Исследование влияния вмороженных немагнитных примесей на фазовые переходы в трехмерной модели Поттса

© А.К. Муртазаев*,**, А.Б. Бабаев*, Г.Я. Азнаурова*

* Институт физики Дагестанского научного центра Российской академии наук,
367003 Махачкала, Россия
** Дагестанский государственный университет,
367025 Махачкала, Россия

E-mail: b_albert78@mail.ru

(Поступила в Редакцию 16 июля 2007 г.)

Однокластерным алгоритмом Вольфа метода Монте-Карло исследуется влияние вмороженных немагнитных примесей на фазовые переходы в трехмерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$. Рассмотрены системы с линейными размерами $L = 20-44$ при концентрациях спинов $p = 1.0, 0.9, 0.8, 0.7$. С использованием метода кумулянтов Биндера четвертого порядка показано, что при концентрациях спинов $p = 0.9,\ 0.8,\ 0.7$ в данной модели наблюдается фазовый переход второго рода, а для чистой модели $(p = 1.0)$ — фазовый переход первого рода. На основе теории конечно-размерного скейлинга рассчитаны статические критические индексы теплоемкости α, восприимчивости γ, намагниченности β и радиуса корреляции ν. Обсуждается вопрос о классах универсальности критического поведения слабо разбавленных систем.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 07-02-00194, № 96602), грантом научной школы (НШ-5547.2006.2) и грантом Фонда содействия отечественной науке (А.К. Муртазаев).

PACS: 75.40.Cx, 75.40.Mg, 75.50.Ee

1. Введение

Исследование фазовых переходов (ФП) и критических явлений в магнетиках, содержащих примеси и другие дефекты структуры, представляет большой теоретический и экспериментальный интерес [1,2]. Это обусловлено тем, что большинство реальных твердых тел содержит примеси и другие дефекты структуры, присутствие которых влияет на их термодинамические характеристики и, в частности, может существенно влиять на поведение систем при ФП. Поэтому в последнее время усилия многих исследователей были направлены на понимание того, как те или иные дефекты структуры влияют на поведение различных систем при ФП. При исследовании критических свойств неупорядоченных спиновых систем различают системы с вмороженными и отожженными примесями. В твердых телах примеси обычно являются вмороженными. Присутствие вмороженных примесей проявляется в виде случайных возмущений локальной критической температуры, а в случае спиновых систем, испытывающих в однородном состоянии ФП первого рода, приводит к смягчению этого перехода вплоть до индуцирования в них ФП второго рода.

В настоящее время наиболее интересным является исследование влияния именно вмороженных примесей на критические свойства спиновых систем, так как присутствие отожженных примесей приводит к тривиальным результатам в критической области [2]. Исследования [3] показали, что присутствие вмороженных примесей изменяет при ФП свойства лишь тех магнетиков, теплоемкость которых в однородном состоянии испытывает расходимость в критической точке. В противном случае присутствие примесей не сказывается на поведении магнетиков при критической температуре. Данному критерию удовлетворяют только системы, эффективный гамильтониан которых вблизи критичекой точки изоморфен модели Изинга. Исследованию критических свойств неупорядоченной модели Изинга в последнее время было посвящено значительное число работ [4–9]. Для разбавленных изингоподобных систем было получено хорошее согласие теоретических расчетов с результатами эксперимента и численного исследования методом Монте-Карло (МК).

Несмотря на интенсивные теоретические исследования спиновых решеточных систем с вмороженным беспорядком в течение последних двадцати лет, к настоящему времени существует совсем немного надежно установленных данных о поведении указанных систем, для которых в чистом состоянии наблюдается слабо выраженный ФП первого рода. Известно, что в чистой модели Поттса с состоянием $q > q_c(d)$, где d — размерность системы, наблюдается ФП первого рода, а ФП второго рода происходит в случае $q < q_c(d)$. Для двумерной модели Поттса величина $q_c(d = 2) = 4$ [10,11], в то время как для трехмерной модели $q_c(d = 3) = 2.45$ [12]. При этом для $q_c(d = 2) = 4$ наблюдается ФП второго рода, а для $q_c(d = 3) = 2.45$ — слабо выраженный ФП первого рода. К настоящему времени также известно, что присутствие вмороженного беспорядка в модели Поттса с состоянием $q > q_c$ может изменить порядок ФП. В работах [13,14] было строго доказано, что для низкоразмерных систем $d \leq 2$, описываемых моделью Поттса с $q > q_c(d)$, наличия сколь угодно малой величины вмороженного беспорядка достаточно, чтобы изменить

