

01; 03

© 1992

АНАЛИТИКА КРИВЫХ И. НИКУРАДЗЕ

В.А. Зеленцкий

Идеи Ж. Буссинеска о турбулентном обмене импульсным и их использование для замыкания уравнений О. Рейнольдса развиваются и поныне как на базе новых представлений о турбулентной вязкости и ее непосредственного введения в исходные уравнения [1], так и путем совершенствования гипотезы Л. Прандтля о длине пути смешения [2] для течения Пуазейля, что приводит к удовлетворительному соответствию с опытами И. Никурадзе в описании коэффициента сопротивления каналов и труб для гладкостенного и гидравлически гладкого течений и переходной области чисел О. Рейнольдса. Для течения с проявлением шероховатости стенок классическая полуэмпирическая теория дает результаты только для автомодельной области [3, 4], хотя независимость дефицита осредненной скорости в турбулентном ядре потока от степени шероховатости внутренней поверхности труб отмечена Т.Е. Стентоном и Дж. Паннелом уже достаточно давно [5].

Целью настоящего сообщения является описание структуры коэффициентов в законе сопротивления при шероховатом течении в трубах (каналах, тоннелях, горных выработках) на базе новых представлений об универсальной функции Стентона-Паннела и аналитики кривых сопротивления И. Никурадзе, следующей из этих представлений.

Инвариантность функции Стентона-Паннела доказать несложно. Пусть турбулентная составляющая осредненной скорости $u/u_* = \int_{\xi}^{\xi} \varphi(\xi) d\xi$ обращается в нуль на расстоянии y_0 от стенки, тогда ее дефицит $(u_m - u)/u_*$ независимо от вида подинтегральной функции (форма канала через его гидравлический радиус может влиять на $\varphi(\xi)$) не зависит от нормированной толщины пристенного слоя ξ_0 и является функцией только нормированного расстояния от стенки ξ : $u_m/u_* - u/u_* = \int_{\xi_0}^1 \varphi(\xi) d\xi - \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi(\xi) d\xi = F(1) - F(\xi)$, где $\xi = y/r_0$; r_0 - гидравлический радиус канала; u_* - динамическая скорость.

Скорость же на оси канала u_m/u_* всегда зависит от ξ_0 , а значит, и от состояния его поверхности:

$$u_m/u_* = F(1) - F(\xi_0), \quad \xi_0 = y_0/r_0.$$

На основе анализа модели независимых пульсаций скорости в работе [6] доказано, что в трубах (каналах) дефицит осредненной скорости в турбулентном ядре потока имеет вид

$$\frac{u_m - u}{u_*} = \frac{1}{\mathcal{L}} \left[2 \operatorname{arth} \sqrt{1 - \xi} - f(\xi) \right], \quad (1)$$

где \mathcal{L} — первая гидродинамическая постоянная*, $\mathcal{L} = 0.4$; $f(\xi)$ — корреляционная функция.

Полуэмпирический вид корреляционной функции и ее линейная связь с коэффициентом корреляции между продольно-поперечными пульсациями скорости вскрыты в работе [6] на базе анализа результатов работы [7]:

$$f(\xi) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \xi} + \frac{1}{\sqrt{2c}} \ln \frac{(1 - \xi) + \sqrt{2c} \sqrt{1 - \xi} + c^2}{(1 - \xi) - \sqrt{2c} \sqrt{1 - \xi} + c^2} - \frac{\sqrt{2}}{c} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{c} \sqrt{1 - \xi} + 1 \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{c} \sqrt{1 - \xi} - 1 \right) \right], \quad c = (7/3)^{1/4}. \quad (2)$$

Полутеоретический подход к анализу замыкания исходных уравнений и представление корреляционной функции сложным функциональным рядом даны в работе [2]:

$$f(\xi) = 2e\sqrt{1 - \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(1 - \xi)^k}{2k + 1} \right). \quad (3)$$

