^2 = \frac{\gamma_0 - 1}{2}\, T_m \frac{\gamma_m}{\gamma_0}. \tag{31}$$

Приведем также выражение для квадрата радиальной скорости u_m^2, полученное из интеграла сохранения энергии (27), взятого в минимальном сечении $r_m = 1$:

$$u_m^2 = T_{00} + h_{\varepsilon 0} - T_m - h_{\varepsilon m} - \Gamma^2. \tag{32}$$

Полагая циркуляцию Γ заданной, как и температуру торможения T_0, приравняв (31) и (32), находим температуру в минимальном сечении T_m, радиальную скорость u_m и поправку ψ_m из уравнения связи (28) давления p_m с плотностью ρ_m. Наконец, уравнение сохранения массы (1) дает расход:

$$m = \rho_m u_m = \frac{T_m^{(\gamma_0+1)/2(\gamma_0-1)}}{\psi_m}\sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}\,\gamma_m}. \tag{33}$$

Расход m однозначно связан с циркуляцией Γ, только один параметр подобия является независимым. При $\Gamma = 0$ расход максимален $m = m_{\max}$, как и в совершенном газе с постоянными теплоемкостями (12):

$$T_m = 2H_{00}/(\gamma_0 + 1),\ m_{\max,\mathrm{ideal}} = \sqrt{[(\gamma_0 - 1)/2][2H_{00}/(\gamma_0 + 1)]^{(\gamma_0+1)/2(\gamma_0-1)}}.$$

Если задан расход m, уравнение сохранения массы (1) и уравнение (31) дают:

$$u_m^2 = \frac{m^2\psi_m^2}{T_m^{2/(\gamma_0-1)}} = \frac{\gamma_0 - 1}{2}\, T_m \frac{\gamma_m}{\gamma_0}. \tag{34}$$

Уравнение (34) есть интегральное уравнение для определения температуры T_m и функции $\psi(T)$, включая ψ_m. Находим величины T_m, ψ_m, γ_m, p_m, ρ_m, u_m и из (32) — циркуляцию Γ. Циркуляция меняется от нуля до $\Gamma_{max} = \sqrt{[T_{00} + h_\varepsilon]}$, расход — от максимального $m_{\max}$ до нуля.

На рис. 3, *a* приведены температуры T_m (1) в минимальном сечении $r_m = 1$, на входе T_b (2) при $r_b = 1.1$ и на выходе T_* (3) при r_*, а также критическая координата r_* (4), и расход m (5) в зависимости от температуры торможения T_0. Показатель адиабаты $\gamma_m \approx 1.3997{-}1.3478$, величина $\psi_m \approx 1{-}0.7295$ при изменении T_0 от 288.15 до 1000 K. Изменения радиальной скорости u_m, плотности ρ_m и давления p_m составили $u_m \approx 0.4082{-}0.7552$, $\rho_m \approx 0.6339{-}20.70$, $p_m \approx 0.5284{-}61.32$. Отметим, что модель двуатомного газа настоящей работы изначально (в точке нормировки функции $\psi(T)$) на малую величину $\sim 10^{-4}$ отличается от модели совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma_0 = 1.4$ (воздух). Полная энтальпия H_{00} возрастает от единицы до 3.623 при увеличении T_0 от 288.15 до 1000 K.

Точка (сечение) нормировки r_n характеризуется тем, что в ней $T_n = 1 = p_n = \psi_n = \rho_n$, $h_{\varepsilon,n} = 0$, $\gamma_n = \gamma_0$ по определению. Сечение r_n совпадает с минимальным $r_m = 1$ и температура в нем равна $T_m = 1$ при температуре торможения $T_0 \approx 350.6$ K. Координата начала зоны тепловыделения r_b связана с температурой T_b соотношением (30), согласно которому есть две ветви $T_b(r_b)$ во всем интервале значений $r_b = 1{-}\infty$: нижняя, соответствующая режимам истечения в вакуум (I) или из вакуума (IV), и верхняя, соответствующая режимам истечения в затопленное пространство II или из затопленного пространства III. При температуре торможения $T_0 > 350.6$ K температура в минимальном сечении $T_m > 1$, точка (сечение) нормировки r_n расположена на нижней ветви в области режимов I, IV.

