

## Неустойчивость сферической капли в поле электрического диполя

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Ширяев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 марта 2013 г.)

Аналитические расчеты показывают, что с увеличением степени неоднородности поля, в которое помещается первоначально сферическая незаряженная проводящая капли несжимаемой жидкости, увеличивается степень связности мод осцилляций капли и снижается порог устойчивости по отношению к давлению электрического поля. При повышении электростатическим параметром, характеризующим давление электростатического поля, значения, критического для реализации неустойчивости некой определенной моды, ее амплитуда последней начинает экспоненциально возрастать аperiодическим образом, одновременно колебательным образом растут и амплитуды связанных с ней мод, каждая со своим инкрементом неустойчивости. Во всех рассмотренных случаях имеется порог по безразмерному электрическому параметру, выше которого все моды осцилляций неустойчивы.

### Введение

Проблема исследования устойчивости капель в неоднородных электрических полях имеет давнюю историю и до сих пор неразрешена. С подобными объектами приходится сталкиваться и в теории грозowego электричества [1–2], и в практике электродиспергирования жидкости, имеющей приложения в академической науке при масс-спектрометрии нелетучих и термически нестабильных жидкостей органического происхождения, и в технике при распылении краски, горючего, и в технологии при распылении химикатов или инсектицидов [1–4]. Все дело в том, что во всех устройствах для электродиспергирования кроме собственно диспергирующих рабочие жидкости электрических полей имеются и поля, управляющие полетом полученных капель либо ускоряющие их. В работах прошлого века ставился вопрос о нахождении аналитических критериев неустойчивости заряженных капель и капель в однородных полях. И только в начале этого века появились экспериментальные работы по исследованию неустойчивости капель в неоднородных электростатических полях [5]. В настоящем исследовании аналитическими методами рассматривается вопрос о нарушении устойчивости поверхности сферической капли в неоднородном электростатическом поле диполя, плечо которого много меньше расстояния до капли и ее диаметра. Все рассуждения аналогичны тем, которые использовались при изучении устойчивости капли в неоднородном поле точечного заряда [6]. Ожидается, что увеличение степени неоднородности электростатического поля приведет к увеличению связности мод осцилляций капли и, как следствие, к реализации ее неустойчивости при меньших значениях полевого параметра, чем это было предсказано для однородного поля в [7].

1. Пусть в вакууме имеется сферическая, радиуса  $R$ , незаряженная капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости в вакууме с коэффициентом по-

верхностного натяжения свободной поверхности  $\sigma$  и массовой плотностью  $\rho$ , расположенная на расстоянии  $L$  от точечного диполя с дипольным моментом  $\mathbf{p}$ .

В рассмотрении ограничимся только осесимметричными колебаниями, что существенно снизит громоздкость задачи, практически не отражаясь на общности рассуждений. Задачу будем решать в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  с началом системы координат в центре масс капли. Ось, от которой отсчитывается угол  $\theta$ , будем принимать проходящей через ось диполя и центр масс капли и направлений от диполя. Форму капли представим в виде суперпозиции ее равновесной формы  $r = r(\theta)$  и малого возмущения  $\xi(\theta, t)$ :

$$r = r(\theta) + \xi(\theta); \quad |\xi(\theta, t)| \ll \min r(\theta).$$

Математическая формулировка задачи состоит из основных уравнений гидродинамики и уравнений, определяющих распределение электрического поля в предположении о его квазистационарности, т.е. гидродинамические скорости малы по сравнению со скоростью распространения электромагнитного сигнала:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mathbf{F}_{\text{in}}}{\rho}; \quad \text{div} \mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi,$$

где  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  — скорость волнового движения жидкости в капле,  $P$  — давление в жидкости,  $\mathbf{F}_{\text{in}}$  — сила инерции, действующая на единицу объема, которая возникает вследствие ускоренного движения центра масс капли при ее втягивании (в силу поляризации) в область большей неоднородности электрического поля,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — вектор напряженности и потенциал электростатического поля.

Систему уравнений дополним условием ограниченности скорости в центре масс капли и условием стремления электростатического потенциала по мере удаления от поверхности капли к электрическому потенциалу

диполя

$$r = 0: \quad |\mathbf{V}| < \infty,$$

$$1 \ll r \ll L: \quad \Phi \rightarrow \Phi_{\text{ex}},$$

$$\Phi_{\text{ex}} \equiv \frac{P}{(L^2 + r^2 + 2Lr\mu)}, \quad \mu \equiv \cos \theta.$$

На поверхности капли сформируем гидродинамические граничные условия и условие эквипотенциальности поверхности

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad P - P_{\text{atm}} + P_E = P_\sigma,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla)F = 0, \quad \Phi = \text{const},$$

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t) = 0,$$

где давление электростатического поля  $P_E(\mathbf{r}, t)$  и капиллярное давление  $P_\sigma(\mathbf{r}, t)$  выражаются формулами

$$P_E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^2/8\pi, \quad P_\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma \text{divn},$$

а единичная нормаль к возмущенной поверхности капли  $\mathbf{n}$  определяется следующим выражением:

$$F = 0: \quad \mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|.$$

В качестве дополнительных учтем интегральные условия сохранения объема капли

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\{V: 0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

неподвижного центра масс при колебаниях ее поверхности

$$\iiint_V \mathbf{r} dV = 0,$$

$$\{V: 0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

условие незаряженности капли

$$\iint_S \kappa dS = 0,$$

$$\{S: r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где  $\kappa$  — поверхностная плотность заряда.

Будем рассматривать задачу в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ . За безразмерными величинами условимся сохранять старые обозначения.

