

## Модель коронного разряда с клиновидного электрода в режиме насыщения; точные решения

© Г.Ш. Болтачев,<sup>1</sup> Н.М. Зубарев,<sup>1,2</sup> О.В. Зубарева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт электрофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: nick@ier.uran.ru

(Поступило в Редакцию 20 июня 2013 г.)

Найдены аналитические решения для распределений потенциала электрического поля и плотности электрического заряда во внешней зоне стационарного униполярного коронного разряда с идеального клиновидного электрода в режиме ограничения тока объемным зарядом. Рассмотрено две ситуации — когда коронирует только ребро клина и когда коронирует вся его поверхность. В первом случае решения являются сшивкой точных цилиндрически-симметричных решений в области дрейфа и плоско-симметричных решений в области без объемного заряда. Во втором случае распределение поля вблизи острия оказывается самоподобным — инвариантным относительно растяжений в плоскости поперечного сечения клина с центром в его вершине. Для обеих моделей получены зависимости тока насыщения, приходящегося на единицу длины ребра клина, от угла раствора и приложенной разности потенциалов.

### Введение

Как известно [1,2], коронный разряд зажигается в резко неоднородном электрическом поле вблизи электродов с малым радиусом кривизны. Его особенностью является значительное влияние объемного заряда ионов, движущихся от узкой зоны ионизации вблизи активного электрода (в ней нейтральные частицы газа ионизируются электронными лавинами) к противоэлектроду. Объемный заряд сдерживает развитие процессов ионизации, экранируя поле у коронирующего электрода.

При постоянной подвижности ионов распределение потенциала электрического поля  $\Phi$  во внешней зоне стационарного униполярного коронного разряда (т.е. вне зоны ионизации) задается нелинейным уравнением

$$\nabla(\nabla^2\Phi\nabla\Phi) = 0 \quad (1)$$

(см., например, работы [3,4]). Если пренебрегать толщиной зоны ионизации по сравнению с размером внешней зоны, то при анализе предельного случая, когда ток разряда ограничен объемным электрическим зарядом, обычно используется условие формального обращения в нуль напряженности поля на поверхности активного электрода.

Уравнение (1) может быть решено аналитически в одномерных случаях со сферической, цилиндрической и плоской симметрией [5]; ряд нетривиальных точных решений был найден в работах [3,6,7]. Имеется множество работ (см., например, [4,8] и ссылки там), где в рамках уравнения (1) рассматривался коронный разряд с иглы (это соответствует осевой симметрии задачи). Помимо этой традиционной ситуации значительное внимание исследователей привлекало изучение разряда с

лезвия [9–11], что соответствует плоской симметрии задачи. Для формы лезвия в большинстве теоретических работ использовалась аппроксимация острия гиперболой.

В настоящей работе будут построены две аналитические модели коронного разряда в режиме насыщения с электрода, представляющего собой идеальный клин (т.е. радиус кривизны острия равен нулю). Для малого угла раствора клин превращается в бесконечно тонкое лезвие. Понятно, что подобная геометрия активного электрода является достаточно грубой идеализацией, однако, как известно [3], в режиме ограничения тока объемным электрическим зарядом именно заряд, а не детали геометрии вершины острия определяет распределение электрического поля в межэлектродном промежутке. Для первой модели считается, что зона ионизации — линейная: коронирует только ребро клина. Для второй модели коронируют также его грани.

Как правило, внешнюю зону коронного разряда с острий можно разделить на две области: область дрейфа, где имеется объемный заряд, и периферийная область, где заряды отсутствуют (линии электрического поля, относящиеся к этой области, начинаются вне зоны ионизации). В ситуации, когда коронирует только ребро клина, это обстоятельство становится принципиальным при построении модели. Решения, которые будут получены в разд. 3, являются сшивкой двух точных решений: цилиндрически-симметричного в области дрейфа и плоско-симметричного на периферии. Для второго рассматриваемого случая, когда вся поверхность электрода коронирует, объемный заряд занимает все пространство вне клина (соответствующая модель строится в разд. 4).

Для обеих моделей решения для потенциала электрического поля имеют вид

$$\Phi \propto A(\theta)r^\gamma, \quad (2)$$

где  $A$  — некоторая функция полярного угла  $\theta$ , а  $\gamma$  — показатель, определяющий характер зависимости поля от расстояния до ребра клина  $r$ . Подобное представление для потенциала поля вблизи клиновидного электрода ранее рассматривались в пионерской работе [3]. Соответствующие решения были построены численно. Отметим, что автор указанной работы не анализировал вырожденный случай, когда  $\gamma = 1$ . Именно этот случай, как будет показано ниже, дает семейство точных решений задачи, описывающее разряд с ребра клина. При отличных от нуля значениях  $\gamma$  будут получены аналитические решения для зависимости  $A(\theta)$ , согласующиеся с численными результатами [3]. Эти решения позволяют эффективно анализировать особенности коронного разряда с лезвия и, в частности, получить простые выражения для тока коронного разряда в режиме насыщения.

