Магнитный момент кольца Волкано

© В.А. Маргулис, В.А. Миронов

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
430000 Саранск, Россия

E-mail: theorphysics@mrsu.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 4 мая 2007 г.)

Получены явные аналитические выражения для магнитного момента и незатухающего тока кольца Волкано. Изучена зависимость магнитного момента от магнитных полей и температуры. Найдены периоды осцилляций и рассмотрены предельные случаи сильных и слабых полей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-02-16145).

PACS: 75.75.+a, 73.21.La

1. Введение

Наноструктуры, имеющие геометрию кольца, представляют значительный интерес, так как открывают уникальные возможности для изучения квантовых интерференционных эффектов, таких, например, как незатухающий ток и эффект Ааронова–Бома. Отметим, что хотя простейшая одномерная (1D) модель кольца и сыграла важную роль в понимании квантовых интерференционных эффектов, она не в состоянии объяснить ряд эффектов, наблюдаемых экспериментально [1–8]. В связи с этим подчеркнем, что конечная ширина кольца является одним из самых важных факторов, которые приводят к сложности в понимании реальных экспериментов. В кольце с конечной шириной проявляются два важных эффекта. Во-первых, в случае рассмотрения незатухающего тока важен многоканальный режим транспорта. Во-вторых, при наличии внешнего однородного магнитного поля существенную роль может играть проникновение магнитного поля в проводящую область кольца.

Для описания электронных свойств колец использовались различные модели. В частности, к простейшим моделям колец можно отнести модель двумерной или трехмерной проволоки с периодическими граничными условиями [9–18]. Используются и более сложные модели для описания конфайнмента кольца, такие как потенциал Хилла, а также потенциал Волкано [19].

Использование таких моделей кольца в теоретических исследованиях обусловлено тем, что они позволяют получить простые аналитические выражения для электронного спектра колец при наличии внешнего магнитного поля и далее найти явные аналитические выражения для магнитного момента и назатухающего тока в этой наносистеме.

Подобные квантовые кольца изготавливаются на основе гетероструктур, например AlGaAs–GaAs-гетероструктуры [20,21], в которых формируется двумерный электронный газ. Однако экспериментально затруднительно определить явный вид потенциала, описывающий конфайнмент кольца. Но тем не менее о применимости той или иной модели для описания колец можно судить при сравнении экспериментальных данных и теоретических результатов. Потенциал в модели Волкано успешно использовался для объяснения биений в осцилляциях Ааронова–Бома, которые экспериментально наблюдались в двумерном полупроводниковом кольце [22,23]. В таких кольцах движение электронов вдоль одного направления (ось Oz), перпендикулярного плоскости самого кольца, „заморожено“ в основном состоянии сильным поверхностным потенциалом, поскольку толщина кольца намного меньше, чем внутренний и внешний радиусы кольца. Поэтому в плоскости кольца образуется двумерный электронный газ.

В простейших моделях изменение величины магнитного поля изменяет фазы электронов, что дает в результате периодические мезоскопические осцилляции в электронных свойствах (осцилляции Ааронова–Бома) и незатухающий ток I, который связан с магнитным моментом кольца M линейным соотношением $I = cM/S$, где S — площадь области кольца. Поведение реальных колец хорошо описывается простыми моделями только в случае достаточно сильных магнитных полей, т. е. когда магнитный конфайнмент сильнее геометрического [19]. Отметим, что проникновение магнитного поля в проводящую область кольца может приводить к непериодическим осцилляциям типа биений.

Подчеркнем, что, за исключением [18], в литературе не были получены явные аналитические выражения для магнитного момента и незатухающего тока в кольце с конечной шириной при $T \neq 0$. Такие выражения позволили бы определить форму и период осцилляций и зависимость исследуемых величин от температуры T. В частности, в [19] рассмотрены магнитный момент и незатухающий ток кольца в модели Волкано при $T = 0$, но удобные для аналитического исследования выражения не получены и исследование проводилось только численными методами.

Целью настоящей работы является получение явных зависимостей магнитного момента и назатухающего тока в кольце с потенциалом конфайнмента Волкано при $T \neq 0$, а также аналитическое исследование этих выражений. В отличие от [19] в работе рассматривается неизолированное кольцо.