ФП первого рода на ФП второго рода. Исследования, проведенные на основе $3d$-модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$, в которой беспорядок реализован в виде вмороженных случайных ферромагнитных связей, выявили, что ниже концентрации ферромагнитных связей $p \approx 0.8$ наблюдается ФП второго рода, а выше — первого рода [15].

Что касается трехмерной „слабо разбавленной“ модели Поттса с $q = 3$, то к настоящему времени критическое поведение этой модели не исследовано достаточно полно, с соблюдением единого методического подхода, не установлен класс универсальности критического поведения, особенно когда беспорядок реализован в виде вмороженных немагнитных примесей каноническим способом.

В настоящей работе методом МК исследовано влияние вмороженных немагнитных примесей на ФП в трехмерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$. Огромный интерес к этой модели обусловлен следующими основными причинами.

Во-первых, модель Поттса служит основой теоретического описания ряда разнообразных объектов и явлений в физике конденсированных сред. К их числу относятся сложные анизотропные ферромагнетики кубической структуры, многокомпонентные сплавы и жидкие смеси. Структурные фазовые переходы в некоторых материалах, таких как $SrTiO_3$, относятся к классу универсальности модели Поттса с состоянием спина $q = 3$ [16]. Во-вторых, исследование влияния вмороженного беспорядка на универсальные характеристики критического поведения помимо практического представляет и большой академический интерес [17]. В-третьих, первые попытки исследования этой модели методами вычислительной физики предпринимались в то время, когда мощности вычислительных машин и используемые алгоритмы метода МК не позволяли рассчитывать критические параметры с необходимой степенью точности.

2. Трехмерная модель Поттса с вмороженным беспорядком

Приведем здесь формулировку трехмерной разбавленной модели Поттса с состоянием $q = 3$. В рассматриваемой нами модели примеси распределены каноническим способом [2]. При построении такой модели необходимо иметь в виду следующие особенности.

1) В узлах кубической решетки расположены спины S_i, которые могут находиться в одном из $q \geq 2$ состояний, и немагнитные примеси (вакансии). Немагнитные примеси распределены случайно и фиксированы на различных узлах решетки (quenched disorder).

2) Энергия связи между двумя узлами равна нулю, если они находятся в разных состояниях (безразлично, в каких именно) или если хотя бы в одном узле находится немагнитный атом, и равна $|J|$, если взаимодействующие узлы находятся в одинаковых состояниях (все равно, в каких именно).

С учетом этих особенностей микроскопический гамильтониан такой системы может быть представлен в виде

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{i,j} \rho_i \rho_j \delta(S_i, S_j), \quad S_i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где

$$\delta(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j, \\ 0, & \text{если } S_i \neq S_j, \end{cases}$$

$$\rho_i = \begin{cases} 1, & \text{если в узле расположен спин,} \\ 0, & \text{если в узле расположена} \\ & \text{немагнитная примесь.} \end{cases}$$

3. Методика исследования

Кластерные алгоритмы метода МК [18–20] оказались мощными и весьма эффективными инструментами исследования критических явлений в различных системах и моделях [21–23]. Критические параметры, рассчитанные на основе данных, полученных с помощью кластерных алгоритмов, обладают высокой точностью и надежностью [21]. Из всех вариантов кластерных алгоритмов метода МК наиболее эффективным на сегодняшний день является алгоритм Вольфа [18]. Этот алгоритм был реализован нами для исследования разбавленной модели Поттса в следующем виде.

1) Три случайных числа задают координаты i, j, k узла на решетке. Если в этом узле находится немагнитная примесь, то генерируются новые случайные числа до тех пор, пока не будут сгенерированы координаты магнитного спина S_i.