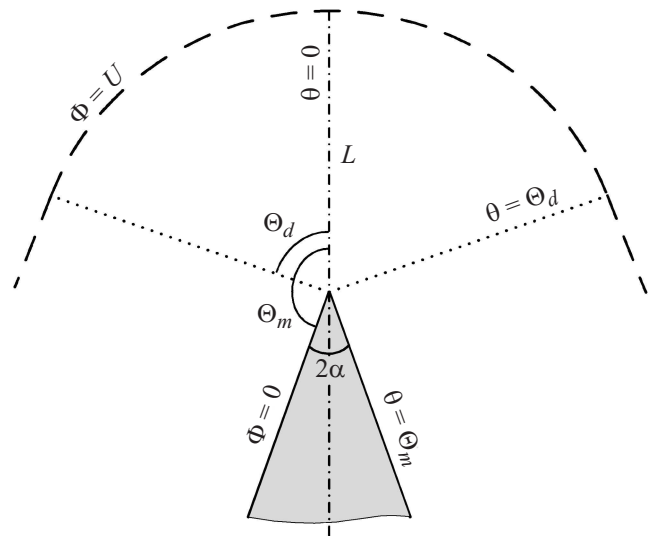
Отметим, что решения для потенциала в форме (2) также рассматривались в работе [12] применительно к анализу дальней асимптотики для дрейфового движения заряженных частиц в геометрии „провод–плоскость“. Сходные самоподобные зависимости для осевой симметрии задачи (переменные разделялись в сферических координатах) использовались в наших недавних работах [8,13], в которых электрод представлял собой идеальный конус и в случае бесконечно малого угла раствора конуса тонкую иглу.

Представление (2) для потенциала поля подразумевает, что задача инвариантна по отношению к сдвигу вдоль ребра клиновидного электрода. Вместе с тем для отрицательной короны с электродом в форме лезвия характерно наличие отдельных коронирующих точек. Однако в ситуации, когда характерное расстояние между этими точками намного меньше межэлектродного расстояния (при этом области объемных зарядов для отдельных коронирующих точек перекрываются), можно не учитывать подобное нарушение симметрии при построении модели. По этой же причине полученные в настоящей работе результаты могут быть применены к описанию коронного разряда в системе с однорядным многоострийным электродом [14].

### 1. Исходные уравнения

Рассмотрим влияние объемного электрического заряда на стационарное дрейфовое движение заряженных частиц во внешней зоне униполярного коронного разряда. Распределение потенциала электрического поля  $\Phi$  описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon, \quad (3)$$



**Рис. 1.** Схематически изображена геометрия задачи. Активный электрод представляет собой клин с углом полураствора  $\alpha$ . Для модели, развиваемой в разд. 3, заряд дрейфует от ребра клина в двухгранный угол  $-\Theta_d < \theta < \Theta_d$ . Для модели из разд. 4 коронируют грани клина  $\theta = \pm\Theta_m$ .

где  $\rho$  — плотность заряда,  $\epsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Скорость дрейфа носителей заряда ( $\mathbf{v}$ ) прямо пропорциональна напряженности электрического поля ( $\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi$ ):  $\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$ , где  $\mu$  — подвижность, которую мы будем считать постоянной. Для стационарного потока заряженных частиц уравнение непрерывности имеет вид  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , где  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$  — плотность электрического тока. Выражая скорость частиц через потенциал поля, его можно переписать в виде

$$\nabla(\rho\nabla\Phi) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что если из уравнений (3) и (4) исключить плотность заряда  $\rho$ , то мы получим ранее обсуждавшееся нелинейное уравнение (1).