В работе [7] в качестве длины пути смещения l принят полином И. Никурадзе, $l/r_0 = 0.14 - 0.08(1 - \xi)^2 - 0.06(1 - \xi)^4$ как наиболее достоверный из всех эмпирических формул, а в [2] — вскрыт закон смещения типа гипотезы Л. Прандтля с диссипативной функцией экспоненциального типа, $l = \mathcal{L} \eta \exp(-\eta/r_0)$. По известной скорости на оси трубы [2, 7]

$$\frac{u_m}{u_*} = \frac{1}{\mathcal{L}} \left[\ln \frac{4}{\xi_0} - f(\xi_0) \right] \quad (4)$$

и дефициту среднерасходной скорости

$$\frac{u_m - \bar{u}}{u_*} = 2 \int_0^1 \frac{u_m - u(\xi)}{u_*} (1 - \xi) d\xi = \frac{2}{\mathcal{L}} [J_0 - J_1] \quad (5)$$

* В работе [1] данная постоянная (константа Т. Кармана) представлена величиной, обратной критическому числу Рейнольдса для нижней границы буферного слоя.

определяется связь коэффициента сопротивления λ с нормированной толщиной пристенного слоя ξ_0 .

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x} \ln \frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{2\sqrt{2}x} [2J_0 - 2J_1 - \ln 4 + f(\xi_0)]. \quad (6)$$

Интеграл J_0 не зависит от характера корреляции между пульсациями, $J_0 = 2 \int_0^1 (1-\xi) \operatorname{arth} \sqrt{1-\xi} d\xi = 4/3$. Интеграл J_1 жестко

связан с корреляционной функцией, $J_1 = \int_0^1 f(\xi)(1-\xi)d\xi$ При полуэмпирическом профиле $f(\xi)$, согласно (2), он имеет значение

$$J_1 = 2 \left[\frac{2}{3} + \frac{1+c^4}{4\sqrt{2}c} [D_2 - 2(D_3 + D_4)] \right],$$

где

$$D_2 = \ln \frac{1+\sqrt{2}c+c^2}{1-\sqrt{2}c+c^2} = 1.702; \quad D_{3,4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{c} \pm 1 \right) = \begin{cases} 1.134, \\ 0.143. \end{cases}$$

Примечательно, что из разности $2(J_1 - J_0)$ слагаемое J_0 выпадает.

Корреляционная функция (2), имеющая в районе нуля крайне незначительный максимум, практически выволаживается в этой области, поэтому значение $f(\xi_0)$ можно заменить упрощенной оценкой

$f(0)$. Поскольку $f(0) = 2 \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}c} D_2 - \frac{\sqrt{2}}{c} (D_3 + D_4)$, то член

$2(J_1 - J_0) - f(\xi_0)$ имеет значение:

$$2(J_1 - J_0) - f(0) = \frac{c^3}{\sqrt{2}} [D_2 - 2(D_3 + D_4)] - \frac{\pi}{2} = -2.710.$$

При корреляционной функции согласно (3) член $2(J_1 - J_0)$ запишется так:

$$2(J_1 - J_0) = 1 - 5e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!} = 1 - T_1.$$

Число T_1 проще всего вычислить путем свертки ряда в интеграл [2]

$$T_1 = 5e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!} = 5e \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{5}{2} \left(\frac{e\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(1) - 1 \right) = 2.575.$$

Оценка $f(\xi_0)$ в данном случае выполняется аналогично рассмотренной выше

$$f(\xi_0) = f(0) = 2e\alpha, \quad \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = 0.215.$$

Данная оценка вполне точна, т. к. заметное отличие величины

$(1 + \xi_0)^{K + \frac{1}{2}}$ от единицы при $\xi_0 \ll 1$ можно ожидать при больших значениях K , однако полный ряд (3) сходится быстро ($n!$ в знаменателе). Итак,

$$2(J_1 - J_0) - f(\xi_0) = -(T_1 - 1) - 2e\alpha = -2.745.$$

Толщина пристенного слоя y_0 при шероховатом течении зависит от свойства течения и условий течения, что принято характеризовать динамической длиной l_* ($l_* = \nu/\sigma_*$, где ν — коэффициент кинематической вязкости). С другой стороны, y_0 зависит как от высоты выступов шероховатости Δ , так и от их формы, что количество характеризуется радиусом кривизны вершин выступов шероховатости R и в целом представляет собой аддитивную структуру:

$$y_0 = \beta l_* + \gamma \cdot \Delta \cdot Z(l_*, \Delta, R), \quad (7)^*$$

где β , γ — вторая и третья гидравлические постоянные. Отмеченные связи реализуются при следующих дополнительных условиях:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial l_*} = \beta + \frac{R}{l_*} \frac{\partial y_0}{\partial R}; \\ \frac{\partial y_0}{\partial \Delta} = -\left(\gamma \frac{\Delta}{l_*} + 2 \frac{R}{\Delta}\right) \frac{\partial y_0}{\partial R}, \end{cases} \quad (8)$$