В рамках модели потенциальности скоростей жидкости  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  определим гидродинамическим потенциалом,  $\psi(\mathbf{r}, t): \mathbf{V} = \nabla\psi$ , что позволит скаляризовать сформулированную задачу и привести ее к виду

$$P = P_0 + F_{\text{in}}r\mu - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2, \quad \Delta\psi = 0, \quad \Delta\Phi = 0,$$

$$r = 0: \quad |\nabla\psi| < \infty, \quad 1 \ll r \ll L: \quad \Phi = \Phi_{\text{ex}},$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad P_0 + F_{\text{in}}r\mu - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - P_{\text{atm}} + P_E = P_\sigma,$$

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t} + \left( \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} \right) \right) = 0$$

$$\Phi = \text{const}, \quad P_E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}, \quad P_\sigma = \text{divn},$$

$$\mathbf{n} = \left( \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} [r(\theta) + \xi(\theta, t)] \right) \times \left( 1 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta, t)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta, t)} \mathbf{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\nabla\Phi, \mathbf{n}) r^2 d\theta d\varphi = 0,$$

$\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — орты сферической системы координат.

Вышеописанную задачу будем решать в предположении малости искажений равновесной поверхности капли  $|\xi(\theta, t)| \ll 1$  и, как следствие, малости скорости течения жидкости, вызванного колебаниями поверхности:  $|\psi(r, \theta, t)| \sim |\xi(\theta, t)|$ . В рассмотрении ограничимся нулевым и первым порядками малости по амплитуде осцилляций  $\xi(\theta, t)$ , представляя искомые величины в виде суммы компонент указанных порядков:

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\xi^2),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2),$$

$$P_E(\mathbf{r}, t) = P_E^{(0)}(\mathbf{r}) + P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2),$$

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = P_\sigma^{(0)}(\mathbf{r}) + P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2),$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(0)}(\mathbf{r}) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2).$$

Подставляя разложения в систему уравнений и группируя слагаемые одного порядка, получим задачу нулевого порядка для определения равновесной формы поверхности и задачу первого порядка для анализа ее устойчивости.

**2.** Электростатический потенциал  $\Phi^{(0)}$  в окрестности капли определяется из электрической задачи нулевого порядка:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(r, \mu) = & \frac{\rho}{L^2} \left( 1 + \left( \frac{2}{r^2} - 2r \right) \frac{1}{L} P_1(\mu) \right. \\ & + \left( -\frac{3}{r^3} + 3r^2 \right) \frac{1}{L^2} P_2(\mu) + \left( \frac{4}{r^4} - 4r^3 \right) \frac{1}{L^3} P_3(\mu) \\ & \left. + \left( -\frac{5}{r^5} + 5r^4 \right) \frac{1}{L^4} P_4(\mu) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $P_j(\mu)$  — полином Лежандра порядка  $j$  [8].

Равновесная форма поверхности капли  $r(\theta)$  определяется из баланса давлений нулевого порядка:

$$r(\theta) = 1 + a_2 P_2(\mu) + a_3 P_3(\mu) + a_4 P_4(\mu) + a_5 P_5(\mu), \quad (2)$$

где коэффициенты  $a_n$  имеют вид

$$a_2 = W \frac{1}{8} \left( 36K_S(1, 1, 2) + \frac{336K_S(1, 3, 2)}{L_2} + \frac{225K_S(2, 2, 2)}{L^2} \right),$$

$$a_3 = W \left( -\frac{9K_S(1, 2, 3)}{L} - \frac{27K_S(1, 4, 3)}{L^3} - \frac{42K_S(2, 3, 3)}{L^3} \right),$$

$$a_4 = W \frac{1}{36} \left( \frac{336K_{1,3,4}^{(S)}}{L_2} + \frac{225K_{2,2,4}^{(S)}}{L^2} \right),$$

$$a_5 = -W \frac{1}{28} \left( \frac{270K_{1,4,5}^{(S)}}{L^3} + \frac{420K_{2,3,5}^{(S)}}{L^3} \right).$$

Здесь и далее коэффициенты  $K_{a,b,c}^S$  имеют вид  $K_{a,b,c}^S = (C_{a,0}^{c,0} b, 0)^2$ , где  $C_{l_1, m_1, l_2, m_2}^{l, m}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [8]. Полевой параметр  $W \equiv p^2/4\pi L^6$  характеризует отношение отношения величины давления электростатического поля к силе поверхностного натяжения на поверхности капли.

3. Задача первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\psi = 0, \quad \Delta\Phi^{(1)} = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla\psi| < \infty, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)} \rightarrow 0,$$

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) = P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t),$$

$$-\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} = 0$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\Phi^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial r} \xi(\theta, t) = \text{const},$$

где поправки первого порядка малости к давлениям: гидродинамическому, электрического поля и капиллярных сил определяются выражениями

$$r = r(\theta): \quad P^{(1)}(\mathbf{r}, t) = F_{\text{in}\xi}(\theta, 0)\mu - \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial t},$$

$$P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi} \right) \xi(\theta, t) + \frac{(\nabla\Phi^{(0)})(\nabla\Phi^{(1)})}{4\pi},$$

$$P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) = [-2\xi(\theta, t) - \Delta_\theta\xi(\theta, t)] - 2 \frac{\partial(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} + 2(r(\theta) - 1)[\Delta_\theta\xi(\theta, t)] + 2\xi(\theta, t)[\Delta_\theta r(\theta)],$$

$$\Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right),$$

$$\int_0^\pi r^2(\theta)\xi(\theta, t) \sin(\theta)d\theta = 0, \quad \int_0^\pi r^3(\theta)\xi(\theta, t) \sin\theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi \left[ \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} 2\xi(\theta, t) + (2r(\theta) - 1) \left( \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi(\theta, r) + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \right) - \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \xi(\theta, t) - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \right] \sin\theta d\theta = 0.$$

4. Запишем общее решение уравнения Лапласа для гидродинамического потенциала с учетом ограниченности скорости в центре капли

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu).$$

Подставляя аналитические выражения для равновесной формы поверхности (2) и гидродинамического потенциала в кинематическое граничное условие, определим координатную зависимость возмущения поверхности  $\xi(\theta, t)$ :

