Письма в ЖТФ, том 17, вып. 11 12 июня 1991 г.

09; 10

УРАВНЕНИЯ АВ-ТИПА ДЛЯ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМ С ВОЛНОВЕДУЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

Ю.Н. Зайко

Изучение явлений в электронном потоке (ЭП), взаимодействующем с волноведущей структурой (ВС), методами теории солитонов позволяет глубже понять их физику и в ряде случаев получить принципиально новые результаты. В работе [1] методом многомасштабной теории возмущений [2] уравнения, описывающие рассматриваемую систему, были сведены к уравнению Кортевега-де-Вриза в пренебрежение неустойчивостью системы. Последний фактор наряду с дисперсией и нелинейностью является принципиальным, т.е. определяет динамику развития произвольного начального или граничного возмущения. В настоящей работе проведен последовательный анализ задачи с учетом всех факторов, перечисленных выше, в рамках известной методики [3].

Исходная система уравнений, как и в [1], имеет вид:

$$v_t + v v_x - \frac{e}{m}(\varphi + V)_x = 0; \quad n_t + (nv)_x = 0; \quad \varphi_{xx} - \varkappa^2 \varphi = \\ = 4\pi e(n - n_0); \quad V_x + L I_t = 0; \quad C V_t + I_x + S e n_t = 0. \tag{1}$$

Три первых уравнения описывают электронный поток, характеризуемый скоростью v, плотностью n и потенциалом φ. Уравнение Пуассона записано в приближении $r \ll R$, где r – радиус потока, R – радиус ВС. Как показано в работе [4], $\varkappa^2 = 4\pi \frac{C_1}{S}$, где S – площадь сечения пучка, C_1 – емкость на единицу длины системы ЭП–ВС. Последние два уравнения описывают ВС как длинную линию без затухания с емкостью C и индуктивностью L на единицу длины; V и I – напряжение и ток в линии. Удобно исключить I и записать уравнение ВС в виде $V_{xx} - LCV_{tt} - LSen_{tt} = 0$.

Введем формальные разложения [3]:

$$n = n_0 + \sum_{i=1} \varepsilon^i n_i; \quad v = v_0 + \sum_{i=1} \varepsilon^i v_i; \quad \varphi = \sum_{i=1} \varepsilon^i \varphi_i, \quad V = \sum_{i=1} \varepsilon^i V_i, \\ \frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial X_i}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1} \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad \varepsilon \ll 1. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим в каждом порядке по ε свою систему уравнений. В первом порядке система совпадает с линеаризованной системой (1). Запишем ее в символическом виде $\hat{L}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})\psi_1 = 0$. Здесь ψ_1 – вектор-столбец с компонентами n_1, v_1, φ_1 и V_1; вид дифференциального оператора $\hat{L}$ легко установить из (1). Условием разрешимости уравнений первого порядка является $\Delta_1 = det\|\hat{L}(k,\omega)\| = 0$; k, ω – волновое число и частота, $\psi_1 \sim e^{i(kx-\omega t)}$. Приведем явный вид Δ_1:

$$\Delta_1 = (k^2+\varkappa^2)\left\{\left[(kv_0-\omega)^2-\tilde{\omega}_p^2\right](LC\omega^2-k^2)-\frac{\omega_p^2}{4\pi}LS\omega^2k^2\right\}, \qquad (3)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}, \quad \tilde{\omega}_p^2 = \frac{\omega_p^2 k^2}{k^2+\varkappa^2}.$$

Выражение (3) встречается в теории лампы с бегущей волной, описывая взаимодействие быстрой и медленной волн в потоке с прямой и обратном волной в ВС. Замена ω_p на $\tilde{\omega}_p$ соответствует редукции плазменной частоты за счет сил изображения в экране в длинноволновом приближении [1]. В соответствии с (3) представим ψ_1 в виде:

$$\psi_1 = b(k,\omega)\cdot A(X_1,T_1)e^{i\tilde{\theta}_c}; \quad \theta_c = k_c x - \omega_c t + \delta,$$
$$b(k,\omega) = \left(1, -\frac{kv_0-\omega}{kn_0}, -\frac{4\pi e}{k^2+\varkappa^2}, -\frac{LSe\omega^2}{LC\omega^2-k^2}\right)^T. \qquad (4)$$