2) Рассматриваются все ближайшие соседи S_j данного спина S_i. Если соседний узел занят спином, то с вероятностью

$$P = 1 - \exp(-K), \tag{2}$$

где $K = J/k_B T$, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, активируется связь между S_i и S_j, если S_i и S_j имеют одинаковые значения при $J > 0$. Заметим, что в случае модели Поттса для выражения вероятности включения спина в кластер показатель 2 в экспоненте, характерный для соответствующей вероятности $P = 1 - \exp(-2K)$ модели Изинга, исчезает. Таким образом, можно утверждать, что модель Поттса с состоянием спина $q = 2$ эквивалентна модели Изинга с точностью численного фактора 2 в обменной константе J.

3) Если связь между спинами S_i и S_j активируется, то спин в узле j включается в кластер. Следует отметить, что один и тот же спин может быть включен в кластер только один раз, тогда как проверен на включение в кластер несколько раз.

4) После проверки всех ближайших соседей выбранного спина i первый включенный в кластер спин становится „центральным“, и начинается процесс активации связей этого спина с ближайшими соседями. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут проверены

все ближайшие соседи всех вошедших в кластер спинов или достигнуты границы системы.

5) Все спины, между которыми установлена связь, образуют „кластер“.

6) Полученный кластер переворачивается с вероятностью, равной единице. Переворот кластера в случае модели Поттса означает присвоение всем спинам, вошедшим в кластер, нового значения S'_i, которое отлично от старого значения S_i, с равной вероятностью среди всех состояний q. Затем переходим к пункту 2.

Об эффективности однокластерного алгоритма Вольфа применительно к модели Поттса можно судить по критическому индексу z, характеризующему эффективность используемого алгоритма. В частности, исследование чистой двумерной модели Поттса с $q = 3$ на основе однокластерного алгоритма Вольфа показало, что критический индекс $z = 0.60 \pm 0.02$, в то время как использование классического алгоритма Метрополиса дает значение $z \approx 2$ [20].

По описанному выше алгоритму Вольфа [18] реализовался марковский процесс для систем с периодическими граничными условиями и концентрациями спинов $p = 1.0$, 0.9, 0.8, 0.7. Исследовались системы с линейными размерами $L \times L \times L = N$, $L = 20-44$. Начальные конфигурации задавались таким образом, чтобы все спины были упорядочены вдоль оси z. Для вывода системы $p = 1.0$ в состояние термодинамического равновесия отсекался неравновесный участок длиной $1.5 \cdot 10^6$ MC steps/spin (здесь 1 MC step/spin (1 MK шаг/спин) — это один переворот кластера) и осуществлялось усреднение по пяти различным начальным конфигурациям. Для системы с концентрациями магнитных узлов $p = 0.9$, 0.8, 0.7 отсекаемый участок составлял соответственно $2 \cdot 10^6$, $3 \cdot 10^6$, $4 \cdot 10^6$ MC steps/spin, а усреднение выполнялось по 100–300 различным конфигурациям примесей. С уменьшением концентрации магнитных узлов следует учесть, что одновременно растут флуктуации в распределении примесей по решетке, а это в свою очередь требует и увеличения числа примесных конфигураций с различной реализацией беспорядка для усреднения термодинамических параметров. Заметим, что моделирование решеток большого размера требует существенного увеличения объема вычислений для каждой примесной конфигурации.

4. Результаты

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости нами использовались флуктуационные соотношения [24]

$$C = (NK^2)(\langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2), \tag{3}$$

$$\chi = (NK)(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2), \tag{4}$$

где $K = |J|/k_{\mathrm{B}}T$, $N = pL^3$ — число магнитных узлов, U — внутренняя энергия, m — намагниченность системы; угловые скобки означают термодинамическое

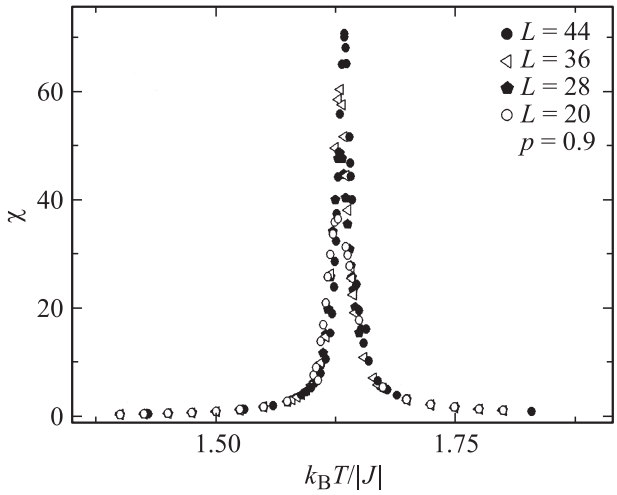

Рис. 1. Температурная зависимость восприимчивости χ для трехмерной „слабо разбавленной“ модели Поттса с $q = 3$ при $p = 0.9$.