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu) \quad (3)$$

и выразим коэффициенты  $V_n(t)$  в решении для  $\psi(\mathbf{r}, t)$  через амплитуды  $\alpha_n(t)$ :

$$V_n(t) = \frac{1}{n} \left[ \dot{\alpha}_n(t) - \sum_{m=-5}^5 \dot{\alpha}_{n+m}(t) N_m(n) \right].$$

Численные коэффициенты  $N_m(n)$  имеют весьма громоздкий вид и из соображений экономии места здесь опущены. Для иллюстрации приведем лишь один из них:

$$N_{-5}(n) = \frac{1}{L^3} \left[ \frac{135}{14} K_{1,4,5}^S + 15K_{2,3,5}^S \right] \times \left[ (6-n)K_{5,n-5,n}^S + \frac{K_{5,n-5,n}^\theta}{(n-5)} \right].$$

Коэффициенты  $K_{a,b,c}^\theta$  определяются выражениями

$$K_{a,b,c}^\theta = -\sqrt{a(a+1)b(b+1)} C_{a,0}^{c,0} C_{a,-1}^{c,0} b, 1,$$

где  $C_{l_1, m_1, l_2, m_2}^{l, m}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [8].

Решение уравнения Лапласа для электрического потенциала первого порядка, удовлетворяющее условию убывания потенциала на бесконечности, запишем в виде

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (4)$$

Выражения для коэффициентов  $D_n(t)$ , выраженные через амплитуды возмущения, найдем из условия эквипотенциальности поверхности капли

$$D_n(t) = -\frac{p}{L^2} \left( \frac{45K_{4,n-4,n}^S}{L^4} \alpha_{n-4}(t) - \frac{28K_{3,n-3,n}^S}{L^3} \alpha_{n-3}(t) + \left( \frac{15K_{2,n-2,n}^S}{L^2} + \frac{45K_{4,n-2,n}^S}{L^4} \right) \alpha_{n-2}(t) - \left( \frac{6K_{1,n-1,n}^S}{L} + \frac{28K_{3,n-1,n}^S}{L^3} \right) \alpha_{n-1}(t) + \left( \frac{15K_{2,n,n}^S}{L^2} + \frac{45K_{4,n,n}^S}{L^4} \right) \alpha_n(t) - \left( \frac{6K_{1,n+1,n}^S}{L} + \frac{28K_{3,n+1,n}^S}{L^3} \right) \alpha_{n+1}(t) + \left( \frac{15K_{2,n+2,n}^S}{L^2} + \frac{45K_{4,n+2,n}^S}{L^4} \right) \alpha_{n+2}(t) - \frac{28K_{3,n+3,n}^S}{L^3} \alpha_{n+3}(t) + \frac{45K_{4,n+4,n}^S}{L^4} \alpha_{n+4}(t) \right).$$

Чтобы удовлетворить динамическому граничному условию, запишем выражения для добавок первого порядка малости по амплитуде возмущения к давлениям капиллярных сил и электрического поля. Подставляя (3) в выражение для капиллярного давления первого порядка, получим для  $P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ :

$$P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-5}^5 \alpha_{n+m}(t) G_m(n).$$

Числовые коэффициенты  $G_m(n)$  также весьма громоздки, поэтому в иллюстративных целях ограничимся приведением выражения для одного из них:

$$G_{-5}(n) = \frac{1}{56} (60 + 2(-5 + n)(-4 + n)) \times \left( \frac{1}{L^3} (540K_{1,4,5}^S + 840K_{2,3,5}^S) \right) K_{5,n-5}^S.$$

С учетом вида электрических потенциалов (1), (4) и выражений для формы поверхности (2), (3) рассчитаем электрическое давление  $P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ :

$$P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-5}^5 \alpha_{n+m}(t) Z_m(n) P_n(\mu),$$

где  $Z_i(n)$  — численные коэффициенты, не приводящиеся ввиду громоздкости.

5. Подставляя выписанные выражения в баланс давлений первого порядка малости и воспользовавшись

ортогональностью полиномов Лежандра, получим систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка относительно амплитуд, каждое из которых имеет вид

$$\ddot{\alpha}_n(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \sum_{m=-5}^5 (C_m^f(n) \alpha_{n+m}(t) + C_m^d(n) \ddot{\alpha}_{n+m}(t)) = 0, \quad (5)$$

где  $\omega_n$  — собственная частота колебаний моды с номером  $n$ , определяемая выражением

$$\omega_n^2 = (n-1)(n+2)n - nW \left( C_\omega + \frac{1}{L^2} D_\omega \right),$$

$C_i^f(n), C_i^d(n)$  — численные коэффициенты, выражения для которых в силу громоздкости опущены. Для примера приведем лишь по одному из коэффициентов  $C_i^f, C_i^d(n)$ :

$$C_{-5}^f(n) = \frac{1}{L^3} nW \left( -\frac{135}{14} (60 + 2(n-5)(n-4)) K_{1,4,5}^S K_{5,n-5}^S - 15(60 + 2(n-5)(n-4)) K_{2,3,5}^S K_{5,n-5}^S - 30(14(n-1)) K_{2,n-2,ns}^S K_{e,n-5,n-2}^S + 14(n-2) k_{2,n-5,n-3}^S K_{3,n-3,n}^S + 9n K_{1,n-1,n}^S K_{r,n-5,n-1}^S - 27K_{1,n-5,n-4}^S K_{4,n-4,n}^S + 9n K_{1,n-5,n-4}^S K_{4,n-4,n}^S - 36K_{1,4,5}^S K_{5,n-5,n}^S - 56K_{2,3,5}^S K_{5,n-5,n}^S \right),$$

$$C_{-5}^d(n) = \frac{1}{L^3} nW \left( -\frac{135}{14} K_{1,4,5}^S K_{5,n-5,n}^S - \frac{135(6-n) K_{1,4,5}^S K_{5,n-5,n}^S}{14n} - 15K_{2,3,5}^S K_{45,n-5,n}^S - \frac{15(6-n) K_{2,3,5}^S K_{5,n-5,n}^S}{n} - \frac{135K_{1,4,5}^S K_{5,n-5,n}^\theta}{14(-5+n)n} - \frac{15K_{2,3,5}^S K_{5,n-5,n}^\theta}{(-5+n)n} \right).$$

Полные выражения для этих коэффициентов занимают 8 страниц машинописного текста.