2. Термодинамический потенциал и магнитный момент

Мы рассматриваем свободный бесспиновый электрон в двумерном кольце, которое описывается радиальным потенциалом Волкано [19]:

$$V(r) = \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0. \qquad (1)$$

Используя результаты [19], можно получить

$$V(r) = \frac{m^*\omega_0^2}{2}\left(r - \frac{r_0^2}{r}\right)^2, \qquad (2)$$

где ω_0 — характеристическая частота потенциала, m^* — эффективная масса электрона.

Как следует из [19], внешний (r_+) и внутренний (r_-) радиусы кольца на уровне Ферми имеют вид

$$r_\pm = r_0\left(1 + \varepsilon_f \pm \sqrt{2\varepsilon_f + \varepsilon_f^2}\right)^{1/2}, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_f = E_\mathrm{F}/(m^*\omega_0^2 r_0^2)$, E_F — энергия Ферми, r_0 — средний радиус кольца.

Электронный энергетический спектр для кольца Волкано найден в [19]:

$$E_{nm} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \sqrt{m^2 + \rho_0^4}\,\frac{\hbar\omega}{2} - m\,\frac{\hbar\omega_c}{2} - \hbar\omega_0\rho_0^2, \qquad (4)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\omega = \sqrt{4\omega_0^2 + \omega_c^2}$, ρ_0 — средний радиус, выраженный в единицах $\sqrt{\hbar/(m^*\omega_0)}$, ω_c — циклотронная частота.

Магнитный момент M электронов кольца, когда химический потенциал $\mu = \mathrm{const}$ (неизолированное кольцо), будем искать по стандартной формуле

$$M = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial B}\right)_{\mu,T}, \qquad (5)$$

где Ω — термодинамический потенциал, который можно найти с помощью классической статсуммы Z:

$$Z^{-1} = \sum_{n,m}\exp\left(-\frac{E_{nm}}{T}\right) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{T}\right)\right]\exp\left(\frac{\hbar\omega_0\rho_0^2}{T}\right) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2T}\sqrt{m^2+\rho_0^4} + \frac{\hbar\omega_c}{2T}\,m\right). \qquad (6)$$

Вычислим суммы рядов в (6) в предположении, что при $m \neq 0$ $\sqrt{m^2 + \rho_0^4} \simeq |m|$. Данное условие хорошо выполняется для $\rho_0 \lesssim 1/2$, т.е. для случая, когда $r_+ \gg r_-$, что соответствует широким квантовым кольцам. Представим Z^{-1} в виде суммы трех членов

$$Z^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1} + Z_3^{-1},$$

которые имеют вид

$$Z_1^{-1} = \frac{\exp[(\varepsilon_1 - \varepsilon)/T]}{2\sinh[\hbar\omega/(2T)]}, \qquad (7)$$

$$Z_2^{-1} = \frac{\exp[(\varepsilon_2 - \varepsilon)/T]}{4\sinh[\hbar\omega/(2T)]\sinh[\hbar\omega_2/(2T)]}, \qquad (8)$$

$$Z_3^{-1} = \frac{\exp[(\varepsilon_3 - \varepsilon)/T]}{4\sinh[\hbar\omega/(2T)]\sinh[\hbar\omega_3/(2T)]}, \qquad (9)$$

где для удобства введены следующие обозначения:

$$\omega_2 = \frac{\omega - \omega_c}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\omega + \omega_c}{2},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \hbar\omega_0\rho_0^2 - \frac{\hbar\omega}{2}\rho_0^2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon + \hbar\omega_0\rho_0^2 - \frac{\hbar\omega_2}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon + \hbar\omega_0\rho_0^2 - \frac{\hbar\omega_3}{2}.$$

Для нахождения термодинамического потенциала воспользуемся формулой [24]

$$\Omega = -\int_0^\infty d\varepsilon\,\frac{\exp[(\mu-\varepsilon)/T]}{1+\exp[(\mu-\varepsilon)/T]} \times \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} Z^{-1}(\xi)\exp(\varepsilon\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right\}, \qquad (10)$$

где $0 < a < 1/T$, $\xi = 1/T$.