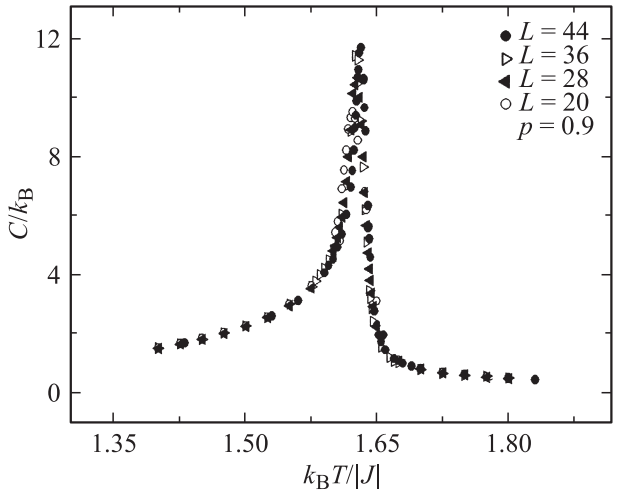

Рис. 2. Температурная зависимость теплоемкости C для трехмерной „слабо разбавленной“ модели Поттса с $q = 3$ при $p = 0.9$.

усреднение. В качестве намагниченности m для разбавленной модели Поттса использовалось следующее выражение [25]:

$$m = \frac{\left[q\left(\frac{N_{\max}}{N}\right) - 1\right]}{q-1}, \tag{5}$$

где $N_{\max} = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, N_1 — число спинов в состоянии с $q = 1$, N_2 — число спинов в состоянии с $q = 2$, N_3 — число спинов в состоянии с $q = 3$.

На рис. 1 и 2 представлены характерные зависимости восприимчивости χ и теплоемкости C от температуры T для трехмерной разбавленной модели Поттса с числом состояний $q = 3$ при $p = 0.9$ для систем с линейными размерами $L = 20$, 28, 36, 44. Здесь и далее на всех рисунках погрешность данных не превосходит размеров

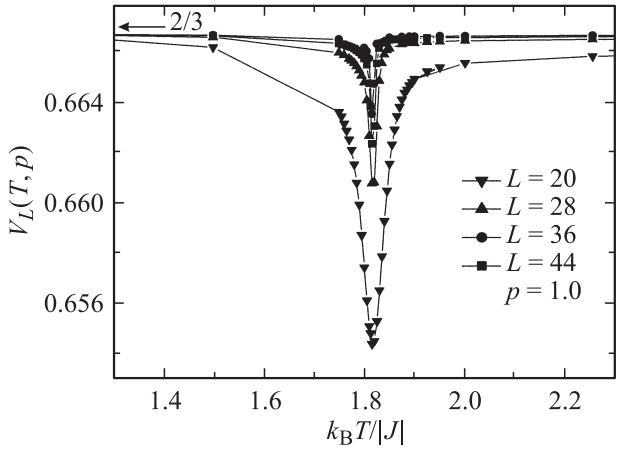

Рис. 3. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $V_L(T, p)$ для трехмерной модели Поттса с $q = 3$ при $p = 1.0$.