Коэффициенты  $C_\omega, D_\omega$  имеют вид

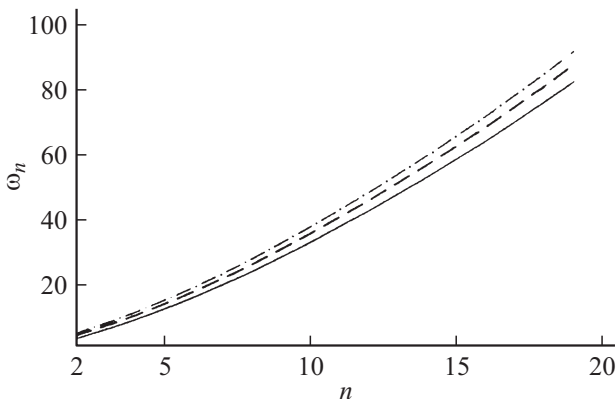
$$C_\omega = 72K_{1,1,0}^S - 36K_{1,n-1,n}^S K_{1,n,n-1}^S - (2+n)36K_{1,n,n+1}^S K_{1,n+1,n}^S - \frac{9}{2n} (n+n^2-2) [3nK_{2,n,n}^S + K_{2,n,n}^\theta] K_{1,1,2}^S,$$

$$\begin{aligned}
D_{\omega} = & 450K_{2,2,0}^S + (1-n)225K_{2,n-2,n}^S K_{2,n,n-2}^S \\
& + (2-n-n^2) \left( 126K_{1,3,2}^S + \frac{675}{8} K_{2,2,2}^S \right) K_{2,n,n}^S \\
& - 225(1+n)(K_{2,n,n}^S)^2 - 225(n-3)K_{2,n,n+2}^S K_{2,n+2,n}^S \\
& - 168nK_{1,n,n-1}^S K_{3,n-1,n}^S - 168nK_{1,n-1,n}^S K_{3,n,n-1}^S \\
& - (2+n)168K_{1,n+1,n}^S K_{3,n,n+1}^S \\
& - (2+n)168K_{1,n,n+1}^S K_{3,n+1,n}^S + \left( (672K_{1,3,4}^S + 450K_{2,2,4}^S) \right. \\
& \left. - \left( \frac{19}{6} + \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}n^2 \right) (112K_{1,3,4}^S + 75K_{2,2,4}^S) \right) K_{4,n,n}^S \\
& - \frac{(n^2+n-2)}{n} \left( 42K_{1,3,2}^S + \frac{225}{8} K_{2,2,2}^{\theta} \right) K_{2,n,n}^{\theta} \\
& + \left( \frac{28}{3} K_{1,3,4}^S + \frac{25}{4n} K_{2,2,4}^S \right) (2-n-n^2) K_{4,n,n}^{\theta}.
\end{aligned}$$

Заметим, что индексы  $n$  амплитуд  $\alpha_n(t)$  не могут быть отрицательными, поэтому будем считать  $\alpha_n(t) = 0$  при  $n < 0$ .

На рис. 1 приведены зависимости от номера моды частот осцилляций капли в однородном электростатическом поле, в поле точечного заряда и поле диполя. Из представленных графиков следует, что влияние вида распределения плотности поверхностного заряда капли на частоту осцилляций поверхности возрастает по мере увеличения номера моды.

Согласно уравнению (5), в рассматриваемом приближении в неоднородном электростатическом поле диполя выделенная мода (под выделенной модой будем понимать  $n$ -ю моду) взаимодействует с десятью ближайшими. Следует отметить, что в поле точечного заряда аналогичным межмодовым взаимодействием выделенная мода „охватывает“ шесть соседних мод [6], а в однородном электростатическом поле — только две.



**Рис. 1.** Зависимости от номера моды собственной частоты осцилляций капли для однородного поля (штриховая линия), поля точечного заряда (штрихпунктирная линия), поля диполя (сплошная линия), рассчитанные при  $L = 3$ .

Таким образом, увеличение степени неоднородности внешнего электростатического поля приводит к усилению межмодового взаимодействия отдельных осцилляций.

Интегральные условия сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс определяют величины амплитуд нулевой и первой мод соответственно:

$$\begin{aligned}
\alpha_0(t) = & W \left( \frac{1}{20} \left( -36K_{1,1,2} - \frac{336K_{1,3,2}^S}{L^2} - \frac{225K_{2,2,2}^S}{L^2} \right) \alpha_2(t) \right. \\
& + \frac{1}{70} \left( \frac{180K_{1,2,3}^S}{L} + \frac{540K_{1,4,3}^S}{L^3} + \frac{840K_{2,2,3}^S}{L^3} \right) \alpha_3(t) \\
& + \frac{1}{162} \left( -\frac{336K_{1,3,4}^S}{L^2} - \frac{225K_{2,2,4}^S}{L^2} \right) \alpha_4(t) \\
& \left. + \frac{1}{308} \left( \frac{540K_{1,4,5}^S}{L^3} + \frac{840K_{2,3,5}^S}{L^3} \right) \alpha_5(t) \right), \\
\alpha_1(t) = & -W\alpha_2(t) \left( \frac{243}{35L} K_{1,2,3} + \frac{1}{L^3} \left( \frac{729}{35} K_{1,4,3}^S \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{162}{5} K_{2,3,3}^S \right) \right) + W\alpha_3(t) \left( \frac{243}{70} K_{1,1,2}^S \right. \\
& \left. + \frac{1}{L^2} \left( \frac{162}{5} K_{1,3,2}^S + \frac{16}{3} K_{1,3,4}^S \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1215}{56} K_{2,2,2}^S + \frac{25}{7} K_{2,2,4}^S \right) \right) \\
& - W\alpha_4(t) \left( \frac{36}{7L} K_{1,2,3}^S + \frac{1}{L^3} \left( \frac{108}{7} K_{1,4,3}^S + \frac{675}{154} K_{1,4,5}^S \right. \right. \\
& \left. \left. + 24K_{2,3,3}^S + \frac{75}{11} K_{2,3,5}^S \right) \right) \\
& + W\alpha_5(t) \frac{1}{L^2} \left( \frac{140}{33} K_{1,3,4}^S + \frac{125}{44} K_{2,2,4}^S \right) \\
& - W\alpha_6(t) \frac{1}{L^3} \left( \frac{3645}{1001} K_{1,4,5}^S + \frac{810}{143} K_{2,3,5}^S \right).
\end{aligned}$$