Удобно обозначить выражение в фигурных скобках в (10) как $F(\varepsilon)$ и представить его в виде суммы трех слагаемых, которые выражаются через Z_1^{-1}, Z_2^{-1}, Z_3^{-1} соответственно,

$$F(\varepsilon) = f_1(\varepsilon) + f_2(\varepsilon) + f_3(\varepsilon),$$

где $f_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3)$ равны

$$f_i(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} Z_i^{-1}(\xi)\exp(\varepsilon\xi)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Используя метод, описанный в [25], можно получить

$$f_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_1}{\hbar\omega} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{2\pi n}{\hbar\omega}\,\varepsilon_1\right). \qquad (11)$$

Аналогично для $f_2(\varepsilon)$ получим

$$f_2(\varepsilon)=\frac{1}{12\hbar^2\omega\omega_2}\left(6\varepsilon_2^2-\frac{\hbar^2\omega^2}{2}-\frac{\hbar^2\omega_2^2}{2}\right)-\frac{1}{4\pi}\times\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{\exp[2\pi in\varepsilon_2/(\hbar\omega)]}{\sin[\pi n\omega_2/\omega]}+\frac{\exp[2\pi in\varepsilon_2/(\hbar\omega_2)]}{\sin[\pi n\omega/\omega_2]}\right]. \tag{12}$$

Выражение для $f_3(\varepsilon)$ получим из $f_2(\varepsilon)$ заменой ω_2 на ω_3 и ε_2 на ε_3.

Представим термодинамический потенциал Ω электронного газа в кольце в виде суммы трех членов: $\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$.

Здесь Ω_i описываются выражениями

$$\Omega_i=-\int_0^\infty d\varepsilon\,\frac{f_i(\varepsilon)}{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/T]}.$$

Для Ω_1 используем (11), тогда

$$\Omega_1=-\frac{1}{\hbar\omega}\int_0^\infty d\varepsilon\,\frac{\varepsilon_1}{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/T]}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_0^\infty d\varepsilon\,\frac{\sin[2\pi n\varepsilon_1/(\hbar\omega)]}{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/T]}. \tag{13}$$

Из (13) получим

$$\Omega_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_0}{\omega}-1\right)\rho_0^2\mu-\frac{\mu^2}{2\hbar\omega}+\frac{\hbar\omega}{24}-\frac{\hbar\omega}{8}\rho_0^4\left(\frac{2\omega_0}{\omega}-1\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{T}{\sinh[2\pi^2nT/(\hbar\omega)]}\cos\left(\frac{2\pi n}{\hbar\omega}\mu_1\right), \tag{14}$$

где $\mu_1=\mu+\hbar\rho_0^2(\omega_0-\omega/2)$.

Аналогично найдем и Ω_2

$$\Omega_2=-\frac{1}{12\hbar^2\omega\omega_2}\int_0^\infty\frac{6\varepsilon_2^2-(\hbar^2\omega^2+\hbar^2\omega_2^2)/2}{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/T]}\,d\varepsilon+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{\sin[\pi n\omega_2/\omega]}\int_0^\infty\frac{\exp[2\pi in\varepsilon_2/(\hbar\omega)]}{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/T]}\,d\varepsilon+\frac{1}{\sin[\pi n\omega/\omega_2]}\int_0^\infty\frac{\exp[2\pi in\varepsilon_2/(\hbar\omega_2)]}{1+\exp[(\varepsilon-\mu)/T]}\,d\varepsilon\right]. \tag{15}$$

Из (15) и (12) получим

$$\Omega_2=\frac{1}{12\hbar^2\omega\omega_2}\left[2\left(\hbar\omega_0\rho_0^2-\frac{\hbar\omega_2}{2}\right)^3-2\mu_2^3+\frac{\hbar^2\omega^2+\hbar^2\omega_2^2}{2}\mu\right]-\frac{\hbar}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left[\frac{\omega\sin[2\pi n(\omega_0\rho_0^2-\omega_2/2)/\omega]}{\sin[\pi n\omega_2/\omega]}+\frac{\omega_2\sin[2\pi n(\omega_0\rho_0^2-\omega_2/2)/\omega_2]}{\sin[\pi n\omega/\omega_2]}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{T}{2\sinh[2\pi^2nT/(\hbar\omega)]}\frac{\sin[2\pi n\mu_2/(\hbar\omega)]}{\sin[\pi n\omega_2/\omega]}+\frac{T}{2\sinh[2\pi^2nT/(\hbar\omega_2)]}\frac{\sin[2\pi n\mu_2/(\hbar\omega_2)]}{\sin[\pi n\omega/\omega_2]}\right], \tag{16}$$

где $\mu_2=\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2-\hbar\omega_2/2$.