Здесь Т – значок транспонирования, $A(X_1, T_1)$ – скалярная функция медленных переменных, имеющая размерность плотности. Величины k_c и ω_c выберем позже. Уравнения второго порядка имеют вид $\hat{L}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})\psi_2 = -i\left\{\hat{L}_\omega(k,\omega)\frac{\partial A}{\partial T} - \hat{L}_k(k,x)\frac{\partial A}{\partial X_1}\right\}be^{i\theta} +$ + к. с. + ... , где многоточием обозначены нелинейные члены, составленные из произведений величин первого порядка; $\psi_2 = (n_2, v_2, \varphi_2, V_2)^T$; $\hat{L}_\alpha$ и $\hat{L}_k$ – матрицы 4х4, каждый элемент которых получается дифференцированием соответствующего элемента матрицы $\hat{L}(k,\omega)$ по k и ω соответственно. Члены в правой части уравнений второго порядка не приводят к секулярности, если k_c и ω_c выбрать из условий $\Delta_1(k_c,\omega_c) = \frac{\partial\Delta_1(k_c,\omega_c)}{\partial k} = \frac{\partial\Delta_1(k_c,\omega_c)}{\partial\omega} = 0$. Остановимся на этом подробнее. Уравнение $\Delta_1(k,\omega) = 0$ вблизи синхронизма медленной волны в ЭП и прямой волны в ВС приводит к квадратному уравнению для частоты ω. Из условия $Im\,\omega = 0$ получаем уравнение кривой устойчивости $\mu = f(k)$ в плоскости μ, k, где $\mu = v_0 - u_\Lambda$ – управляющий параметр, $u_\Lambda = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – скорость волны в холодной линии:

$$f(k)=\frac{\omega_p}{\sqrt{\varkappa^2+k^2}}\pm\left[\frac{u_\Lambda\omega_p}{4\pi}S\sqrt{\frac{L}{C}}\left(v_0\sqrt{\varkappa^2+k^2}-\omega_p\right)\right]^{1/2}. \qquad (5)$$

Во всех точках этой кривой $\frac{\partial\Delta_1}{\partial\omega}=0$, кроме того, в точке максимума $k=k_c$ $\frac{\partial\Delta_1}{\partial k}=0$. Строго говоря, при $\frac{u_\Lambda\omega_p}{4\pi}S\sqrt{\frac{L}{C}}<\frac{27}{64}\frac{v_0^2}{\omega_p}$ на кривой $f(k)$ есть два экстремума. Настоящее рассмотрение справедливо, если второй экстремум (минимум) оказывается вне полосы неустойчивости для данной надкритичности или вообще вне полосы пропускания прибора. В противном случае, когда на кривой устойчивости нет экстремумов или они расположены настолько близко, что при любой надкритичности их надо учитывать совместно, требуются дополнительные соображения.

Решение уравнений второго порядка имеет вид $\Psi_{2i}=\mathcal{X}_i(2k,2\omega)A^2e^{2i\theta_c}+B_i(X_1,T_1)-\frac{i}{\omega_c}b^T(A_{T_1}+\omega_k A_{X_1})e^{i\theta_c}$ + к.с., $i=1,2,3,4$, где величины $\mathcal{X}_i(2k,2\omega)$ вычисляют согласно стандартной процедуре Крамера решения систем линейных уравнений с внешней силой на частоте 2ω, поскольку $\Delta_2=det\|\hat{L}\ (2k,2\omega)\|\neq 0$; величины $B_i(X_1,T_1)$ возникают как постоянные интегрирования по быстрым переменным x, t. Очевидно, что $B_3=-\frac{4\pi e}{\varkappa^2}B_1$, кроме того, для получения замкнутой системы уравнений необходимо положить $B_4=0$. Групповая скорость ω_k может быть вычислена вблизи синхронизма медленной волны в ЭП с прямой волной в ВС и в пределе малого взаимодействия $\left(\omega_p S\sqrt{\frac{L}{C}}k\ll 1\right)$ совпадает с v_0 при $v_0>u_\Lambda$, что соответствует знаку + в (5).