Амплитуды возмущений  $\alpha_n(t)$  (при  $n \geq 2$ ) определяются из системы уравнений (5), которую будем решать методом последовательных приближений. В нулевом приближении пренебрежем слагаемым, отвечающим за взаимодействие мод и содержащими малые множители  $W/L^2$ ,  $W/L^3$ . В итоге система примет вид

$$\ddot{\alpha}_n^0(t) + \omega_n^2 \alpha_n^0(t) = 0, \quad n \geq 2.$$

Решение этого гармонического уравнения запишем в виде

$$\alpha_n^0(t) = A_n^+ \exp(i\omega_n t) + A_n^- \exp(-i\omega_n t),$$

где  $A_n^{\pm} = \text{const}$ .

Используя полученное решение при записи слагаемых, описывающих межмодовое взаимодействие, получим неоднородные дифференциальные уравнения для

вычисления амплитуд  $\alpha_n(t)$  в следующем приближении:

$$\begin{aligned} & \alpha_n''(t) + \omega_n^2 \alpha_n(t) - \left[ \left( C_{-5}^f(n) - \omega_{n-5}^2 C_{-5}^d(n) \right) \right. \\ & \times \left[ A_{n-5}^+ \exp(i\omega_{n-5}t) + A_{n-5}^- \exp(-i\omega_{n-5}t) \right] \\ & + \left( C_{-4}^f(n) - \omega_{n-4}^2 C_{-4}^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n-4}^+ \exp(i\omega_{n-4}t) + A_{n-4}^- \exp(-i\omega_{n-4}t) \right] \\ & + \left( C_{-3}^f(n) - \omega_{n-3}^2 C_{-3}^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n-3}^+ \exp(i\omega_{n-3}t) + A_{n-3}^- \exp(-i\omega_{n-3}t) \right] \\ & + \left( C_{-2}^f(n) - \omega_{n-2}^2 C_{-2}^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n-2}^+ \exp(i\omega_{n-2}t) + A_{n-2}^- \exp(-i\omega_{n-2}t) \right] \\ & + \left( C_{-1}^f(n) - \omega_{n-1}^2 C_{-1}^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n-1}^+ \exp(i\omega_{n-1}t) + A_{n-1}^- \exp(-i\omega_{n-1}t) \right] \\ & + \left( C_1^f(n) - \omega_{n+1}^2 C_1^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n+1}^+ \exp(i\omega_{n+1}t) + A_{n+1}^- \exp(-i\omega_{n+1}t) \right] \\ & + \left( C_2^f(n) - \omega_{n+2}^2 C_2^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n+2}^+ \exp(i\omega_{n+2}t) + A_{n+2}^- \exp(-i\omega_{n+2}t) \right] \\ & + \left( C_3^f(n) - \omega_{n+3}^2 C_3^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n+3}^+ \exp(i\omega_{n+3}t) + A_{n+3}^- \exp(-i\omega_{n+3}t) \right] \\ & + \left( C_4^f(n) - \omega_{n+4}^2 C_4^d(n) \right) \\ & \times \left[ A_{n+4}^+ \exp(i\omega_{n+4}t) + A_{n+4}^- \exp(-i\omega_{n+4}t) \right] \\ & + \left( C_5^f(n) - \omega_{n+5}^2 C_5^d(n) \right) \\ & \times \left. \left[ A_{n+5}^+ \exp(i\omega_{n+5}t) + A_{n+5}^- \exp(-i\omega_{n+5}t) \right] \right] = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (6) представляет собой суперпозицию общего решения однородного уравнения

$$\alpha_n^{\text{un}}(t) = A_n^+ \exp(i\omega_n t) + A_n^- \exp(-i\omega_n t) \quad (7)$$

и частного решения неоднородного, которое представим в виде суммы экспонент, аналогичных экспонентам, входящим в функцию неоднородности:

$$\begin{aligned} \alpha_{n\pm m}^{\text{nonun}}(t) &= B_{n,\pm m}^+ \exp(i\omega_{n\pm m}t) + B_{n,\pm m}^- \exp(-i\omega_{n\pm m}t), \\ & \quad (m = 1, 2, 3). \quad (8) \end{aligned}$$

Подставляя (8) в уравнение (6), определим выражения для коэффициентов  $B_{n,\pm m}^\pm$ :

$$\begin{aligned} m = 2: \quad & B_{n,\pm m}^\pm = C_{\pm m}^S(n) \frac{W}{L^2} A_{n,\pm m}^\pm, \\ m = 1, 3: \quad & B_{n,\pm m}^\pm = C_{\pm m}^S(n) \frac{W}{L^3} A_{n,\pm m}^\pm, \\ & C_{\pm m}^S(n) = \frac{C_{\pm m}^f(n) - \omega_{n\pm m}^2 C_{\pm m}^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n\pm m}^2}. \quad (9) \end{aligned}$$