Найдем Ω_3 из (16) заменой μ_2 на μ_3, ω_2 на ω_3

$$\Omega_3=\frac{1}{12\hbar^2\omega\omega_3}\left[2\left(\hbar\omega_0\rho_0^2-\frac{\hbar\omega_3}{2}\right)^3-2\mu_3^3+\frac{\hbar^2\omega^2+\hbar^2\omega_3^2}{2}\mu\right]-\frac{\hbar}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left[\frac{\omega\sin[2\pi n(\omega_0\rho_0^2-\omega_3/2)/\omega]}{\sin[\pi n\omega_3/\omega]}+\frac{\omega_3\sin[2\pi n(\omega_0\rho_0^2-\omega_3/2)/\omega_3]}{\sin[\pi n\omega/\omega_3]}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{T}{2\sinh[2\pi^2nT/(\hbar\omega)]}\frac{\sin[2\pi n\mu_3/(\hbar\omega)]}{\sin[\pi n\omega_3/\omega]}+\frac{T}{2\sinh[2\pi^2nT/(\hbar\omega_3)]}\frac{\sin[2\pi n\mu_3/(\hbar\omega_3)]}{\sin[\pi n\omega/\omega_3]}\right], \tag{17}$$

где $\mu_3=\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2-\hbar\omega_3/2$.

Представим Ω в виде суммы монотонной и осциллирующей частей:

$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3=\Omega^{\mathrm{mon}}+\Omega^{\mathrm{osc}}.$$

Из (14), (16) и (17) следует, что монотонная часть имеет вид

$$\Omega^{\mathrm{mon}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_0}{\omega}-1\right)\rho_0^2\mu-\frac{1}{2\hbar\omega}\mu^2+\frac{\hbar\omega_0}{2}\rho_0^4-\frac{\hbar\omega}{8}\rho_0^4+\frac{1}{12\hbar^2\omega\omega_2}\left[2\left(\hbar\omega_0\rho_0^2-\frac{\hbar\omega_2}{2}\right)^3-2\mu_2^3+\frac{\hbar^2\omega^2+\hbar^2\omega_2^2}{2}\mu\right]+\frac{1}{12\hbar^2\omega\omega_3}\left[2\left(\hbar\omega_0\rho_0^2-\frac{\hbar\omega_3}{2}\right)^3-2\mu_3^3+\frac{\hbar^2\omega^2+\hbar^2\omega_3^2}{2}\mu\right]. \tag{18}$$

Осциллирующую часть Ω запишем в виде

$$\Omega^{\text{osc}} = -\frac{\hbar}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\omega_2\frac{\sin[2\pi n\omega_0\rho_0^2/\omega_2]}{\sin[\pi n\omega/\omega_2]} + \omega_3\frac{\sin[2\pi n\omega_0\rho_0^2/\omega_3]}{\sin[\pi n\omega/\omega_3]}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \times \frac{2T\sin[\pi n\rho_0^2/2]}{\sinh[2\pi^2 nT/(\hbar\omega)]}\sin\left(\frac{2\pi n}{\hbar\omega}(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2) - \frac{\pi}{2}n\rho_0^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{T}{\sinh[2\pi^2 nT/(\hbar\omega_2)]} \times \frac{\sin[2\pi n(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)/(\hbar\omega_2)]}{2\sin[\pi n\omega/\omega_2]} + \frac{T}{\sinh[2\pi^2 nT/(\hbar\omega_3)]}\frac{\sin[2\pi n(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)/(\hbar\omega_3)]}{2\sin[\pi n\omega/\omega_3]}\right). \quad (19)$$

Выражение для магнитного момента $M = -(\partial\Omega/\partial B)_{\mu,T}$ также удобно представить в виде

$$M = M^{\text{mon}} + M^{\text{osc}}.$$

Для M^{mon} легко получить оценку

$$\frac{M^{\text{mon}}}{\mu_{\text{B}}^*} \simeq -\frac{\omega_c}{6\hbar\omega_0^2}\mu, \quad (20)$$

где $\mu_{\text{B}}^* = e\hbar/(2m^*c)$ — эффективный магнетон Бора.