Пусть активный электрод представляет собой клин с углом полураствора  $\alpha$  (рис. 1). Считаем, что задача инвариантна по отношению к сдвигу вдоль его ребра. Тогда уравнения (3) и (4) удобно рассматривать в плоскости поперечного сечения клина в полярных координатах: все величины зависят только от расстояния от ребра клина  $r$  и полярного угла  $\theta$ . Угол отсчитывается от плоскости симметрии задачи, определяемой соответственно условиями  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Положим, что на гранях клина  $\theta = \pm\Theta_m$ , где  $\Theta_m \equiv \pi - \alpha$ . В полярных координатах функции  $\Phi$  и  $\rho$  задаются уравнениями

$$\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + r^{-2}\Phi_{\theta\theta} = -\rho/\epsilon, \quad (5)$$

$$\rho_r\Phi_r + r^{-2}\rho_\theta\Phi_\theta + \rho(\Phi_{rr} + r^{-1}\Phi_r + r^{-2}\Phi_{\theta\theta}) = 0. \quad (6)$$

Они должны удовлетворять условиям симметрии:  $\Phi(r, \theta) = \Phi(r, -\theta)$  и  $\rho(r, \theta) = \rho(r, -\theta)$ . Считаем, что потенциал активного электрода равен нулю:  $\Phi(r, \Theta_m) = 0$ .

В случае, если коронируют грани клина (разд. 4), то для режима насыщения на них должно выполняться условие полной экранировки поля,  $\Phi_\theta(r, \Theta_m) = 0$ . Если коронирует только ребро клина (разд. 3), то область над клином разделится на две подобласти: область дрейфа, в которой имеется объемный электрический заряд, и периферийная область, где заряд отсутствует. Вектор напряженности электрического поля должен быть направлен по касательной к границе этих областей, а потенциал электрического поля — непрерывен.

## 2. Редуцированные уравнения

Уравнения в частных производных (5) и (6), а также соответствующие им граничные условия на гранях клина, инвариантны относительно растяжений с центром в вершине клина:

$$\Phi \rightarrow s^\gamma \Phi, \quad \rho \rightarrow s^{\gamma-2} \rho, \quad r \rightarrow sr,$$

где  $\gamma$  и  $s$  — некоторые константы. Это означает, что решения исходных уравнений в окрестности острия можно искать в виде (см. также (2))

$$\Phi(r, \theta) = UA(\theta)(r/L)^\gamma, \quad (7)$$

$$\rho(r, \theta) = -\varepsilon UL^{-2} B(\theta)(r/L)^{\gamma-2}, \quad (8)$$

где  $A$  и  $B$  — безразмерные функции полярного угла,  $L$  — характерный пространственный масштаб задачи (межэлектродное расстояние),  $U$  — потенциал поля на расстоянии  $L$  от вершины конуса (приложенная разность потенциалов). Для  $A$  должно выполняться условие нормировки:  $A(0) = 1$ . Вектор плотности электрического тока для подстановки (7) и (8) записывается покомпонентно в виде

$$\mathbf{j} = \{j_1, j_2\} = \mu \varepsilon U^2 L^{-3} (r/L)^{2\gamma-3} \{\gamma BA, BA_\theta\}. \quad (9)$$

Представление решения в форме (7) и (8) соответствует разделению переменных в полярной (цилиндрической) системе координат. Распределения электрического поля и плотности заряда, описываемые этими выражениями, являются масштабно инвариантными (самоподобными) с показателем  $\gamma$ .

Подстановка (7) и (8) в уравнения (5) и (6) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета угловых распределений  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$  на интервале  $0 \leq \theta \leq \Theta_m$ :

$$\gamma^2 A + A_{\theta\theta} = B, \quad (10)$$

$$2\gamma(\gamma - 1)AB + A_\theta B_\theta + A_{\theta\theta} B = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения были впервые получены в работе [3]. Они были решены численно применительно к задаче о разряде с граней клина. В разд. 4 настоящей работы соответствующие решения будут построены и исследованы аналитически. В разд. 3 будет получен новый класс решений редуцированных уравнений (10) и (11), соответствующих ситуации, когда коронирует только ребро клина.

## 3. Коронный разряд с ребра клина

Обратим внимание, что в частном случае, когда  $\gamma = 1$  (аналогичный случай  $\gamma = 0$  описывает дальнюю асимптотику для распределения поля в системе электродов „лезвие—плоскость“ [9]), нелинейное уравнение (11) может быть один раз проинтегрировано, что приводит к выражению

$$BA_\theta = \text{const.}$$

Поскольку на плоскости симметрии  $\theta = 0$  напряженность электрического поля должна иметь только радиальную компоненту (т.е.  $A_\theta = 0$ ), то константу интегрирования следует положить равной нулю. Тогда редуцированное уравнение непрерывности (11) примет простой вид:  $BA_\theta = 0$ . Оно разделяется на две ветви:  $A_\theta = 0$  и  $B = 0$ . Как следствие, задача допускает два типа решений. С учетом уравнения (10) и нормировочного условия  $A(0) = 1$ , первое решение имеет простой вид