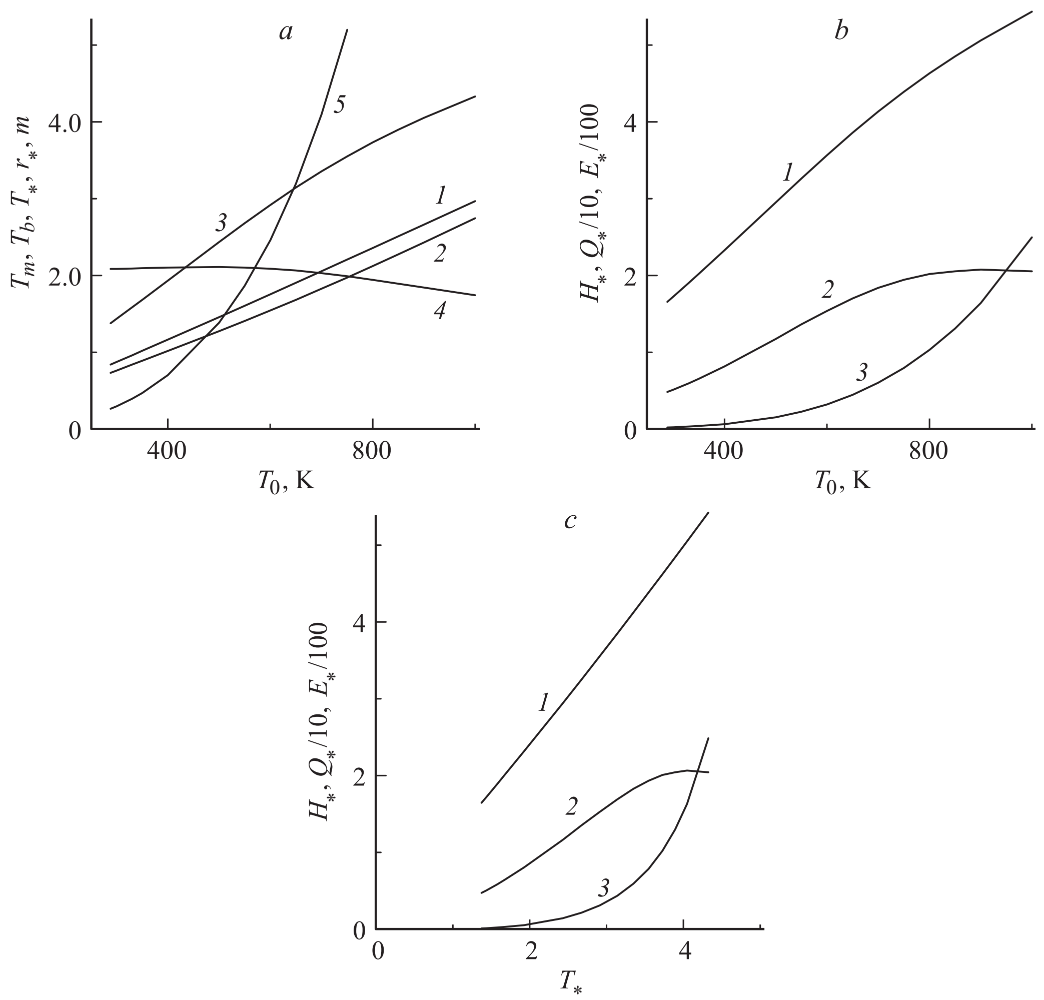

Рис. 3. Источник в вакуум: a — *1* — температура T_m (в долях T_{n0}) в минимальном сечении $r_m = 1$, *2* — в начале T_b ($r_b = 1.1$) и *3* — в конце T_* ($r_* = 1.74{-}2.10$) зоны энергоподвода, *4* — критическое сечение r_*; *5* — безразмерный расход m как функции температуры торможения T_0 K (288.15–1000 K); b — полная энтальпия H_* — *1*, энергетические параметры Q_* — *2* и E_* — *3* в зависимости от T_0; c — H_*, Q_* и E_* в зависимости от T_*. Циркуляция $\Gamma = 0$, $\gamma_0 = 1.4$.

При $T_0 < 350.6$ K температура $T_m < 1$, сечение r_n расположено на верхней ветви в области режимов II, III.