При вычислении M^{osc} будем дифференцировать только быстро осциллирующие множители, тогда получим

$$\frac{M^{\text{osc}}}{\mu_{\text{B}}^*} = \frac{8\pi(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)\omega_c T}{\hbar^2\omega^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin[\pi n\rho_0^2/2]}{\sinh[2\pi^2 nT/(\hbar\omega)]} \times \cos\left(\frac{2\pi n}{\hbar\omega}(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2) - \frac{\pi}{2}n\rho_0^2\right) - 2\pi T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh[2\pi^2 nT/(\hbar\omega_2)]} \times \left\{\frac{\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2}{\hbar^2\omega\omega_2}\frac{\cos[2\pi n(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)/(\hbar\omega_2)]}{\sin[\pi n\omega/\omega_2]} - \frac{\omega_3}{\hbar\omega\omega_2}\frac{\cos[\pi n\omega/\omega_2]\sin[2\pi n(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)/(\hbar\omega_2)]}{\sin^2[\pi n\omega/\omega_2]}\right\} + 2\pi T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh[2\pi^2 nT/(\hbar\omega_3)]}\left\{\frac{\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2}{\hbar^2\omega\omega_3} \times \frac{\cos[2\pi n(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)/(\hbar\omega_3)]}{\sin[\pi n\omega/\omega_3]} - \frac{\omega_2}{\hbar\omega\omega_3}\frac{\cos[\pi n\omega/\omega_3]\sin[2\pi n(\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2)/(\hbar\omega_3)]}{\sin^2[\pi n\omega/\omega_3]}\right\}. \quad (21)$$

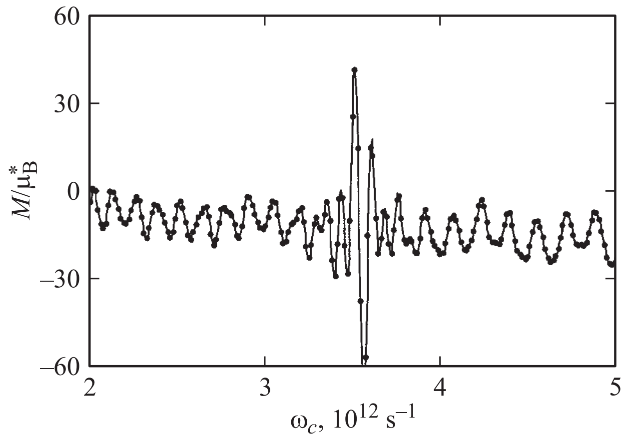

Рис. 1. Зависимость магнитного момента в единицах μ_{B}^* от циклотронной частоты. $T = 7\,\text{K}$, $\rho_0 = 1/3$, $\mu = 5.44 \cdot 10^{-13}$ erg, $\omega_0 = 5 \cdot 10^{12}\,\text{s}^{-1}$.

При нахождении (21) из-за малости пренебрегали первой суммой в (19). Ее малость подтверждается рис. 1, на котором изображены графики зависимости магнитного момента от циклотронной частоты для двух формул. Точечный график построен как производная по B стартовой формулы

$$\Omega = -T\sum_{n,m}\ln\left[1+\exp\left(\frac{\mu - E_{nm}}{T}\right)\right]. \quad (22)$$

Сплошная линия пострена на основе (20) и (21).

Из рис. 1 видно, что оба графика практически совпадают; это подтверждает законность используемого приближения.

3. Осцилляции магнитного момента

Из формулы (21) следует, что осцилляционная компонента магнитного момента представляет собой сумму трех компонент. В общем случае период осцилляций является функцией магнитного поля. Рассмотрим сначала предельный случай малых полей, т.е. когда $\omega_c \ll \omega_0$:

$$\omega = 2\omega_0\sqrt{1+\frac{\omega_c^2}{4\omega_0^2}} \simeq 2\omega_0\left(1+\frac{\omega_c^2}{8\omega_0^2}\right). \quad (23)$$

Найдем период осцилляций каждой из двух последних сумм в (21). Для второй и третьей сумм получим соответственно

$$\Delta B^{(2)} = \Delta B^{(3)} = \frac{2\hbar\omega_0^2}{\mu+\hbar\omega_0\rho_0^2}\frac{m^*c}{e}. \quad (24)$$

Найдем магнитный поток через кольцо по стандартной формуле

$$\Phi = B\Delta S, \quad (25)$$

где $\Delta S = \pi(r_+^2 - r_-^2)$ — площадь проводящей области кольца.

Учитывая (3), получим, что

$$r_+^2 - r_-^2 = 2r_0^2\sqrt{2\varepsilon_f + \varepsilon_f^2} \simeq 2r_0^2\varepsilon_f,$$

так как $\varepsilon_f \gg 1$. Тогда $\Delta S = 2\pi\mu/(m^*\omega_0^2)$, следовательно, $\Phi = 2\pi\mu B/(m^*\omega_0^2)$.