$$A = 1, \quad B = 1. \quad (12)$$

Оно описывает цилиндрически-симметричный дрейф заряженных частиц от ребра клиновидного электрода в двугранном угле  $-\Theta_d \leq \theta \leq \Theta_d$ , где величина  $\Theta_d$  будет определена позже из условий на границах области дрейфа,  $\theta = \pm\Theta_d$  (рис. 1). Решение (12) естественным образом обеспечивает выполнение условий симметрии  $A_\theta(0) = 0$  и  $B_\theta(0) = 0$ , а также условия отсутствия потока через границу области дрейфа:  $A_\theta(\Theta_d) = 0$

Для второго типа решений, которые реализуются в диапазоне углов  $\Theta_d \leq \theta \leq \Theta_m$  (а также в зеркально симметричной области  $-\Theta_m \leq \theta \leq -\Theta_d$ ), объемный электрический заряд отсутствует ( $B = 0$ ), а распределение электрического поля определяется уравнением Лапласа, которое сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A + A_{\theta\theta} = 0.$$

Его решением, удовлетворяющим условию  $A(\Theta_m) = 0$  на грани клина, будет

$$A = A_d \sin(\Theta_m - \theta), \quad (13)$$

где  $A_d$  — некоторая константа.

Потребуем выполнения условий непрерывности обеих компонент (радиальной и угловой) электрического поля на границе области дрейфа. С учетом решений (12) эти условия соответствуют тому, что  $A(\Theta_d) = 1$  и  $A_\theta(\Theta_d) = 0$ . При подстановке сюда выражения (13) находим для входящих в решение постоянных:

$$\Theta_d = \Theta_m - \pi/2, \quad A_d = 1.$$

Это, в частности, означает, что на границе области дрейфа ионы двигаются под прямым углом к граням клина. Зависимость угла раствора области дрейфа от угла раствора клина будет линейной:  $\Theta_d = \pi/2 - \alpha$ .

Примечательно, что при  $\alpha \rightarrow 0$  будет  $\Theta_d \rightarrow \pi/2$ , т.е. в ситуации, когда электродом является тонкое лезвие, область дрейфа представляет собой полупространство. При  $\alpha = \pi/2$  клин превращается в плоскость, т.е. острие исчезает. При этом исчезает и область дрейфа ( $\Theta_d = 0$ ). Это означает, что для найденных решений коронный разряд не горит в отсутствие острия.

Итак точными решениями для распределений потенциала электрического поля и плотности электрического заряда являются:

$$\Phi = \begin{cases} UL^{-1}r, & 0 \leq |\theta| < \Theta_d, \\ UL^{-1}r \sin(\alpha + \theta), & \Theta_d \leq |\theta| \leq \Theta_m, \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} -\varepsilon UL^{-1}r^{-1}, & 0 \leq |\theta| \leq \Theta_d, \\ 0, & \Theta_d \leq |\theta| \leq \Theta_m. \end{cases}$$

Следует отметить, что эти решения по структуре аналогичны решениям, полученным в работе [15] для потока микрокапель, эмитируемых с вершины конуса Тейлора. Соответствующие решения являлись шивкой сферически-симметричных решений в конической области дрейфового движения заряженных капель в окружающем газе и самоподобных решений в периферийной области без объемного заряда.

Напомним, что найденное в разд. 3 семейство решений соответствует показателю  $\gamma = 1$  в рамках подстановки (7) и (8). Это, в частности, означает, что в напряженность электрического поля в области дрейфа, имеющая лишь радиальную компоненту, не зависит от радиуса:  $\mathbf{E} = -\{U/L, 0\}$ . Как следствие, ее абсолютное значение равно  $U/L$  всюду в области углов  $0 \leq |\theta| < \Theta_d$ , в том числе и на ребре клина, т.е. при  $r \rightarrow 0$ . Обсудим, как это сочетается с тем, что мы рассматриваем режим ограничения тока пространственным зарядом. При наличии протяженной коронирующей области этот режим соответствует обращению в нуль напряженности поля на активном электроде за счет его полной экранировки объемным зарядом. Для рассматриваемых нами решений отличие значения напряженности поля от нуля связано с особенностью геометрии задачи — с тем обстоятельством, что коронирующая область (ребро клина) является линейной. Действительно, точным решением для осесимметричного распределения электрического поля в режиме насыщения вокруг цилиндрического активного электрода радиуса  $r_0$  является [5]:  $E \propto (1 - r_0^2/r^2)^{1/2}$ . При  $r_0 \rightarrow 0$ , т.е. применительно к настоящей работе, при условии малости радиуса кривизны вершины клиновидного электрода и поперечного размера зоны ионизации по сравнению с межэлектродным расстоянием, эта зависимость переходит в используемую нами в области дрейфа. Таким образом, найденное семейство точных решений соответствует режиму ограничения тока объемным электрическим зарядом.