На рис. 3, b представлены зависимости от температуры торможения T_0 для критической полной энтальпии H_* (*1*) и энергетических параметров Q_* и E_* (*2* и *3* соответственно). Отметим локальный максимум для $Q_*(T_0)$ при $T_0 \approx 900$ K и монотонный рост $E_*(T_0)$. На рис. 3, c показаны связи величин H_*, Q_* и E_* с критической температурой T_*.

На рис. 4 для источника в вакуум (режим I, $\Gamma = 0$) представлены распределения по координате радиального числа Маха $\mathrm{M}_r(r)$, температуры $T(r)$, полной энтальпии $H(r)$, давления $p(r)$, рис. 4, a–d, при различных температурах торможения $T_0 = 288.15$ K (*1* — совершенный газ), 550 K (*2*), 1000 K (*3* — высокоэнтальпийный поток). Показаны также распределения интенсивности тепловыделения $f_Q(r)$ (рис. 4, e, *1*–*3*) и $f_E(r)$ (*4*–*6*) при тех же температурах торможения $T_0 = 288.15$ K (*1, 4* — совершенный газ), 550 K (*2, 5*) и 1000 K (*3, 6*). Координата начала зоны энергоподвода равна $r_b = 1.1$, критические координаты составили $r_* = 2.078$ (*1, 4*), 2.097 (*2, 5*), 1.737 (*3, 6*).

Показатель адиабаты γ_* убывает до 1.356 при 550 K и до 1.321 при 1000 K и $\Gamma = 0$.

На рис. 5, a построены зависимости безразмерного расхода m от циркуляции Γ при температурах торможения $T_0 = 288.15$ K (*1*, совершенный газ), 500 K (*2*) и 1000 K (*3*). Максимальный расход (при $\Gamma = 0$) возрастает от 0.2588 до 15.63. На рис. 5, b показаны уменьшения до нуля температур в минимальном сечении T_m (*1*–*3*) и в начальном сечении зоны энергоподвода T_b (*2a, 3a*) с ростом циркуляции Γ от нуля до максимального значения $\Gamma_{\max} = \sqrt{H_{00}} \approx \sqrt{(1; 1.744; 3.623)} \approx 1.1.321, 1.903$. Наконец, на рис. 5, c приведены критические температуры T^* (*1*–*3*) и координаты r^* (*4*–*6*) при температурах торможения $T_0 = 288.15$ K (*1, 4*), 500 K (*2, 5*) и 1000 K (*3, 6*), возрастающие с ростом циркуляции, особенно вблизи $\Gamma \approx \Gamma_{\max}$. Показатели адиабаты γ_* убывают до 1.299, 1.288 при температуре торможения $T_0 = 1000$ K и $\Gamma = 0.8$, 1.8 соответственно.