Изменение магнитного потока за период в еденицах кванта потока $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ имеет вид

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = \frac{\mu e}{m^*\omega_0^2 c\hbar}\,\Delta B. \tag{26}$$

В слабых полях, когда $\omega_c \ll \omega_0$, получим

$$\frac{\Delta\Phi^{(2),(3)}}{\Phi_0} = 2. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим случай сильных полей $\omega_c \gg \omega_0$, тогда

$$\omega = 2\omega_c\sqrt{1 + \frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2}} \simeq \omega_c\left(1 + \frac{2\omega_0^2}{\omega_c^2}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{\omega - \omega_c}{2} \simeq \frac{\omega_c}{2}\left(1 + \frac{2\omega_0^2}{\omega_c^2}\right) - \frac{\omega_c}{2} \simeq \frac{\omega_0^2}{\omega_c},$$

$$\omega_3 = \frac{\omega + \omega_c}{2} \simeq \frac{\omega_c}{2}\left(1 + \frac{2\omega_0^2}{\omega_c^2}\right) + \frac{\omega_c}{2} \simeq \omega_c.$$

Найдем периоды осцилляций по обратному полю

$$\left(\Delta\frac{1}{B}\right)^{(1)} = \left(\Delta\frac{1}{B}\right)^{(3)} = \frac{1}{\mu + \hbar\omega_0\rho_0^2}\,\frac{e\hbar}{m^*c}. \tag{28}$$

Что же касается второй суммы, то она осциллирует только по полю B с приодом, равным кванту потока. Действительно,

$$\Delta B^{(2)} = \frac{\hbar\omega_0^2}{\mu + \hbar\omega_0\rho_0^2}\,\frac{m^*c}{e}$$

не зависит при $\omega_c \gg \omega_0$ от поля. Как следует из полученного выше результата, период по потоку $\Delta\Phi/\Phi_0 = 1$.

Незатухающий ток определяется известным выражением

$$I = -c\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi}\right)_{\mu,T}. \tag{29}$$

Используя результаты, полученные выше, имеем

$$I = \frac{m^*c\omega_0^2}{2\pi\mu}\,M, \tag{30}$$

где $M = M^{\mathrm{mon}} + M^{\mathrm{osc}}$, которые определены в (20) и (21).

4. Заключение

Как следует из (20) и (21), вклад в магнитный момент кольца Волкано дает одна линейная по магнитному полю и три осциллирующие компоненты. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и для параболического квантового кольца [18], только там осциллирующих слагаемых в магнитном моменте две.

В сильных магнитных полях $\omega_c \gg \omega_0$ первая и третья осциллирующие части в (21) испытывают осцилляции по $1/B$ типа Де Гааза–Ван Альфена, и данные осцилляции отличаются от стандартных смещением химического потенциала на величину $\hbar\omega_0\rho_0^2$. Вторая осциллирующая сумма в (21) осциллирует только по B с периодом, равным кванту потока. Таким образом, картина осцилляций в этом случае такова: на осцилляции Де Гааза–Ван Альфена, имеющие большой период, накладываются более мелкие осцилляции типа Ааронова–Бома с периодом, равным одному кванту потока (рис. 2), которые образуют их тонкую структуру. Амплитуда осцилляций Де Гааза–Ван Альфена по отношению к осцилляциям Аароновна–Бома имеет порядок ω_2/ω_c.

Следует отметить, что для наблюдения осцилляций Де Гааза–Ван Альфена необходимо, чтобы выполнялось два условия. Ширина уровней энергии должна быть много меньше, чем расстояние между соседними уровнями, $T \ll \hbar(\omega - \omega_c)/2$. Также уровни энергии не должны быть сильно размыты рассеянием, т.е. $\hbar/\tau \ll \hbar(\omega - \omega_c)/2$, где τ — среднее время столкновений электронов. Для наблюдения осцилляций Ааронова–Бома имеется следующее ограничение: длина внешней окружности кольца должна быть намного меньше, чем l_ϕ, где l_ϕ — длина фазовой когерентности. Таким образом, информация о фазе волновой функции должна сохраняться на достаточно больших расстояниях по сравнению с l_ϕ, которая может быть на три-четыре порядка больше, чем длина свободного пробега электрона для $T \le 1\,\mathrm{K}$ [5,26,27].