Определим теперь для полученных решений величину тока коронного разряда, приходящуюся на единицу длины ребра клина ( $I_l$ ). Она будет прямо пропорциональна

величине двугранного угла ( $2\Theta_d$ ), соответствующего области дрейфа. Плотность тока имеет лишь радиальную компоненту. Для нее в соответствии с (9) имеем

$$j_1(r) = \mu\varepsilon U^2 L^{-2} r^{-1}.$$

Тогда ток насыщения коронного разряда с ребра клина будет задаваться выражением

$$I_l = 2\Theta_d r j_1(r) = (\pi - 2\alpha)\mu\varepsilon L^{-2} U^2. \quad (14)$$

Из него видно, что при фиксированной разности потенциалов  $U$  величина тока линейно нарастает при заострении клина, это обусловлено увеличением углового размера области дрейфа. Для наиболее важного случая, когда активный электрод представляет собой тонкое лезвие ( $\alpha \rightarrow 0$ ), получим:  $I_l = \pi\mu\varepsilon L^{-2} U^2$ . В тривиальном случае плоского электрода ( $\alpha = \pi/2$ ) ток обращается в нуль:  $I_l = 0$ . При фиксированном угле раствора клина реализуется квадратичная зависимость тока от приложенной разности потенциалов, характерная для коронного разряда в режиме насыщения:  $I_l \propto U^2$  (см., например, [4]).

Рассматривая распределения потенциала электрического поля и плотности заряда вблизи коронирующего клиновидного электрода, мы не задавали геометрию пассивного электрода. Формально за противозлектрод можно принять любую эквипотенциальную поверхность, в частности, поверхность  $\Phi(r, \theta) = U$ . В таком случае в области углов  $-\Theta_d \leq \theta \leq \Theta_d$  он будет иметь цилиндрическую форму с радиусом  $L$ . Полуцилиндрическая форма некоронирующего электрода использовалась, например, в экспериментальной работе [14]. В ней указывалось, что подобная геометрия пассивного электрода имеет преимущества по сравнению с плоской: она позволяет увеличить предельный ток отрицательной короны более чем в полтора раза.

В заключение раздела отметим, что полученные решения будут справедливы вблизи ребра клина при любой геометрии пассивного электрода; фактически, они будут задавать асимптотику при  $r \ll L$ .

#### 4. Коронный разряд с граней клина

Рассмотрим возможность построения аналитических решений уравнений (10) и (11), описывающих угловые распределения потенциала электрического поля и плотности заряда, применительно к модельной ситуации, когда коронирует вся поверхность клиновидного электрода (численно решения этой задачи строились в работе [3]). В режиме насыщения это означает, что решения уравнений должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$A(0) = 1, \quad A(\Theta_m) = A_\theta(\Theta_m) = A_\theta(0) = B_\theta(0) = 0.$$

На поверхности клина скорость ионов равна нулю. Тогда в соответствии с уравнением непрерывности (11)

$V \rightarrow \infty$  при  $\theta \rightarrow \Theta_m$ , т.е. в решениях уравнений имеется сингулярность (см. также [9]).

Система уравнений (10) и (11) допускает точное решение для  $\Theta_m = \pi/2$ , что формально соответствует разряду с плоского электрода, т.е. фактически одномерному случаю [5]. В этой ситуации будет  $\gamma = 3/2$ , а угловые зависимости потенциала поля и плотности электрического заряда даются выражениями

$$A(\theta) = \cos^{3/2}(\theta), \quad B(\theta) = (3/4) \cos^{-1/2}(\theta). \quad (15)$$

Из вида этого известного частного решения становится ясно, что приближенное аналитическое решение уравнений (10) и (11) удобно искать в виде рядов

$$A = a_0 \xi^{3/2} \left( 1 + \sum_{n=1} a_n \xi^2 \right),$$

$$B = \frac{3a_0 \lambda^2}{4} \xi^{-1/2} \left( 1 + \sum_{n=1} b_n \xi^2 \right), \quad (16)$$