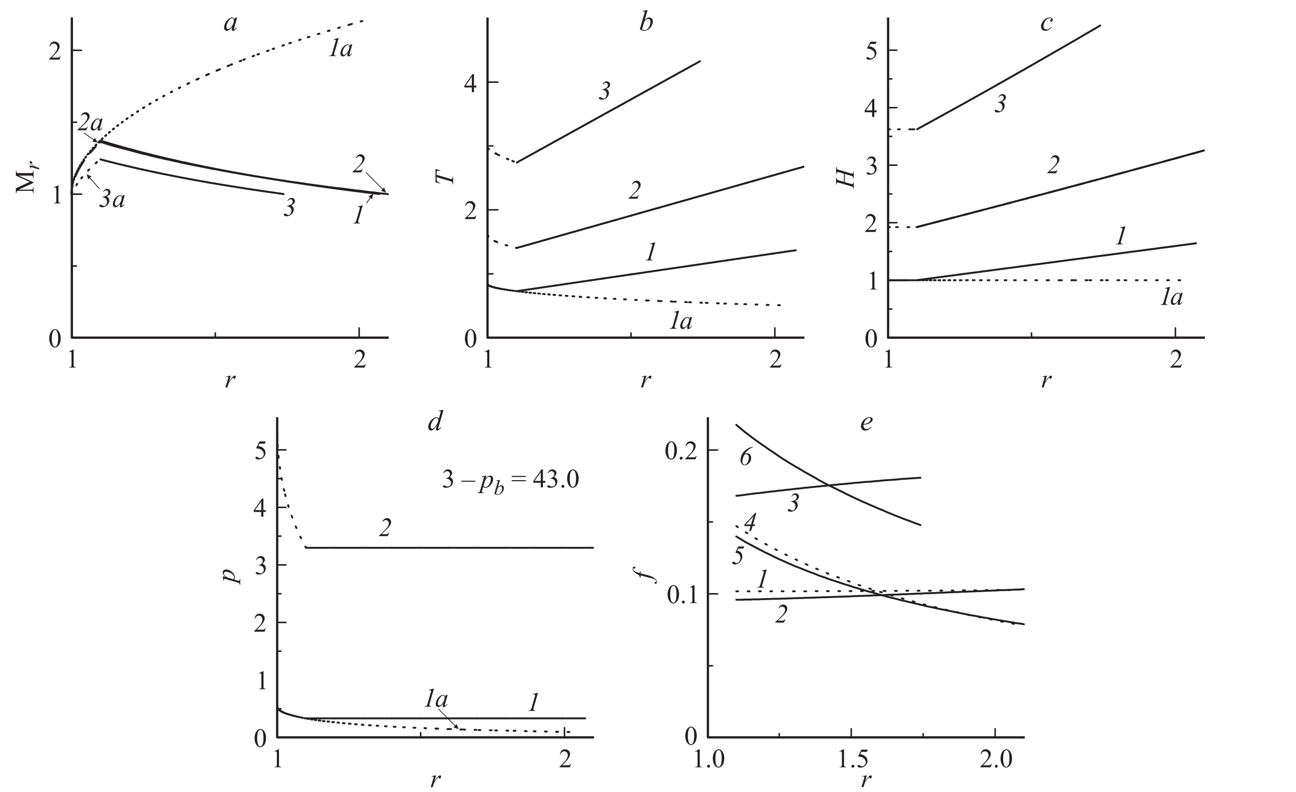

Рис. 4. Распределения по координате: a — радиального числа Маха $M_r(r)$, b — температуры $T(r)$, c — полной энтальпии $H(r)$, d — давления $p(r)$, *1* — $T_0 = 288.15\,\mathrm{K}$ (совершенный газ), *2* — 550, *3* — 1000 K; e — функции $f_Q(r)$ — *1–3*, $f_E(r)$ — *4–6*, где $T_0 = 288.15\,\mathrm{K}$ — *1, 4* (совершенный газ), 550 K — *2, 5*; 1000 K — *3, 6*; циркуляция $\Gamma = 0$, $\gamma_0 = 1.4$, $r_b = 1.1$.