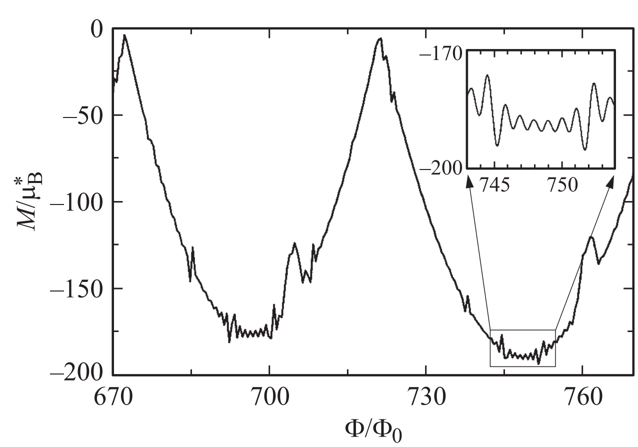

Рис. 2. Зависимость магнитного момента для случая сильных полей от магнитного потока. $T = 1\,\mathrm{K}$, $\rho_0 = 1/3$, $\mu = 5.44 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{erg}$, $\omega_0 = 5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}$.

В области слабых полей $\omega_c \ll \omega_0$ вторая и третья суммы в (21) осциллируют по полю B с периодом, равным двум квантам потока. Что же касается первой из сумм в (21), то, как показывает численный анализ, ее вклад в осциллирующую часть магнитного момента очень мал (на порядки меньше, чем вторая и третья суммы). Таким образом, в области $\omega_0 \gg \omega_c$ осцилляции M^{osc} имеют период, равный двум квантам потока (рис. 3).

В области промежуточных полей ($\omega_c \sim \omega_0$) осцилляции имеют характер биений (рис. 4). В силу линейной связи магнитного момента и незатухающего тока такой же характер осцилляций испытывает и незатухающий ток.

Как видно из (24) и (28), малые радиальные флуктуации, т.е. изменения среднего радиуса r_0, слабо влияют на осцилляции магнитного момента. Также анализ показывает, что малые отклонения кругового кольца от идеальной формы дают малые поправки в осцилляционную картину, так для эллиптического кольца поправка к энергии равна $\Delta E_{nm} = \Delta/r_0 m^* \omega_0^2 \langle n, m|(r^4 - r_0^4)\sin^2\varphi/r^2|n, m\rangle$, где Δ — разность полуосей эллипса (малая величина), φ — полярный угол, $|n, m\rangle$ — волновые функции гамильтониана рассматриваемой системы [19].

В окрестности точек, где ω/ω_2 и ω/ω_3 являются целыми числами, итоговые формулы для M^{osc} неприменимы, так как знаменатели в рядах Фурье становятся малыми. Эта проблема обсуждена в [25,28], где показано, что ряды в (19) и (21) сходятся к аналитической функции с вероятностью, равной единице.

При $\rho_0 = 0$ кольцо вырождается в квантовую точку, тогда формулы (20) и (21) описывают магнитный момент квантовой точки.

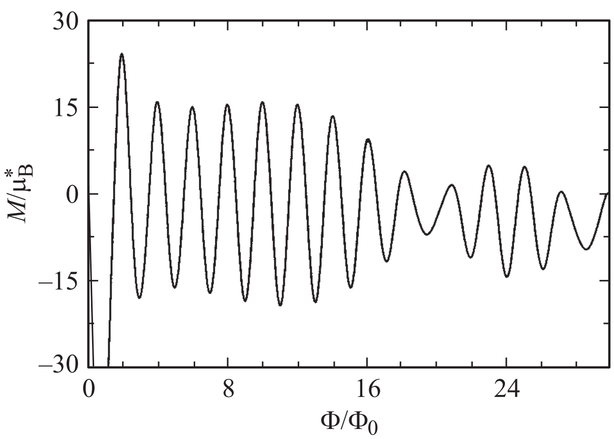

Рис. 3. Зависимость магнитного момента для случая слабых полей в единицах μ_B^* от магнитного потока. $T = 7$ K, $\rho_0 = 1/3$, $\mu = 5.44 \cdot 10^{-13}$ erg, $\omega_0 = 5 \cdot 10^{12}\,\text{s}^{-1}$.