согласно которым функция Z имеет вид:

$$Z = \exp[-Rl_*/(\gamma\Delta^2)]. \quad (9)$$

Между постоянными α , β , γ при канонических формах выступов шероховатости (конус, пирамида, шар и др.) существует рекур-

* Система (7)–(8) получена феноменологически, но вопреки утверждению Ландау–Лифшица о том, что „Если y_0 и Δ одного порядка величины, то никаких общих формул написать нельзя” [8].

рентная связь вида $x_{n+1} = x_n e^{-3x_n}$, где $n=0, 1, 2, x_0 = x$, поэтому

$$\beta = x e^{-3x} \approx 0.12; \quad \gamma = \beta e^{-3x} \approx 0.036. \quad (10)$$

При сложных формах выступов шероховатости (многозаходные право- и левовинтовые резьбы, кавернообразная шероховатость, а также при течениях жидкости с полимерными добавками и др.) выбор и вычисление постоянных β и γ выполняется из условия адекватности модели течения и результатов эксперимента.

При песочной шероховатости (квазиканонический выступ типа шара) $R \approx \Delta/2$, при "технической" шероховатости (остроконечные выступы) $R \approx 0$. В первом случае показатель экспоненты (9) имеет значение $(-L_*/2\gamma\Delta)$, а во втором - формула (7) упрощается

$$\text{в виду } y_0 = \beta L_* + \gamma \Delta.$$

Нормированная толщина пристенного слоя при песочной шероховатости

$$\xi_0 = y_0/r_0 = \beta L_*/r_0 + \gamma \varepsilon \exp[-L_*/(2\gamma\Delta)], \quad (11)$$

выраженная через число Рейнольдса Re , относительную шероховатость ε и коэффициент сопротивления, имеет значение

$$\xi_0 = \frac{4\sqrt{2}\beta + \gamma \exp[-2\sqrt{2}/(\gamma \varepsilon Re \sqrt{\lambda})] \varepsilon Re \sqrt{\lambda}}{Re \sqrt{\lambda}}. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (6) и представление решения в форме, структурно аналогичной эмпирической формуле Коулбрука-Уайта [3],

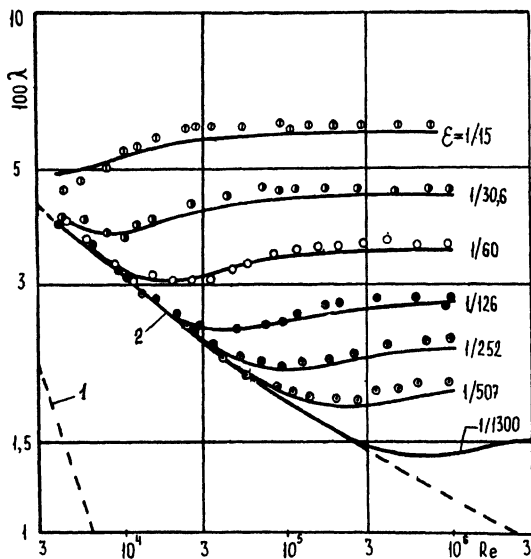
$$1/\sqrt{\lambda} = 1.74 - 2 \lg \left[\varepsilon + 18.7/(Re \sqrt{\lambda}) \right],$$

дает

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x} \left[\ln \frac{4}{\gamma} - 2J_0 + 2J_1 - f(\xi_0) \right] - \frac{1}{2\sqrt{2}x} \ln \left[\varepsilon \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\gamma \varepsilon Re \sqrt{\lambda}}\right) + \frac{4\sqrt{2}\beta}{\gamma Re \sqrt{\lambda}} \right]. \quad (13)$$