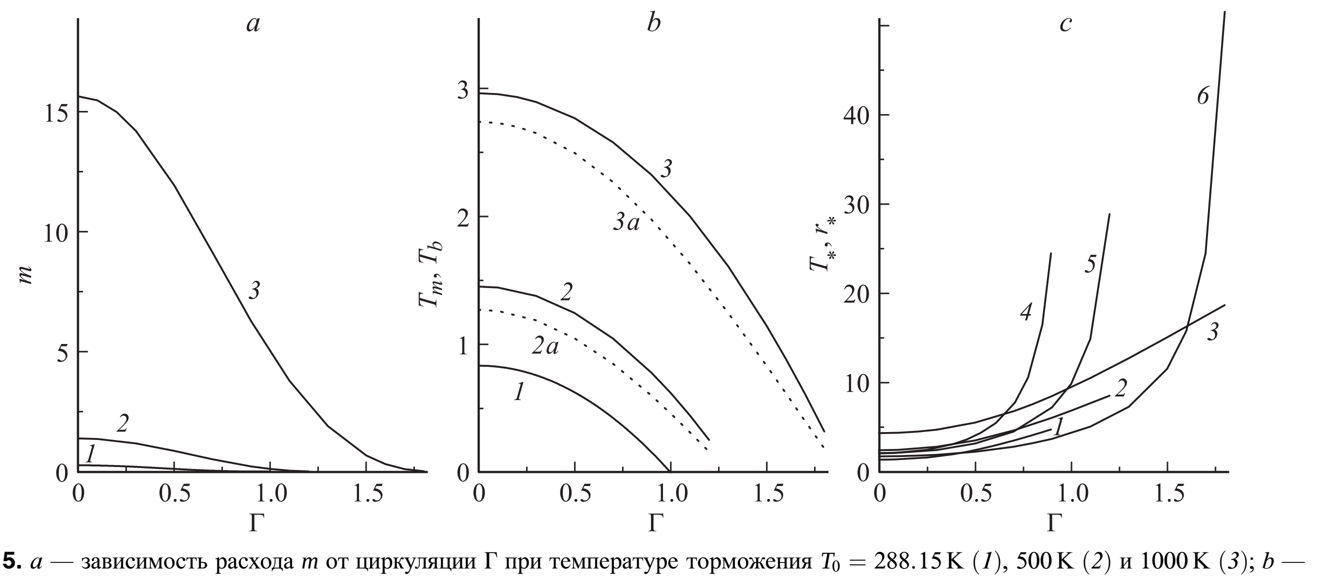

Рис. 5. a — зависимость расхода m от циркуляции Γ при температуре торможения $T_0 = 288.15\,\mathrm{K}$ (*1*), 500 K (*2*) и 1000 K (*3*); b — температура в сечении минимума T_m — *1–3*, температура на входе в зону T_b — *2, a*, *3, a*; c — критические температуры T_* — *1–3* и сечения r^* — *4–6* при $T_0 = 288.15\,\mathrm{K}$ (*1, 4*), 500 K (*2, 5*) и 1000 K (*3, 6*).

На рис. 6 представлены: a — функции источников тепла $f_Q(r)$ — *1, 3* и $f_E(r)$ — *2, 4* при циркуляции $\Gamma = 0$ (*1, 2*) и $\Gamma = 1.1$ (*3, 4*); b — зависимости от Γ для полной энтальпии H_* (*1*, совпадающей с потоком энергии от внешних источников $H_* = \Phi_Q = \Phi_E$ и в Q-, и в E-вариантах), для критических значений энергетических параметров Q_* (*2*) и E_* (*3*); c — зависимости величин H_*, Q_* и E_* от T_* при $r_b = 1.1$, $\gamma_0 = 1.4$, $T_0 = 1000\,\mathrm{K}$. Отметим локальные максимумы значений энергетического параметра E_* при $\Gamma \approx 0.80$ и при $T_* \approx 7.586$.