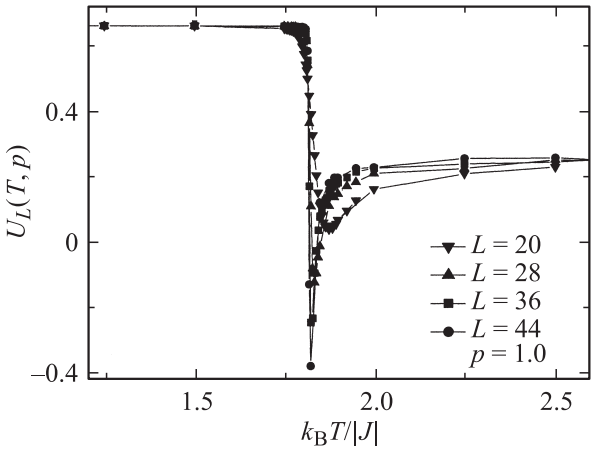

Рис. 4. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $U_L(T, p)$ для трехмерной модели Поттса с $q = 3$ при $p = 1.0$.

символов, используемых для изображения зависимости. Отметим, что в зависимостях восприимчивости χ и теплоемкости C от температуры для всех исследуемых нами систем проявляются четко выраженные максимумы, и эти максимумы в пределах погрешности приходятся на одну температуру.

Для анализа характера ФП нами использовался метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [26,27]

$$V_L(T, p) = 1 - \frac{\langle E^4 \rangle_L}{3\langle E^2 \rangle_L^2}, \tag{6}$$

$$U_L(T, p) = 1 - \frac{\langle m^4(T, p; L) \rangle_L}{3\langle m^2(T, p; L) \rangle_L^2}, \tag{7}$$

где E — энергия и m — намагниченность системы с линейным размером L. Выражения (6) и (7) позволяют с большой точностью определить $T_c(p)$ в ФП первого и второго рода соответственно. Следует отметить, что применение кумулянтов Биндера позволяет также хорошо тестировать тип ФП в системе. Так, в случае ФП первого рода усредненная величина $V_L(T, p)$ стремится к некоторому нетривиальному значению при $L \to \infty$ и $T = T_c(L)$, а минимальная величина $U_{L,\min}(T = T_{\min}, p)$ расходится при $L \to \infty$, что характерно для ФП первого рода [27]. Это и продемонстрировано на рис. 3 и 4 соответственно для исследованной нами трехмерной модели Поттса с числом состояний $q = 3$ в отсутствие вмороженного беспорядка ($p = 1.0$). Кроме того, в случае ФП второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера $U_L(T, p)$ имеют четко выраженную точку пересечения. Характерные зависимости кумулянтов Биндера $U_L(T, p)$ от температуры для систем с разными линейными размерами при $p = 0.9$ приведены на рис. 5. Как видно из рис. 5, в критической области наблюдается четко выраженная точка пересечения, что и свидетельствует о ФП второго рода. Заметим, что вставка к этому рисунку демонстрирует, насколько точно можно определить критическую температуру. Аналогичное поведение температурных зависимостей кумулянтов Биндера $U_L(T, p)$ наблюдалось и для систем с концентрациями спинов $p = 0.8$ и 0.7. Определенные таким образом критические температуры для систем с концентрациями $p = 0.9, 0.8, 0.7$ приведены в таблице.

Из рис. 1 также видно, что пики восприимчивости для систем с концентрацией спинов $p = 0.9$ в пределах погрешности совпадают с критической температурой $T_c(p)$, определенной нами методом кумулянтов Биндера. Это свидетельствует о высокой надежности определения критической температуры.

Для всех рассмотренных систем, в которых наблюдается ФП второго рода, нами на основе теории конечно-размерного скейлинга (КРС) рассчитывались статические критические индексы (КИ) теплоемкости α, восприимчивости γ и намагниченности β. Согласно этой теории, свободная энергия для достаточно большой системы с периодическими граничными условиями при температуре T, близкой к критической температуре T_c бесконечно большой системы, может быть представлена

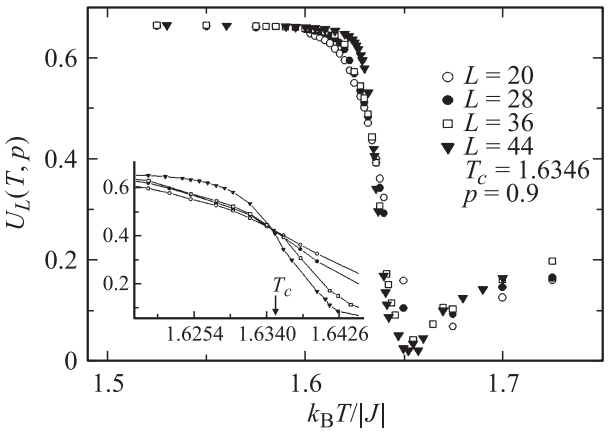

Рис. 5. Температурная зависимость кумулянтов Биндера $U_L(T, p)$ для трехмерной „слабо разбавленной“ модели Поттса с $q = 3$ при $p = 0.9$.