где  $\xi = \cos(\lambda\theta)$ ,  $\lambda = \pi/(2\Theta_m) = \pi/(2\pi - 2\alpha)$ . Для выполнения нормировочного условия  $A(0) = 1$  для коэффициентов первого ряда должно быть

$$a_0^{-1} = 1 + \sum_{n=1} a_n.$$

Преимущество разложений (16) по вспомогательной переменной  $\xi$ , в отличие от разложений непосредственно по углу  $\theta$ , заключается в том, что для них функции  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$  будут автоматически удовлетворять всем требуемым условиям на обоих концах интересующего нас интервала, т.е. при  $\theta = 0$  и  $\theta = \Theta_m$ . Ряды (16) замечательны еще и тем, что в частном случае, когда  $\Theta_m = \pi/2$ , все их члены кроме первых обращаются в нуль, т.е.  $a_n = b_n = 0$  при  $n \geq 1$ . При этом выражения (16) переходят в точное решение (15). Все это обуславливает быструю сходимость рядов на отрезке  $0 \leq \theta \leq \Theta_m$ . Уже несколько первых членов рядов по  $\xi$  обеспечивают достаточно хорошую аппроксимацию решений, что дает возможность использовать соответствующие аналитические выражения вместо результатов численных расчетов.

Так, на основе разложений (16), где оставлены только два члена ряда для  $A$  и три члена для  $B$ , можно получить следующее приближенное решение задачи:

$$A(\theta) \approx a_0 [\cos^{3/2}(\lambda\theta) + a_1 \cos^{7/2}(\lambda\theta)], \quad (17)$$

$$B(\theta) \approx (3a_0 \lambda^2 / 4) [\cos^{-1/2}(\lambda\theta) + b_1 \cos^{3/2}(\lambda\theta) + b_2 \cos^{7/2}(\lambda\theta)], \quad (18)$$

где коэффициенты рядов задаются формулами

$$a_0 = (1 + a_1)^{-1}, \quad a_1 = \frac{21\lambda^2 - 12\gamma^2 + 4\gamma}{84\lambda^2},$$

$$b_1 = -\frac{12\gamma^2 + 3\lambda^2 - 20\gamma}{36\lambda^2}, \quad b_2 = \frac{a_1(4\gamma^2 - 49\lambda^2)}{3\lambda^2}.$$

Зависимость между показателем  $\gamma$  и параметром  $\lambda$ , который связан с углом полураствора  $\alpha$ , задается уравнением

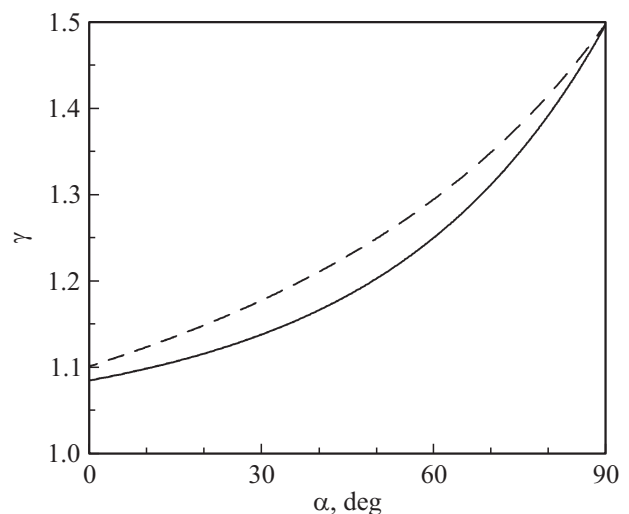
$$399\lambda^{23} = 28\gamma(9\gamma - 8) + 4\gamma \sqrt{2772\gamma^2 - 5460\gamma + 2737}. \quad (19)$$

Отметим, что выражения (17) и (18) удовлетворяют всем необходимым граничным условиям; они дают точное решение уравнения (10) во всем интервале  $0 \leq \theta \leq \Theta_m$ , асимптотическое решение уравнения (11) в пределе  $\theta \rightarrow \Theta_m$ , где возникает сингулярность, а также его решение в точке  $\theta = 0$ .