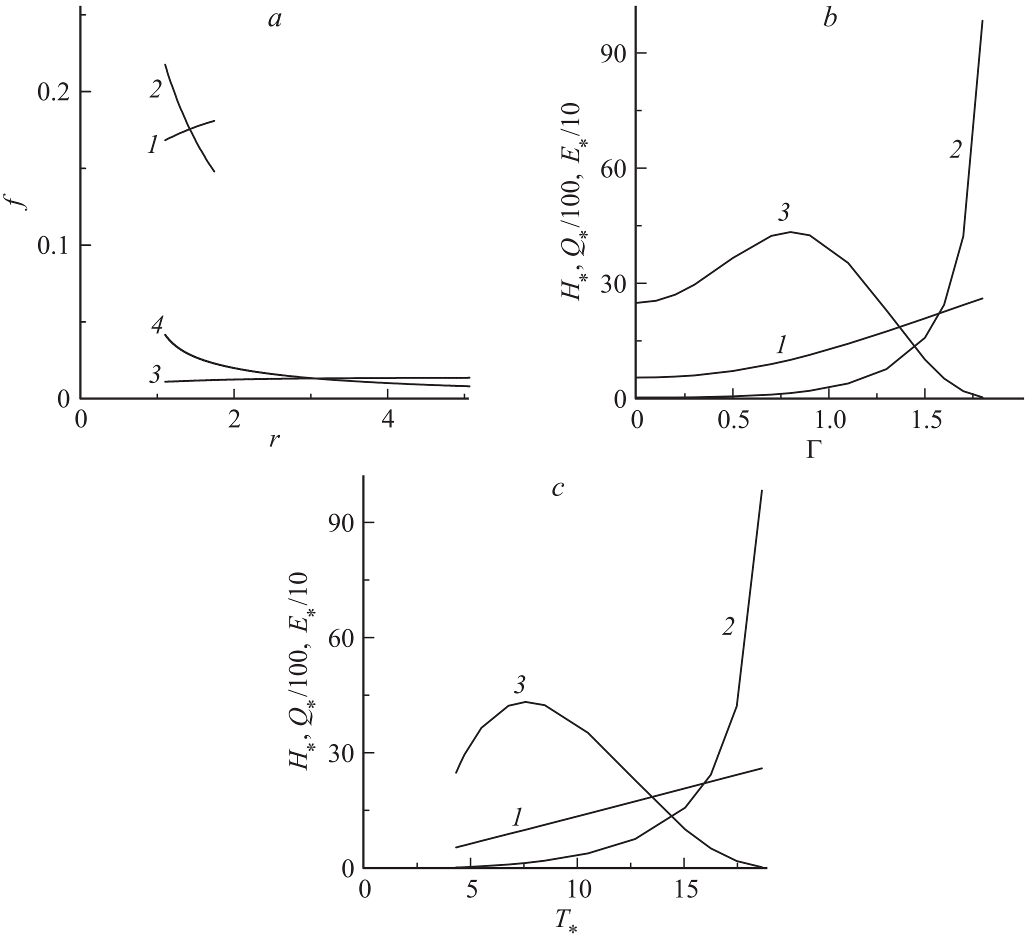

Рис. 6. a — интенсивность тепловыделения $f_Q(r)$ (*1, 3*) и $f_E(r)$ (*2, 4*) при циркуляции $\Gamma = 0$ (*1, 2*) и $\Gamma = 1.1$ (*3, 4*); b — зависимости полной энтальпии H_* (*1*, $\Phi_Q = \Phi_E = H_*$), энергетических параметров Q_* (*2*) и E_* (*3*) от циркуляции Γ; c — связь H_*, Q_* и E_* с температурой T_*; $r_b = 1.1$, $\gamma_0 = 1.4$, $T_0 = 1000\,\mathrm{K}$.

Сравнение модели настоящей работы со стандартной моделью воздуха [28] в сечениях r_*, r_b, r_m показало соответствие с относительной погрешностью $\Delta\gamma/\gamma_{\text{stand}} \sim 10^{-4}$, термического уравнения состояния $p(\rho, T)$ с погрешностью $\Delta p/p_{\text{stand}} \sim 10^{-3}$, теплоемкости при постоянном давлении — $\Delta C_p/C_{p,\text{stand}} \sim 10^{-3}$ при $T_0 \le 850\,\mathrm{K}$ (для последней в сечении r_b — до 1.66%). При $T_0 \approx 1000\,\mathrm{K}$ в критических сечениях r_* погрешность составила $\Delta\gamma/\gamma_{\text{stand}} \sim 10^{-4}$, $\Delta p/p_{\text{stand}} \sim 10^{-3}$, $\Delta C_p/C_{p,\text{stand}} \sim 10^{-3}$; в сечениях r_b, r_m максимальная погрешность достигает 1.8%.

В частных случаях возможны упрощения при вычислении искомых параметров.

Варианты $T_m = 1$ и $T_b = 1$

При $T_m = 1$ имеем $h_{\varepsilon,m} = 0$, плотность $\rho_m = 1$, давление $p_m = 1$ и функция $\psi_m = 1$, $\gamma_m = \gamma_0$. Условие минимума $dr/dT = 0$ при координате $r_m = 1$ эквивалентно равенству радиального числа Маха единице, следовательно, радиальная скорость u_m равна скорости звука $u_m = c_m = \sqrt{[(\gamma_0 - 1)/2]}$. Расход (отметим его индексом „1“ в этом частном примере) равен $m_1 = u_m = \sqrt{[(\gamma_0 - 1)/2]}$ и фиксирован, только при таком расходе получим $T_m = 1$. Из уравнения сохранения энергии (27) находим циркуляцию $\Gamma_1 = \sqrt{[H_{00} - (\gamma_0 + 1)/2]}$. Следовательно, минимальная энтальпия $H_{00,\min}$, которой соответствует $T_m = 1$, будет при $\Gamma_1 = 0$ и равна $H_{00,\min} = (\gamma_0 + 1)/2$. Полная скорость равна

$$V_m = \sqrt{(\Gamma_1^2 + m_1^2)} = \sqrt{(H_{00} - 1)},$$

полное число Маха

$$M_m = \sqrt{[2(\Gamma_1^2 + m_1^2)/(\gamma_0 - 1)]} = \sqrt{[2(H_{00} - 1)/(\gamma_0 - 1)]}.$$

