Письма в ЖТФ, том 18, вып. 21 12 ноября 1992 г.

01; 09

ДЕРЕВО СВЕРХУСТОЙЧИВЫХ ОРБИТ И СКЕЙЛИНГ В ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов

Для нелинейных систем, описываемых одномерными отображениями $x_{n+1}=f(x_n)$, хорошо изучен каскад бифуркаций удвоения периода циклов, приводящий к возникновению хаоса. Удобно выделить сверхустойчивые циклы, опирающиеся на квадратичный экстремум функции $f(x)$ [1]. Последовательность точек сверхустойчивых циклов накапливается к некоторой критической точке с масштабным фактором $\delta=4.66920$. Если же одномерное отображение характеризуется двумя параметрами, то на плоскости этих параметров может существовать линия, двигаясь вдоль которой можно наблюдать „неклассический" каскад удвоений периода с масштабным фактором $\delta=7.28469$ [2]. На этой линии лежат точки „дважды сверхустойчивых" циклов, опирающихся одновременно на два квадратичных экстремума функции $f(x)$. Точки таких циклов накапливаются к так называемой трикритической точке [2], которая характеризуется универсальной самоподобной структурой ее окрестности в пространстве параметров. Вблизи трикритической точки имеет место двухпараметрический скейлинг с масштабными константами $\delta_1=7.28469$ и $\delta_2=2.85712$. Трикритическую динамику на плоскости параметров демонстрируют многие отображения, например, стандартное отображение окружности [3, 4], являющееся „эталонным" для описания эффектов синхронизации автоколебаний при внешнем воздействии.

Естественно поставить вопрос о возможности существования критических движений в одномерных отображениях с числом параметров, равном трем. Простейшее такое отображение получается из соотношения $x_{n+1}=f(x_n)$ при разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора и при соответствующей нормировке имеет вид

$$x_{n+1}=1-ax_n^2-bx_n^4-cx_n. \qquad (1)$$

(Член третьей степени устраняется заменой переменной). Варьируя два параметра, можно выполнить два условия:

$$f''(x)=0, \quad f'''(x)=0. \qquad (2)$$

Эти условия задают некоторую линию t в пространстве трех параметров, вдоль которой функция $f(x)$ имеет экстремум четвертого

Тип критической точки	Скейлинговые константы δ_i		
Трикритическая Т	7.28469	2.85712	-4.82938
Мультикритическая S_1	9.29625	4.64087	2.15427
Мультикритическая S_2	9.29625	-3.16189	2.15427
Мультикритическая Е	10.9486	3.40114	1.84422

порядка. (Для отображения (1) линия t – это просто ось b). На этой линии лежат точки новых сверхустойчивых циклов, опирающихся на экстремум четвертого порядка. Точки существования таких циклов в пространстве параметров a, b, c накапливаются к трикритической точке Т, координаты которой для модели (1) есть (0, 1.5949014, 0).

В точке с координатами (0, 1, 0) отображение (1) имеет простейший сверхустойчивый 2-цикл с элементами $x_1=0$, $x_2=1$. Из этой точки выходят две линии S_1 и S_2. На первой из этих линий квадратичный экстремум функции $f(x)$ отображается в кубическую критическую точку (точку перегиба), а на второй – точка перегиба отображается в экстремум. Линии S_1 и S_2 пересекаются в точке с координатами (1.1111111111, 0.5144032922, 0.8888888889), в которой реализуется сверхустойчивый цикл, элементами которого одновременно являются и квадратичный экстремум функции $f(x)$, и точка перегиба. Двигаясь далее вдоль линий S_1 и S_2, можно наблюдать на каждой из них каскад удвоений периода таких циклов. Эти последовательности циклов с масштабной константой $\delta = 9.29625$ накапливаются к новым критическим точкам, которые будем обозначать S_1 и S_2. Координаты точки S_1: (1.8724481904, -1.6252052847, 1.0940161015), а точки S_2: (1.3799094807, -0.5574097012, 1.1818211223).

Из точки пересечения линий S_1 и S_2 выходит, кроме того, линия e. На этой линии точка перегиба разрушается с образованием двух квадратичных экстремумов – максимума и минимума. Вдоль линии e можно обнаружить сверхустойчивые циклы, опирающиеся одновременно уже на три экстремума функции $f(x)$. Также наблюдается каскад удвоения периода, но с масштабной константой $\delta = 10.9486$. Точки существования сверхустойчивых циклов возрастающих периодов накапливаются к еще одной критической точке Е с координатами (2.4493669341, -1.2604157306, 0.7009546250).

Таким образом, сверхустойчивый цикл отображения (1) порождает некоторую „пирамидку" в пространстве параметров, в вершине которой лежит точка существования цикла, опирающегося на квадратичный экстремум и точку перегиба, а вершинами основания служат новые критические точки типа S_1, S_2, Е.

Вблизи каждой из критических точек S_1, S_2, Е, Т реализуется трехпараметрический скейлинг с константами, приведенными в таблице

Для трикритической точки две константы скейлинга известны из анализа двухпараметрической ситуации, а третья константа новая, связанная с „включением" еще одного собственного направления. Для точек S_1, S_2 две константы скейлинга одинаковы (в частности, константа скейлинга вдоль линий s_1 и s_2), а одна – отличается.

Аналогичные „пирамидки" можно построить, если исходить из любого другого цикла двойной устойчивости периода 4, 8, 16,... Поскольку такие циклы накапливаются к трикритической точке Т, то существует и иерархия пирамидок, накапливающихся к этой точке в соответствии со скейлинговым законом. Поэтому имеет место иерархия точек S_1, S_2, E, накапливающихся к точке Т.

Окрестность пространства параметров каждой из четырех критических точек Т, S_1, S_2, Е устроена достаточно сложно. Отметим, что отображение (1) имеет знакопеременный шварциан, поэтому появляются новые типичные бифуркации коразмерности один и два: жесткие переходы через мультипликатор –1 и точки, в которых линия удвоения превращается в линию жесткого перехода через мультипликатор –1 и от которой, кроме того, отходит линия жесткого перехода через мультипликатор +1.

Для каждого типа критической динамики можно построить иллюстрации типа скейлинг-спектра, графиков обобщенных размерностей, спектра колебаний, графиков ляпуновских показателей и т.д. Все они являются универсальными, что обосновывается с помощью ренормгруппового анализа.

Итак, для одномерных отображений существуют четыре разновидности критической динамики, характеризующиеся трехпараметрическим скейлингом. Эти варианты критической динамики являются типичными для трехпараметрических отображений. По-видимому, для одномерных отображений можно развить классификацию критических точек, характеризующих самоподобное устройство пространства параметров по возрастающей коразмерности, аналогично тому, как это делается в теории бифуркаций и теории катастроф.

Список литературы

[1] Feigenbaum M.J. // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. N 1. P. 25.

[2] Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.// Phys. Rev. 1981. V. A24. N 5. P. 2669.

[3] Schell M., Fraser S., Kapral R.// Phys. Rev. 1983. V. A28. N 1. P. 373.

[4] Fraser S., Kapral R. // Phys. Rev. 1984. V. A30. P. 1017.

Поступило в Редакцию
9 октября 1992 г.