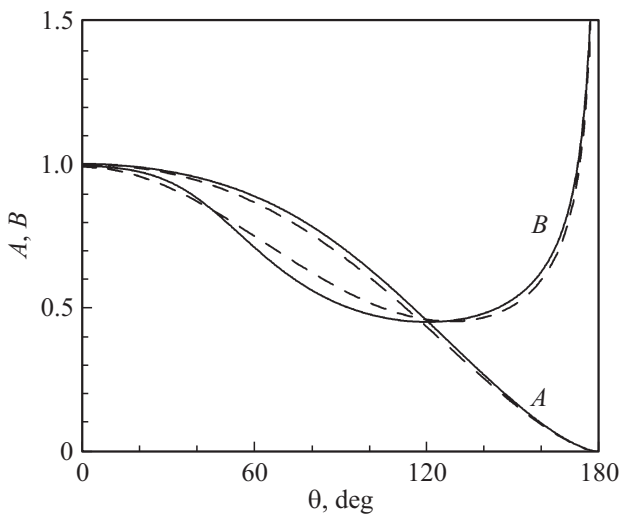
Соответствующая формуле (19) зависимость показателя  $\gamma$  от угла полураствора  $\alpha$  приведена на рис. 2. Там же для сравнения приведена эта зависимость, полученная численно. Видно, что аналитическая модель хорошо согласуется с результатами расчетов.

Как уже указывалось, выражения (17) и (18) дают точное решение задачи в тривиальном случае, когда  $\alpha = -\pi/2$  и активный электрод — плоский. При уменьшении угла полураствора  $\alpha$  точность аппроксимации уменьшается. На рис. 3 приведены угловые зависимости амплитуд  $A$  и  $B$  (как аналитические, так и полученные численно), соответствующие случаю, когда коронирующий электрод представляет собой бесконечно тонкое лезвие ( $\alpha = 0$ ). Из него видно, что аналитические формулы (17) и (18) дают приемлемое качество аппроксимации, что позволяет применять их для моделирования коронарного разряда с клиновидного острия.

Отметим, что решения (17) и (18) для лезвия (рис. 3) проявляют отдельные черты точного решения (12) и (13) для модели из разд. 3. Так, значение функции  $B$  в точке  $\theta = 0$  оказывается близким к единице, как и для решения (12), а при  $0 < \theta < \pi$  эта функция демонстрирует характерное немонотонное поведение, которое не наблюдается при больших углах раствора. Это сходство,



**Рис. 2.** Показатель  $\gamma$  в зависимости от угла полураствора  $\alpha$ . Штриховая линия — аналитическое решение (19); сплошная — численный расчет.



**Рис. 3.** Угловые зависимости потенциала электрического поля  $A(\theta)$  и плотности заряда  $B(\theta)$  для предела  $\alpha \rightarrow 0$ , соответствующего ситуации, когда активный электрод представляет собой тонкое лезвие. Штриховые линии — аналитическая модель (17) и (18), сплошные линии — численный расчет.

отчасти, обусловлено близостью значений показателя  $\gamma$  для обеих моделей ( $\gamma = 1$  и  $\gamma \approx 1.1$  соответственно).

Рассчитаем теперь величину тока коронного разряда, соответствующую решениям (7), (8), (17) и (18). Для рассматриваемой в разд. 4 аналитической модели вся поверхность клина коронирует. В реальной ситуации коронировать будет лишь ограниченная область вблизи его ребра. Будем считать, что зона ионизации имеет конечный поперечный размер  $H$ , т.е. она ограничивается интервалом  $0 \leq r \leq H$  (естественно считать, что  $H$  много меньше  $L$ ).

На гранях клиновидного электрода вектор плотности электрического тока имеет лишь нормальную (т.е. угловую) компоненту. Согласно (9), она задается выражением

$$j_2(r) = \mu\epsilon U^2 L^{-2\gamma} r^{2\gamma-3} (BA_\theta)|_{\theta=\theta_m}.$$

Интегрируя плотность тока по отрезку  $0 \leq r \leq H$ , находим для предельного тока, приходящегося на единицу длины ребра клина:

$$\begin{aligned} I_l &= -2 \int_0^H j_2(r) dr \\ &= -(\gamma - 1)^{-1} \mu\epsilon U^2 L^{-2\gamma} H^{2\gamma-2} (BA_\theta)|_{\theta=\theta_m}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда модельные угловые распределения потенциала поля и плотности заряда, окончательно получим

$$I_l = \frac{9\lambda^3 a_0^2 \mu\epsilon}{8(\gamma - 1)} L^{-2\gamma} H^{2\gamma-2} U^2. \quad (20)$$

В частности, для тонкого лезвия ( $\alpha = 0$ ), что соответствует  $\lambda = 1/2$ , для параметров решения будет  $\gamma \approx 1.1$

и  $a_0 \approx 1.3$ . Тогда для линейного тока находим

$$I_l \approx 2.4 \mu\epsilon (H/L)^{0.2} L^{-2} U^2.$$

Отметим, что если в этом выражении формально положить  $H = L$ , то оно окажется близким к аналогичному выражению из разд. 3. Для плоского активного электрода ( $\alpha = \pi/2$ ) получим  $I_l = (9/4) \mu\epsilon L^{-2} U^2$ , что совпадает с известным законом Мотта для тока, ограниченного пространственным зарядом инжектированных носителей тока в полупроводниках.