При $T_b = 1$ приняли $h_{\varepsilon b} = 0$. Заметим, что в этом частном примере $T_m > 1$. Из уравнений (28), (29) следует, что $\rho_b = 1$, $p_b = 1$, $\psi_b = 1$, $\gamma_b = \gamma_0$, скорость звука $c_b = \sqrt{[(\gamma_0 - 1)/2]}$. Из уравнения сохранения энергии (27) находим полную скорость $V_b = \sqrt{(H_{00} - 1)}$. Напомним, что в зоне энергоподвода при изобарическом нагреве постоянной остается также и полная скорость. Из решения (30) находим координату входа в зону нагрева: $r_b = \sqrt{[(\Gamma^2 + m^2)/(H_{00} - 1)]}$.

Например, при $\Gamma = 0$ и $T_0 = 400, 500, 600, 750\,\mathrm{K}$ находим безразмерный расход $m \approx 0.696$, 1.379, 2.454, 5.191, полная энтальпия $H_{00} \approx 1.390$, 1.744, 2.104, 2.659, координата начала зоны энергоподвода $r_b \approx 1.114$, 1.599, 2.336, 4.031.

Критические температура T_* и координата r_* равны, согласно (21), (22): $T_* = 2\gamma_0(H_{00} - 1)/(\gamma_0 - 1)/\gamma_* \approx \approx 1.984$, 3.922, 5.914, 8.964, $r_* = r_b T_* \approx 2.209$, 6.272, 13.81, 36.13, величина $\gamma_* \approx 1.380$, 1.363, 1.349, 1.334.

Заключение

1. В реальном газе с учетом зависимости теплоемкости от температуры теплоподвод при постоянном давлении в режиме I истечения вихреисточника в вакуум описывается аналитическим решением для функций скорости, плотности, температуры, чисел Маха.

2. При невысоких температурах торможения $T_0 \le 300\,\mathrm{K}$ неидеальность (несовершенство) газа слабо влияет на функции распределения источников тепла, которые специально подобраны для поддержания давления постоянным. Без теплоподвода связь давления с плотностью удобно нормировать на бесконечности, где она близка к изэнтропической.

3. При температуре T_0 порядка 1000 K предлагается нормировка в сечении r_n, с условиями, близкими к нормальным T_{n0}, p_{n0} (или известным из эксперимента, включая аналог изэнтропического соотношения между давлением и плотностью $p/p_{n0} \approx (\rho/\rho_{n0})^{\gamma 0}$), расположенном в произвольном сечении ($T_n < T_m, T_n > T_m$), включая минимальное $r_n = r_m = 1 = T_n = T_m$.

4. В рассмотренном диапазоне температур торможения $T_0 \approx 288-1000\,\mathrm{K}$ максимальный расход m увеличивается более чем в 60 раз (от 0.2588 до 15.63), температура в минимальном сечении T_m — в 3 раза, критическая температура T_* — почти в 4 раза при нулевой циркуляции $\Gamma = 0$.

5. Максимальная циркуляция $\Gamma_{\max} = \sqrt{H_{00}}$ увеличивается почти вдвое (от 1 до 1.93), рост циркуляции приводит к росту критической температуры T_* в несколько раз и координаты r_* в десятки раз. Температуры T_m (в минимальном сечении) и T_b (в начале зоны) убывают до нуля.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы № П-09 президиума РАН.

Приложение

Предполагается, что характерное аэродинамическое время существенно превышает время релаксации колебательных степеней свободы молекул воздуха (азота и кислорода). По определению [17,27] энтропия S — одна из термодинамических характеристик газа, в случае зависимости теплоемкостей при постоянном давлении и объеме C_p, C_v от T связана с другими характеристиками ρ, p и T соотношением (все в физических переменных):

$$dS = \frac{C_v dT + pd(1/\rho)}{T} = \frac{R}{\mu(\gamma_0 - 1)} \left\{ d\left[\ln\left(\frac{p}{\rho^{\gamma_0}}\right)\right] + (\gamma_0 - 1)\,\frac{X_T dT}{T} \right\}. \quad (\Pi1)$$

С другой стороны, из (2) и (4) в отсутствие теплоподвода при $f = 0$ имеем

$$VdV + \frac{1}{\rho}\,dp = 0 \text{ и } VdV + dh = 0. \quad (\Pi2)$$

Следовательно,

$$dh = \frac{1}{\rho}\,dp \text{ или } C_v dT + \frac{R}{\mu}\,dT = \frac{1}{\rho}\,dp. \quad (\Pi3)$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона (8) в виде $dT/T = dp/p = d\rho/\rho$, подставим dT во второе слагаемое в левой части, найдем

$$C_v dT + pd(1/\rho) = 0. \quad (\Pi4)$$

Приращение энтропии dS равно нулю, энтропия сохраняется в отсутствие источников тепла, причем этот вывод справедлив и для течения за зоной энергоподвода.