Отметим, что, исходя из физических соображений, амплитуды колебаний должны описываться вещественными функциями, поэтому можно записать  $B_{n,\pm m}^\pm = (B_{n,\pm m}^\mp)^*$ ,  $A_n^+ = (A_n^-)^*$ , где  $*$  обозначает комплексное сопряжение. Используя (7), (8) с учетом соотношений (9) для  $B_{n,\pm m}^\pm$  и представляя коэффициенты  $A_n^\pm$  в виде  $A_n^\pm = a_n \exp(\pm i b_n)$ , где  $a_n$  и  $b_n$  — вещественные константы, запишем выражение для  $\alpha_n(t)$  как суперпозицию  $\alpha_n^{(\text{un})}(t)$  и  $\alpha_n^{(\text{nonun})}(t)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= a_n \exp[i(\omega_n t + b_n)] \\ &+ \sum_{m=1}^5 a_{n\pm m} \exp[i(\omega_{n\pm m} t + b_{n\pm m})] C_{\pm m}^S(n) + \text{с.с.} \quad (10) \end{aligned}$$

Аббревиатурой с.с обозначим слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. В решении (10) константы  $a_n$  и  $b_n$  определяются из начальных условий.

6. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени возбуждена мода с номером  $k$ , амплитуду которой положим равной константе  $\xi$ , а скорость движения поверхности в начальный момент примем равной нулю:

$$t = 0: \quad \alpha_n(t) = \xi \delta_{n,k}; \quad \alpha_n'(t) = 0. \quad (n \geq 2). \quad (11)$$

Подставляя решение (10) в начальные условия (11), получим систему связанных уравнений

$$\begin{cases} a_n \cos(b_n) + \sum_{m=1}^5 a_{n\pm m} \cos(b_{n\pm m}) C_{\pm m}^S(n) = \xi \delta_{n,k}, \\ a_n \omega_n \sin(b_n) + \sum_{m=1}^5 a_{n\pm m} \omega_{n\pm m} \sin(b_{n\pm m}) C_{\pm m}^S(n) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

которую будем решать методом последовательных приближений.

В нулевом приближении пренебрежем слагаемыми, описывающими взаимодействие мод и являющимися малыми вследствие наличия в них множителей  $W/L^2$ ,  $W/L^3$ . Система примет вид

$$\begin{cases} a_n^0 \cos(b_n^0) = \xi \delta_{n,k}, \\ a_n^0 \omega_n \sin(b_n^0) = 0, \end{cases}$$

и ее решения при  $\omega_n \neq 0$  достаточно очевидны

$$\begin{cases} a_n^0 = \xi \delta_{n,k}, \\ b_n^0 = \pi m, \quad m \in \Theta, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\Theta$  — множество целых чисел.

В следующем приближении решаем систему (12), используя (13) при записи слагаемых, которыми пренебрегли в нулевом приближении.

Для фиксированного значения  $k$  (номера начальной моды) получим нетривиальные решения для номером мод  $n$  в интервале  $k - 5 \leq n \leq k + 5$ :

$$\begin{cases} a_k = \xi, \\ \sin(b_k) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{k \pm m} = -\xi C_{\mp}^S(k \pm m), \\ \sin(b_{k \pm m}) = 0, \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (14)$$

Возмущение поверхности капли  $\xi(\theta, t)$  с учетом полученных выше решений (14) запишется в виде

$$\xi(\theta, t) = \xi \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + \xi \sum_{m=1}^5 C_{+m}^S(k \pm m) [\cos(\omega_k t) - \cos(\omega_{k \pm m} t)] P_{k \pm m}(\mu). \quad (15)$$

7. Для анализа устойчивости равновесной поверхности заметим, что капля устойчива, когда полная амплитуда возмущения поверхности  $\xi(\theta, t)$ , описываемого выражением (15), ограничена во времени. Это справедливо, когда собственные частоты колебания всех мод  $\omega_n$ , определяющих возмущение  $\xi(\theta, t)$ , вещественны. Мода колебаний с номером  $n$  теряет устойчивость, когда квадрат ее частоты проходит через ноль. Из условия  $(\omega_n)^2 = 0$  получим выражение для критического значения полевого параметра

$$\begin{aligned} W_{cr} = & -(n-1)(2+n) \left( 72K_{1,1,0}^S - 36nK_{1,n,n-1}^S \right. \\ & - (72 + 36n)K_{1,n,n+1}^S K_{1,n+1,n}^S + (n^2 + n - 2) \\ & \times \left( \frac{27}{2} K_{2,n,n}^S - \frac{9}{2n} K_{2,n,n}^\theta \right) K_{1,1,2}^S \\ & + \frac{1}{L^2} \left( 450K_{2,2,0}^S + 225(1-n)K_{2,n-2,n}^S K_{2,n,n-2}^S \right. \\ & - (n^2 + n - 2) \left( 126K_{1,3,2}^S + \frac{675}{8} K_{2,2,2}^S \right) K_{2,n,n}^S \\ & - 225(n+1)K_{2,n,n}^{2S} - (n^2 + n - 2) \\ & \times \left( \frac{42}{n} K_{1,3,2}^S + \frac{225}{8} K_{2,2,2}^S \right) K_{2,n,n}^\theta \\ & - 900K_{2,n,n+2}^S K_{2,n+2,n}^S - 168n(K_{1,n,n-1}^S K_{3,n-1,n}^S \\ & + K_{1,n-1,n}^S K_{3,n,n-1}^S) - 336(K_{1,n+1,n}^S K_{3,n,n+1}^S \\ & + K_{1,n,n+1}^S K_{3,n+1,n}^S) - 168n(K_{1,n+1,n}^S K_{3,n,n+1}^S \\ & + K_{1,n+1,n}^S K_{3,n,n+1}^S) - \frac{1}{4} \left( n^2 + n - \frac{34}{3} \right) \\ & \times (112K_{1,3,4}^S + 75K_{2,2,4}^S) K_{4,n,n}^S - (n^2 + n - 2) \\ & \left. \times \left( \frac{28}{3} K_{1,3,4}^S + \frac{25}{4} K_{2,2,4}^S \right) K_{4,n,n}^\theta \right). \end{aligned}$$