Запишем уравнения третьего порядка $\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_3=\alpha+\beta e^{i\theta_c}$ + к.с. + ... , где многоточием обозначены члены, не приводящие к секулярности. Величины α и β представляют собой векторы с компонентами:

$$\alpha_1=-\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+v_0\frac{\partial}{\partial X_1}\right)(B_1+B_1^*)-n_0\frac{\partial}{\partial X_1}(B_2+B_2^*)+2\frac{kv_0-\omega}{kn_0}\frac{\partial}{\partial X_1}|A|^2;$$

$$\alpha_2=-\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+v_0\frac{\partial}{\partial X_1}\right)(B_2+B_2^*)-\frac{4\pi e^2}{m\varkappa^2}(B_1+B_1^*)-\left(\frac{kv_0-\omega}{kn_0}\right)^2\frac{\partial}{\partial X_1}|A|^2;\ \alpha_3=\alpha_4=0;$$

$$\beta_1=\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\omega_k\frac{\partial}{\partial X_1}\right)A-ik\Big[\left(\mathcal{X}_2-\mathcal{X}_1\frac{kv_0-\omega}{kn_0}\right)|A|^2+$$
$$+B_2+B_2^*-\frac{kv_0\,\omega}{kn_0}(B_1+B_1^*)\Big]A;$$

$$\beta_2=-i\frac{k v_0-\omega}{k n_0}\left\{\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\frac{\omega}{k}\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+\omega_k\frac{\partial}{\partial X_1}\right)A-k\left[\varkappa_2|A|^2+B_2+B_2^*\right]A;\right.$$

$$\beta_3=\frac{4\pi e}{\varkappa^2+k^2}\left\{2\frac{k}{\omega}A_{T_1X_1}+\left(1+2\frac{k}{\omega}\omega_k\right)A_{X_1X_1}\right\},$$

$$\beta_4=\frac{LSe\omega^2}{LC\omega^2-k^2}\left\{2\left(\frac{k}{\omega}+LC\omega_k\right)A_{X_1T_1}+\left(1+2\frac{k}{\omega}\omega_k\right)A_{X_1X_1}+LCA_{T_1T_1}\right\}- \tag{6}$$

$$-LSeA_{T_1T_1}-2LSe\omega_kA_{X_1T_1},\quad k=k_c,\quad \omega=\omega_c=\omega(k_c).$$

Устранить „опасные" члены в уравнениях третьего порядка можно положив $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ и наложив на β_i условие $\sum_{i=1}^{4}L^A_{ji}\,(\omega,k)\beta_i=0$ (j – произвольно), где $\hat{L}^A(\omega,k)$ – матрица, составленная из алгебраических дополнений матрицы $\hat{L}(\omega,k)$. В том, что $\det\hat{L}^A=0$, иными словами, в том, что произвол j не играет роли, легче всего убедиться, приведя линейным преобразованием матрицы $\hat{L}(\omega,k)$ к виду, в котором элементы какой-либо строки равны нулю. Чтобы представить структуру последнего уравнения, приведем его вид в пределе слабого взаимодействия ЭП и ВС. В этом пределе $\beta_{3,4}$ малы и, кроме того, $\frac{\omega}{k}\simeq u_A$, $\omega_k\simeq v_0$. Окончательно имеем:

$$\frac{1}{k_c\omega_c}\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+u_A\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial T_1}+v_0\frac{\partial}{\partial X_1}\right)A-\left(\varkappa_2-\frac{1}{2}\varkappa_1\frac{v_0-u_A}{n_0}\right)|A|^2A+$$

$$+(B_2+B_2^*)A+\frac{1}{2}\frac{v_0-u_A}{n_0}(B_1+B_1^*)A=0. \tag{7}$$

Полученные таким образом условия представляют собой систему трех амплитудных уравнений в медленных переменных относительно величин A, B_1 и B_2, позволяющую описать энергообмен между низкочастотным „фоном" и волной $\sim e^{i\theta_c}$, что представляет интерес с точки зрения исследования сложных, в том числе и стохастических, режимов в приборах СВЧ.

Список литературы

[1] Зайко Ю.Н. // ЖТФ. 1987. Т. 57. В. 3. С. 577.

[2] Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов / Пер. с англ. под ред. В.Е. Захарова. М.: Мир, 1983. 294 с.

[3] Д о д д Р., Э й л б е к Дж., Г и б б о н Дж., М о р р и с Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Пер. с англ. под ред. А.Б. Шабата. М.: Мир, 1988. 695 с.
[4] Р у т к е в и ч Б.Н., П а щ е н к о А.В., Ф е д о р ч е н к о В.Д., М у р а т о в В.И. // ЖТФ. 1972. Т. 42. В. 3. С. 493.

Поступило в Редакцию
20 декабря 1990 г.