Согласно (20), ток разряда, как и для рассмотренной в предыдущем разделе модели, пропорционален квадрату приложенной разности потенциалов  $I_l \propto U^2$ . При фиксированном  $U$  ток коронного разряда нарастает при заострении клина, но характер зависимости тока от угла раствора клина будет несколько отличным от задаваемого выражением (14). В основном влияние на величину тока будет оказывать множитель  $(H/L)^{2\gamma-2}$ , монотонно растущий при уменьшении угла  $\alpha$ . Примечательно, что ток  $I_l$  не обращается в нуль при  $\alpha = \pi/2$ , как это было для модели из разд. 3, в которой коронировало только ребро клиновидного электрода.

## Заключение

В настоящей работе исследовался стационарный униполярный коронный разряд с клиновидного электрода в режиме ограничения тока объемным зарядом. Использовался подход, основанный на редукции исходных уравнений в частных производных, описывающих дрейф ионов во внешней зоне разряда, к обыкновенным дифференциальным уравнениям на угловые распределения потенциала электрического поля и плотности заряда вблизи особенности — ребра клина.

Были предложены две аналитические модели разряда. Для первой модели считалось, что коронирует только острие — ребро клина. В этой ситуации удалось найти точные решения задачи, основанные на сшивке цилиндрически-симметричного решения для потенциала поля в области дрейфа и плоско-симметричного решения на периферии. Вторая модель предполагала, что коронирует вся поверхность клина, т.е. не только его ребро, но и грани. В ее рамках были получены приближенные аналитические решения, с достаточной точностью описывающие распределение поля вблизи острия. Для обоих случаев получены аналитические выражения для тока разряда как функции угла раствора клина и приложенной разности потенциалов.

Наибольший интерес для приложений представляет случай, когда угол раствора клина мал, и активный электрод принимает форму тонкого лезвия. Для него показано, что если коронирует только ребро клина, то область дрейфа занимает полупространство. В обеих предложенных моделях абсолютное значение напряженности электрического поля слабо меняется с удалением от особенности. Для точных решений из разд. 3 будет

$\gamma = 1$ , что соответствует постоянной напряженности поля. Согласно модели из разд. 4, имеем  $\gamma \approx 1.101$  (численные расчеты дают  $\gamma \approx 1.085$ ), т.е. электрическое поле будет медленно расти как  $r^{0.1}$ . Подобное поведение поля вблизи края лезвия характерно для коронного разряда в режиме насыщения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-08-00434 и 13-08-96010-р\_урал), а также УрО РАН в рамках программы Президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках“ (проект 12-П-2-1023).

## Список литературы

- [1] *Капцов Н.А.* Электрические явления в газах и вакууме. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 808 с.
- [2] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
- [3] *Felici N.J.* // Direct Current. 1963. Vol. 8. P. 252–260.
- [4] *Sigmond R.S.* // J. Electrostat. 1986. Vol. 18. P. 249–272.
- [5] *Budd C., Hare R.* // Proc. R. Soc. Lond. A 1993. Vol. 443. P. 517–546.
- [6] *Smith S.A.* // IMA J. Appl. Math. 1987. Vol. 39. P. 189–214.
- [7] *Budd C.J., Wheeler A.A.* // IMA J. Appl. Math. 1988. Vol. 40. P. 1–14.
- [8] *Болтачев Г.Ш., Зубарев Н.М.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 11. С. 28–37.
- [9] *Wintle H.J.* // IEEE Trans. Electr. Insul. 1986. Vol. 21. P. 365–373.
- [10] *Atten P., Coulomb J.-L., Khaddour B.* // IEEE Trans. Magn. 2005. Vol. 41. P. 1436–1439.
- [11] *Khaddour B., Atten P., Coulomb J.-L.* // IEEE Trans. Magn. 2007. Vol. 43. P. 1193–1196.
- [12] *Wintle H.J.* // IEEE Trans. Electr. Insul. 1992. Vol. 27. P. 298–308.
- [13] *Болтачев Г.Ш., Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 8. С. 26–31.
- [14] *Козлов Б.А., Соловьев В.И.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 1–7.
- [15] *De La Mora J.F.* // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 243. P. 561–574.