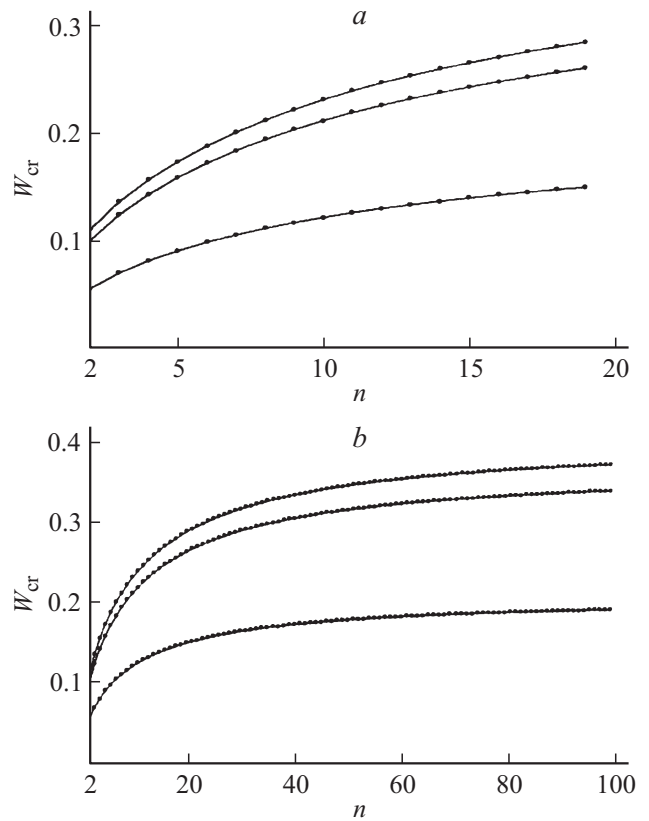
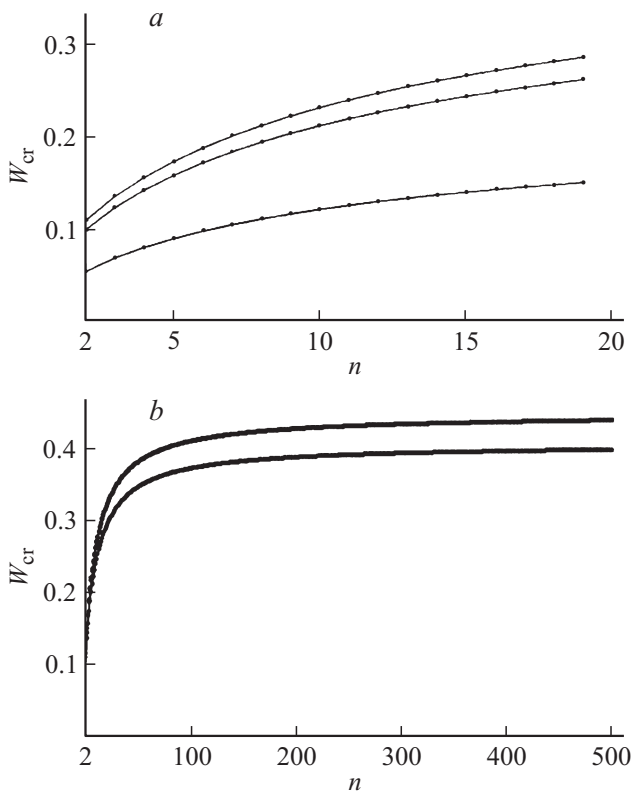


Рис. 2.  $a$  — зависимости критического значения полевого параметра  $W_{cr}$  от номера моды  $n$ , рассчитанные при:  $L = 10$  — верхняя линия,  $L = 7$  — средняя линия,  $L = 3$  — нижняя кривая;  $b$  — то же, что на рис. 2,  $a$ , но в более широком диапазоне изменения диапазона номеров мод  $2 \leq n \leq 100$ .

Зависимости значения этого параметра от номера моды представлены на рис. 2. Из графиков видно, что по мере увеличения номера моды критическое значение полевого параметра растет, асимптотически стремясь к некоторому значению  $W_{cr}^{asm}$ . Из этого следует, что можно задать такое поле, для которого параметр  $W$  превысит асимптотическое значение  $W_{cr}^{asm}$  и станут неустойчивыми все моды осциллирующий одновременно. Отметим, что к увеличению параметра  $W$  ведет как рост абсолютного значения напряженности электрического поля (в данном случае величины дипольного момента), так и усиление степени его неоднородности (т.е. уменьшение параметра  $L$ ). Согласно зависимостям, изображенным на рис. 2, асимптотическое значение  $W_{cr}^{asm}$  уменьшается с увеличением степени неоднородности, т.е. абсолютная неустойчивость поверхности капли (одновременная неустойчивость всех мод осциллирующих) может наступить при меньших значениях полевого параметра  $W$ .

На рис. 3 приведены рассчитанные при  $L = 10$  зависимости  $W_{cr} = W_{cr}(n)$  для капли, помещенной в однородное электростатическое поле (верхняя кривая), поле точечного заряда (средняя кривая) и поле диполя (нижняя кривая). Видно, что с увеличением степени неоднородности поля область устойчивых колебаний (область



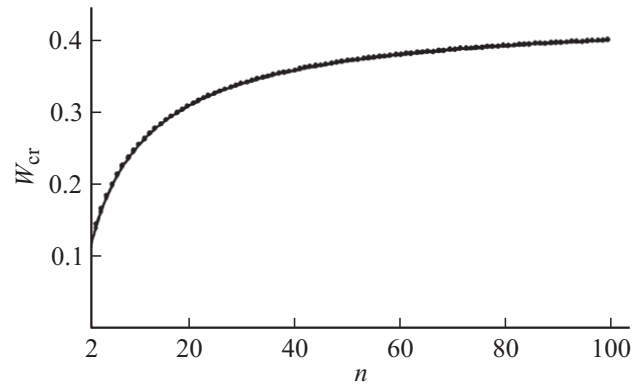
**Рис. 3.** *a* — зависимости критических значений полевых параметров для капли в однородном и неоднородных полях при  $L = 10$ . Верхний график — однородное поле, средний — поле точечного заряда, нижний — поле диполя; *b* — то же, что на рис. 3, *a*, в интервале номеров мод  $2 \leq n \leq 500$ .