Критические индексы трехмерной разбавленной модели Поттса с числом состояний $q = 3$, определенные на основе теории конечно-размерного скейлинга

p	$k_B T_c/J$	ν	α	γ	β	$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
0.9	1.634(6)	0.671(5)	−0.008(5)	1.275(5)	0.365(5)	1.997
0.8	1.449(7)	0.679(5)	−0.018(6)	1.279(5)	0.372(5)	2.005
0.7	1.245(8)	0.684(8)	−0.025(9)	1.281(6)	0.374(6)	2.004

в виде [28]

$$F(T, L) \propto L^{-d} F_0(tL^{1/\nu}), \tag{8}$$

где $t = |T - T_c|/T_c$, $T_c = T_c(L = \infty)$ и ν — статический критический индекс радиуса корреляции бесконечной системы ($L = \infty$).

Уравнение (8) ведет к аналогичным уравнениям для теплоемкости, восприимчивости и спонтанной намагниченности, приходящихся на один спин,

$$C(T, L) \propto L^{a/\nu} C_0(tL^{1/\nu}), \tag{9}$$

$$\chi(T, L) \propto L^{\gamma/\nu} \chi_0(tL^{1/\nu}), \tag{10}$$

$$m(T, L) \propto L^{-\beta/\nu} m_0(tL^{1/\nu}), \tag{11}$$

где α, γ, β — статические критические индексы для системы с $L = \infty$, связанные соотношением гиперскейлинга $2 - \alpha = d\nu = 2\beta + \gamma$ [29].

Кроме того, в настоящее время на основе теории КРС предложен целый ряд способов определения критического индекса радиуса корреляции ν [30,31]. В соответствии с этой теорией в точке ФП выполняется соотношение

$$V_n = L^{1/\nu} g_{V_n}, \tag{12}$$

где g_{V_n} — некоторая постоянная, а в качестве V_n могут выступать

$$V_i = \frac{\langle m^i E \rangle}{\langle m^i \rangle} - \langle E \rangle, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{13}$$

$$V_3 = \frac{dU_L}{d\beta} = \frac{1}{3\langle m^2 \rangle^2} \left[\langle m^4 \rangle \langle E \rangle - 2 \frac{\langle m^4 \rangle \langle m^2 E \rangle}{\langle m^2 \rangle^2} + \langle m^4 E \rangle \right], \tag{14}$$

где $\beta = 1/T$; T — температура.

Из соотношений (10), (11) следует, что в системе размером $L \times L \times L$ при $T = T_c$ и достаточно больших L восприимчивость и намагниченность удовлетворяют следующим аналитическим выражениям:

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu}, \tag{15}$$

$$m \sim L^{-\beta/\nu}. \tag{16}$$

Эти соотношения использовались нами для определения величин γ и β.

Аналогичное выражения для теплоемкости не описывает наблюдаемые на практике результаты, что было продемонстрировано в работе [22]. Для аппроксимации температурной зависимости теплоемкости от L, как правило, используются другие выражения, например [23,24]

$$C_{\max}(L) = C_{\max}(L = \infty) - AL^{\alpha/\nu}, \tag{17}$$

где A — некоторый коэффициент.

Для расчета КИ α, β, γ и ν строились зависимости C, m, χ, и V_n от L. Анализ данных, выполненный с использованием нелинейного метода наименьших квадратов, позволил определить значения α/ν, β/ν, γ/ν и $1/\nu$. Затем с использованием значений ν, полученных в рамках данного исследования, определялись индексы α, β и γ.