Список литературы

[1] *Третьяков П.К., Грачев Г.Н., Иванченко А.И., Крайнев В.Л., Пономаренко А.Г., Тищенко В.Н.* // ДАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 466–467.
[2] *Борзов В.Ю., Михайлов В.М., Рыбка И.В., Савищенко Н.П., Юрьев А.С.* // ИФЖ. 1994. Т. 66. № 5. С. 515–520.
[3] *Miles R.B., Brown G.L., Lempert W.R., Yetter R., Williams G.J., Jr., Bogdonoff S.M., Natelson D., Guest J.R.* // AIAA J. 1995. Vol. 33. N 8. P. 1463–1470.
[4] *Chernyi G.G.* // AIAA Paper. 1999. N 99–4819.
[5] *Зудов В.Н., Третьяков П.К., Тупикин А.В., Яковлев В.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 140–153.
[6] *Громов В.Г., Ершов А.П., Левин В.А., Шибков В.М.* // ТВТ. 2006. Т. 44. № 2. С. 185–194.
[7] *Klimov A.I.* // Proc. of the 9$^{\text{th}}$ Int. Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 2010. P. 13–20.
[8] *Ефимов Б.Г., Иванов В.В., Иншаков С.И., Скворцов В.В., Стародубцев М.А.* // ТВТ. 2011. Т. 49. № 4. С. 497–504.
[9] *Пирогов С.Ю.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 4. С. 29–33.
[10] *Kogan M.N., Kucherov A.N.*// Proc. of the 9$^{\text{th}}$ Int. Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 2010. P. 59–69.
[11] *Абрамович Г.Н.* // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 7. С. 579–581.
[12] *Вулис Л.А.* // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 8. С. 669–672.
[13] *Кучеров А.Н.* // ИФЖ. 2010. Т. 83. № 5. С. 873–877.
[14] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 7. С. 35–42.
[15] *Кучеров А.Н.* // Ученые записки ЦАГИ. 2012. Т. 43. № 2. С. 31–42.

[16] *Кучеров А.Н.* // Матер. XXIV Науч. техн. конф. по аэродинамике. Моск. обл. п. Володарского, Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского. 2013. С. 158.
[17] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Т. 5. М.: Наука, 1964. 568 с.
[18] *Гриффит В.Ц.* В кн.: Основные результаты экспериментов на ударных трубах / Под ред. Ферри. М.: Гос. изд. лит. по атомной науке и технике, 1963. С. 267.
[19] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 11. С. 30–37.
[20] *Кучеров А.Н.* // Материалы XXIII Науч. техн. конф. по аэродинамике. Моск. обл., п. Володарского, Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, 2012. С. 147–148. Препринт ЦАГИ № 159. М.: Изд. отд. ЦАГИ, 2012. 32 с.
[21] *Кучеров А.Н.* // ИФЖ. 2012. Т. 85. № 5. С. 1044–1055.
[22] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 7. С. 30–37.
[23] *Кучеров А.Н.* М.: Издат. отдел ЦАГИ, Препринт Центрального аэрогидродинамического ин-та № 157. 2009. 36 с. 24.
[24] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1006 с.
[25] Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
[26] *Глаголев Ю.А.* Справочник по физическим параметрам атмосферы. Л.: Гидрометеорологическое изд-во, 1970. 212 с.
[27] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
[28] Воздух жидкий и газообразный. Плотность, энтальпия и изобарная теплоемкость при температурах 70–1500 K и давлениях 0.1–100 MПа. ГСССД 8-79, с. 19–34. В сб.: Свойства материалов и веществ. Воздух и его основные компоненты. Вып. 2. Таблицы стандартных справочных данных. М.: Гос. ком. по управлению качеством продукции и стандартам, 1991. 128 с.