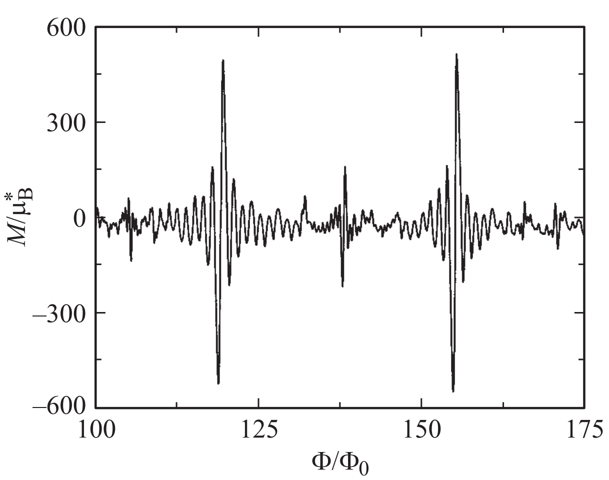

Рис. 4. Зависимость магнитного момента для случая промежуточных полей ($\omega_c \sim \omega_0$) в единицах μ_B^* от магнитного потока. $T = 1$ K, $\rho_0 = 1/3$, $\mu = 5.44 \cdot 10^{-13}$ erg, $\omega_0 = 5 \cdot 10^{12}\,\text{s}^{-1}$.

Список литературы

[1] L.P. Levy, G. Dolan, J. Dunsmuir, H. Bouchiat. Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990).
[2] V. Chandrasekhar, R.A. Webb, M.J. Brady, M.B. Ketchen, W.J. Gallagher, A. Kleinsasser. Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
[3] D. Mailly, C. Chapelier, A. Benoit. Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993).
[4] N. Byers, C.N. Yang. Phys. Rev. Lett. **7**, 46 (1961).
[5] M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer. Phys. Rev. Lett. **96** A, 365 (1983).
[6] A.A. Bykov, Z.D. Kvon, E.B. Oslhanetskii. Inst. Phys. Conf. Ser. **145**, 909 (1996).
[7] M.M. Fogler, E.I. Levin, B.I. Shklovskii. Phys. Rev. B **49**, 13 767 (1994).
[8] J. Simonin, C.R. Proetto. Phys. Rev. B **70**, 205 305 (2004).
[9] P.L. McEuen, E.B. Foxman, J. Kinaret, U. Meirav, M. Kastner, N.S. Wingreen, S.J. Wind. Phys. Rev. B **45**, 11 419 (1992).
[10] R.C. Ashoori, H.L. Stormer, J.S. Weiner, L.N. Pfeiffer, K. Baldwin, K.W. West. Phys. Rev. Lett. **71**, 613 (1993).
[11] N.F. Johnson, L. Quiroga. J. Phys.: Cond. Matter **9**, 5889 (1997).
[12] V. Ambegaokar, U. Eckern. Phys. Rev. Lett. **65**, 381 (1990).
[13] A. Schmid. Phys. Rev. Lett. **66**, 80 (1991).
[14] P. Kopiets. Phys. Rev. Lett. **70**, 3123 (1993).
[15] D. Loss. Phys. Rev. Lett. **69**, 343 (1993).
[16] R. Berkovits, Y. Avishai. Phys. Rev. Lett. **76**, 261 (1994).
[17] R.A. Jalabert. Surf. Sci. **362**, 700 (1996).
[18] V.A. Margulis, A.V. Shorokhov, H.P. Trushin. Physica E **10**, 518 (2001).
[19] W.-C. Tan, J.C. Inkson. Phys. Rev. B **60**, 5626 (1999).
[20] A. Fuhrer, S. Luscher, T. Ihn, T. Heinzel, K. Ensslin, W. Wegscheider, M. Bichler. Nature **413**, 822 (2001).
[21] U. Keyser, S. Borck, R. Haug, M. Bichler, G. Abstreiter, W. Wegscheider. Semicond. Sci. Technol. **17**, 122 (2002).
[22] W.-C. Tan, J.C. Inkson. Phys. Rev. B **53**, 6947 (1996).
[23] J. Liu, W.X. Gao, K. Ismail, K.Y. Lee, J.M. Hong, S. Washburn. Phys. Rev. B **48**, 15 148 (1993).
[24] A.M. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применения. Наука, М. (1987). 269 с.
[25] V.A. Geyler, V.A. Margulis. Phys. Rev. B **55**, 2543 (1997).
[26] Y. Gefen, Y. Imry, M.Ya. Azbel. Phys. Rev. Lett. **52**, 129 (1984).
[27] Y. Imry. Directions in condensed matter physics / Eds G. Grinstein, E. Mazenko. World Scientific, Singapore (1986). 102 p.
[28] L.I. Filina, V.A. Geyler, V.A. Margulis, O.B. Tomilin. Phys. Lett. A **244**, 295 (1998).