На рис. 6 в двойном логарифмическом масштабе представлена характерная зависимость восприимчивости от линейных размеров решетки L для концентрации спинов $p = 0.9$. Обратим внимание на то, что данные, полученные для восприимчивости, не отклоняются от прямой даже при малых значениях L. Очевидно, что использованные нами для усреднения количество примесных конфигураций и размеры $L \geq 20$ изучаемых систем позволяют достичь асимпотического критического режима. Очень важным моментом является и то, что нами индекс ν вычислялся непосредственно из результатов численного эксперимента в рамках данного исследования, тогда как во многих других работах этот индекс определялся из различных скейлинговых соотношений.

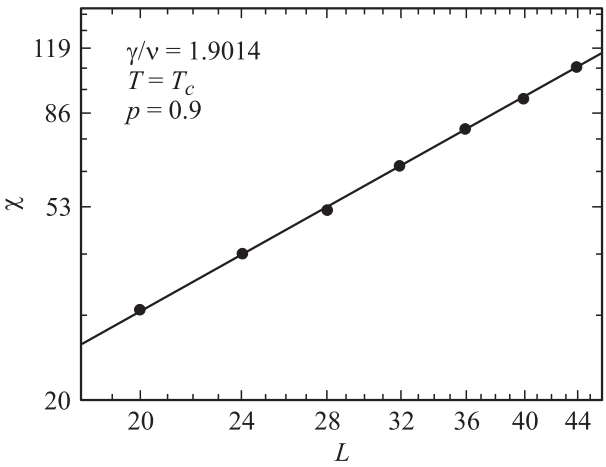

Рис. 6. Зависимость восприимчивости χ от линейных размеров системы L для трехмерной „слабо разбавленной“ модели Поттса с $q = 3$ при $T = T_c$ и $p = 0.9$.

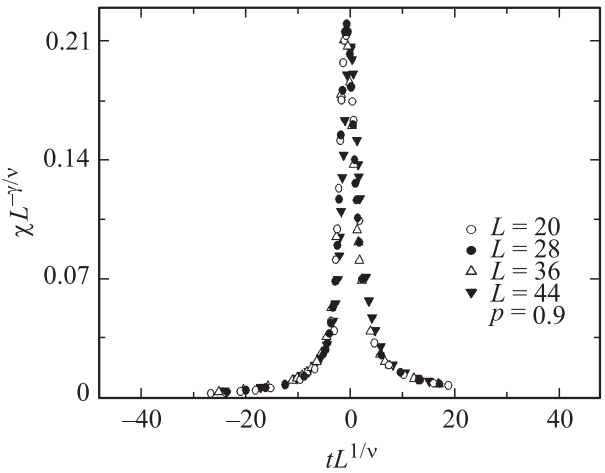

Рис. 7. Конечно-размерное масштабирование восприимчивости χ для трехмерной „слабо разбавленной“ модели Поттса с $q = 3$ при $p = 0.9$.

Значения КИ для различных концентраций спинов p, полученные при соответствующем $\nu(p)$, представлены в таблице. Как видно из таблицы, полученные значения КИ достаточно хорошо согласуются друг с другом в пределах погрешности численного эксперимента для различных спиновых концентраций $p = 0.9$, 0.8, 0.7 и удовлетворяют скейлинговым соотношениям. Результаты для КИ радиуса корреляции ν для трехмерной слабо разбавленной модели Поттса с состоянием $q = 3$ при концентрациях $p = 0.9$, 0.8 и 0.7 удовлетворяют также соотношению $\nu \geq 2/d \approx 0.667$, полученному в работе [32] для неупорядоченных d-мерных систем, и близки к значению 0.690(5), полученному в работе [33] для трехмерной неупорядоченной модели Поттса с $q = 3$, в которой вмороженные немагнитные примеси внесены большим каноническим способом.

Согласно теории КРС, соотношения (9)–(11) снимают все эффекты, связанные с малостью системы. При правильно вычисленных значениях критических параметров зависимости намагниченности m, восприимчивости χ и теплоемкости C от скейлинговой переменной $y = tL^{1/\nu}$ после масштабирования выражениями (2)–(4) должны укладываться на одну кривую.

На рис. 7 представлена скейлинговая функция для восприимчивости трехмерной разбавленной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$ при $p = 0.9$. Как видно из рисунка, все данные в пределах погрешности укладываются на одну кривую, что говорит о правильности определения критических параметров.