ниже критической кривой) уменьшается. На рис. 3, *b* верхняя кривая соответствует слившимся зависимостям для однородного поля и поля точечного заряда. Расчеты показывают, что с уменьшением параметра  $L$  кривая, соответствующая полю диполя, понижается и, наоборот, при задании больших значений  $L$  она сливается с кривой для однородного поля, что проиллюстрировано на рис. 4, рассчитанном при  $L = 50$ , т.е. на большом удалении от источника поля.

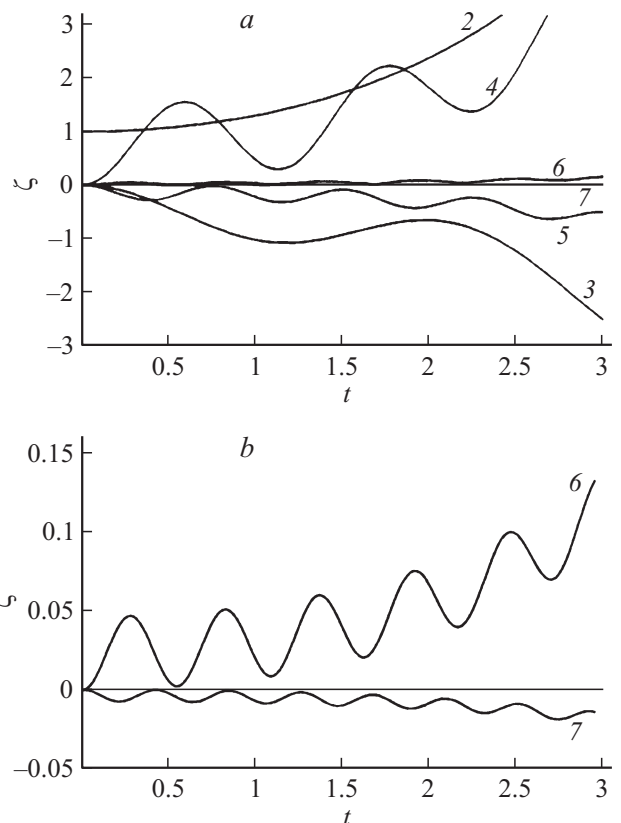
Из выражения (15) следует, что возбуждение единичной  $k$ -й моды в начальный момент времени вызывает возбуждение десяти соседних мод. Моды с номерами  $k \pm 1, k \pm 2, k \pm 3, k \pm 4, k \pm 5$  будем называть связанными модами. При больших значениях параметра  $L$ , а именно  $L \geq 10$ , вклад „ближайших“ связанных мод с номерами  $k \pm 1, k \pm 2$  более существен, чем с номерами  $k \pm 3, k \pm 4, k \pm 5$ .

Важным результатом, следующим из (15), является тот факт, что если изначально возбужденная мода теряет устойчивость (т.е. частота  $\omega_k$  становится мнимой), то одновременно становятся неустойчивыми все связанные с ней моды за счет наличия в амплитуде каждой из них слагаемого  $\sim \cos(\omega_k t)$ . На рис. 5 представлены зависимости амплитуд различных мод от времени для случая, когда величина полевого параметра превышает

критическое значение для изначально возбужденной основной (второй) моды. Большие инкременты роста амплитуд наблюдаются у мод с меньшими номерами. Из рис. 5, *a* ясно видно, что хотя при выделенной 2-й моде значение полевого параметра, критическое для нее, оказывается ниже критических значений полевого



**Рис. 4.** Зависимости критических значений полевых параметров однородного и неоднородных полей от номера моды, рассчитанные при  $L = 50$ .



**Рис. 5.** *a* — временные зависимости амплитуд с номерами 2–7 при параметре  $W$ , закритическом для основной 2-й моды, но докритическом для остальных мод, рассчитанные при  $n = 2, W = 0.08, L = 10$ , нормированные на амплитуду изначально возбужденной 2-й моды. Цифры у кривых совпадают с номером моды; *b* — то же, что и на рис. 5, *a*. 6-я и 7-я моды приведены в большем масштабе.



параметра для связанных со 2-й модой  $k \pm 1$ ,  $k \pm 2$ ,  $k \pm 3$ ,  $k \pm 4$ ,  $k \pm 5$ , их амплитуды тоже экспоненциально нарастают во времени, сохраняя, однако, в отличие от амплитуды 2-й моды осциллирующий характер. На рис. 5, *b* амплитуды 6-й и 7-й мод приведены в более крупном масштабе для иллюстрации осциллирующего характера их нарастания со временем.

## Заключение

В проведенных расчетах выяснилось, что с ростом степени неоднородности поля увеличивается степень связности мод осцилляций капли. Зависимость критического значения полевого параметра от номера моды стремится к некоторому асимптотическому значению, и можно указать такое значение полевого параметра, при котором все моды неустойчивы одновременно. Рост степени неоднородности поля (уменьшение параметра  $L$  — расстояния от капли до точечного заряда или диполя) приводит к уменьшению асимптотического значения полевого параметра, и, следовательно, абсолютная неустойчивость капли становится достижимой при меньших его значениях. При одновременной неустойчивости большого количества мод осцилляций наложение их амплитуд на вершине капли, обращенной в сторону увеличения неоднородности поля, формирует эмиссионный выступ, выбрасывающий струю жидкости, как это наблюдалось в эксперименте [5].

Работа выполнена в рамках темплана ЯрГУ им. П.Г. Демидова.

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [5] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15 807–15 813.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 5. С. 50–60.
- [7] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. Вып. 6. С. 10–15.
- [8] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.