Подстановка значений коэффициентов в (13) приводит к окончательному виду закона сопротивления для переходной и автомодельной областей:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x} \left[\ln \frac{4}{x} + 6x - \left\{ \frac{2.71 - no[7]}{2.745 - no[2]} \right\} - \frac{1}{2\sqrt{2}x} \ln \left[\varepsilon \exp\left(-\frac{2\sqrt{2} e^{6x}}{x \varepsilon Re \sqrt{\lambda}}\right) + \frac{4\sqrt{2} e^{3x}}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \right] - 2.035 \lg \left[\varepsilon \exp\left(-\frac{77.95}{\varepsilon Re \sqrt{\lambda}}\right) + \frac{18.78}{Re \sqrt{\lambda}} \right]. \quad (14)$$



Сопrotивление труб с песочной шероховатостью. Иллюстрация сравнения с опытами (классические эксперименты И. Никурадзе) при условии $R = \Delta/2$ (песчанка - шар) выполнена по формуле (14) (сплошные линии) с коэффициентом 1.73.
 1 - ламинарное течение ($\lambda = 64/Re$); 2 - гладкостенное турбулентное течение (по формуле (16) с коэффициентом 0.86).

Сравнение результатов вычислений при полугеоретическом варианте задачи (коэффициент 1.73 в формуле (14) с экспериментами И. Никурадзе иллюстрировано графически (см. рисунок).

Условие минимума кривых сопротивления с песочной шероховатостью в переходной области, $d\lambda/dRe = 0$, согласно (6), равносильно следующему: $d\xi_0/dRe = 0$, которое при использовании (12) приводит к симплексу:

$$(\epsilon Re \sqrt{\lambda})_{min} = \frac{2\sqrt{2} e^{6\alpha}}{\alpha(3\alpha - \ln 2\alpha)} \approx 54.77. \quad (15)$$

Данное условие должно отвечать максимуму, так называемой B - функции, $B = B(\eta_\Delta)$, где $\eta_\Delta = u_* \Delta / \nu$ - безразмерная шероховатость. Преобразование (15) и последующие оценки дают

$$\eta_{\Delta,m} = \frac{e^{6\alpha}}{2\alpha(3\alpha - \ln 2\alpha)} \approx 9.68,$$

что и подтверждает эксперимент [3, 4].

Частные случаи:

1. При „технической“ шероховатости стенок, $R \approx 0$, формула (14) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left\{ \frac{1.76 - \text{по [7]}}{1.73 - \text{по [2]}} \right\} - 2.035 \lg \left[\varepsilon + \frac{18.78}{Re\sqrt{\lambda}} \right].$$

2. При гидравлически гладком, $\varepsilon \exp[-2\sqrt{2}e^{6x}/(x\varepsilon Re\sqrt{\lambda})] \ll \ll 4\sqrt{2}e^{3x}/(Re\sqrt{\lambda})$ и гладкостенном, $\varepsilon = 0$ течениях закон сопротивления вырождается в следующий:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x} \left[\ln(Re\sqrt{\lambda}) - \ln(\sqrt{2}x) + 3x - \left\{ \frac{2.71}{2.745} \right\} \right] = 2.035 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - \left\{ \frac{0.83}{0.86} \right\}. \quad (16)$$

3. При турбулентном течении в автомоделной области, $Re \rightarrow \infty$ сопротивление не зависит от вида шероховатости

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left\{ \frac{1.76}{1.73} \right\} - 2.035 \lg \varepsilon.$$

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Климонтович Ю.Л., Энгель-Херберт Х. // ЖТФ. 1984. Т. 54. В. 3.
- [2] Зеленецкий В.А. // Изв. вуз. Горн. журн. 1990. № 3.
- [3] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
- [4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
- [5] Stanton T.E., Pannell J.R. // Phil. Trans. Roy. Soc. A 214, 199. 1914.
- [6] Зеленецкий В.А. // Изв. вуз. Черн. мет. 1989. № 8.
- [7] Зеленецкий В.А., Кочышев В.П. // Изв. вуз. Черн. мет. 1988. № 4.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Поступило в Редакцию
7 января 1991 г.
В окончательной редак-
ции 30 января 1992 г.