5. Заключение

В настоящей работе с соблюдением единой методики исследовано влияние вмороженных немагнитных примесей, распределенных каноническим способом, на ФП в трехмерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 3$. Полученные в результате тщательных исследований данные позволяют сделать следующие выводы.

1) При концентрациях спинов $p = 0.9$, 0.8 и 0.7 в трехмерной разбавленной модели Поттса с состоянием $q = 3$ наблюдается ФП второго рода, в то время как для чистой модели Поттса ($p = 1.0$) наблюдается поведение, характерное для ФП первого рода.

2) Данные, представленные в таблице, показывают, что численные значения КИ, рассчитанные в области ФП второго рода на фазовой диаграмме для этой модели, в пределах погрешности численного эксперимента достаточно хорошо согласуются друг с другом и подтверждают универальность критического поведения трехмерных слабо разбавленных систем.

Список литературы

[1] Ш. Ма. Современная теория критических явлений. Мир, М. (1980). 198 с.
[2] Р. Фольк, Ю. Головач, Т. Яворский. УФН **173**, 175 (2003).
[3] A.B. Harris. J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
[4] Б.Н. Шалаев. ЖЭТФ **72**, 962 (1977).
[5] K. Hukushima. J. Phys. Soc. Jap. **69**, 631 (2000).
[6] H.-O. Heuer. Phys. Rev. B **42**, 6476 (1990).
[7] H.-O. Heuer. J. Phys. A **22**, L 333 (1993).
[8] S. Wiseman, E. Domany. Phys. Rev. E **52**, 3469 (1995).
[9] H.G. Ballesteros, L.A. Fernández, V. Martin-Mayor, A. Muñoz Sudupe, G. Parisi, J.J. Ruiz-Lorenzo. Phys. Rev. B **58**, 2740 (1998).
[10] M. Loulidi. Physica A **287**, 177 (2000).
[11] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. Мир, М. (1985). 351 с.
[12] A.J. Guttmann, I.G. Enting. J. Phys. A **27**, 5801 (1994).
[13] M. Aizenman, J. Wehr. Phys. Rev. Lett. **62**, 2503 (1989).
[14] K. Hui, A.N. Berker. Phys. Rev. Lett. **62**, 2507 (1989).
[15] C. Chatelain, B. Berche, W. Janke, P.-E. Berche. Nucl. Phys. B **719/3**, 275 (2005).
[16] F.Y. Wu. Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).
[17] Вик.С. Доценко. УФН **165**, 481 (1995).
[18] U. Wolff. Phys. Lett. **62**, 361 (1989).
[19] J.-S. Wang, R.H. Swendsen. Physica A **167**, 565 (1990).
[20] G.T. Barkema, M.E.J. Newman. Cond-mat/9703179.
[21] А.К. Муртазаев, И.К. Камилов, А.Б. Бабаев. ЖЭТФ **126**, 1377 (2004).
[22] А.К. Муртазаев, И.К. Камилов, М.А. Магомедов. ЖЭТФ **120**, 1535 (2001).
[23] S. Wiseman, E. Domany. Phys. Rev. E **58**, 2938 (1998).
[24] P. Peczac, A.M. Ferrenberg, D.P. Landau. Phys. Rev. B **43**, 6087 (1991).
[25] C. Chatelain, B. Berche. Phys. Rev. Lett. **80**, 1670 (1998).
[26] K. Binder. Phys. Rev. Lett. **47**, 693 (1981).
[27] K. Eichhorn, K. Binder. J. Phys.: Cond. Matter **8**, 5209 (1996).
[28] M.E. Fisher, M.N. Barber. Phys. Rev. Lett. **28**, 1516 (1972).
[29] А.З. Паташинский, В.А. Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. Наука, М. (1982).
[30] A. Mailhot, M.L. Plumer, A. Caille. Phys. Rev. B **50**, 6854 (1994).
[31] D. Loison. Phys. Lett. A **257**, 83 (1999).
[32] J.T. Chayes, L. Chayes, D.S. Fisher, T. Spencer. Phys. Rev. Lett. **57**, 2999 (1986).
[33] H.G. Ballesteros, L.A. Fernández, A. Muñoz Sudupe, G. Parisi, J.J. Ruiz-Lorenzo. Phys. Rev. B **61**, 3215 (2000).