делить в аналитической форме связь между существенными для эксперимента параметрами. Отметим также, что предложенная интерференционная методика – удобный способ моделирования порядка в каталитических системах, в том числе периодически расположенных на катализаторе зон различной активности, рассмотренных в [3].

Список литературы

[1] Barelko V.V., Kurochka I.I., Merganov A.G., Skadinskii K.C. // Chemical engineering science. 1978. V. 33. N 7. P.805–811.
[2] Барелко В.В. В сб.: Проблемы кинетики и катализа. М., 1981. Т. 18. С. 61–79.
[3] Барелко В.В., Печатников Е.Л. // Химическая физика. 1989. Т. 8. № 6. С. 816–826.

Поступило в Редакцию
28 ноября 1989 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 2 26 января 1990 г.

01

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК – ПРИБЛИЖЕНИЕ ГТД

Б.Е. Кинбер, Б.Н. Левинский

Существующие теории дифракционных решеток [1] сводят определение поля рассеяния к расчету амплитуд плоских волн дифракционных порядков. Точность расчетов при $kd < 5$–6 (d – период решетки) вполне удовлетворяет потребности практики, но их трудно интерпретировать качественно, например определять зависимости порядков от геометрии решетки, длины волны, угла ее падения и т.д.

Для качественной интерпретации решений задач дифракции удобно использовать систему понятий геометрической оптики (ГО) и геометрической теории дифракции (ГТД). Цель заметки описать алгоритм решения задачи дифракции плоской волны на периодической решетке, использующий систему представлений ГО и ГТД, т.е. описывающий поле рассеяния в виде комбинации лучевых полей, образующихся в ячейках при падении первичного поля на решетку путем отражения и образования краевых волн.

В отличие от известных теорий [1] алгоритм ГТД [2] сводит задачу к решению не бесконечной, а конечной системы уравнений относительно параметров, характеризующих лучевые поля. Порядок системы не зависит от длины волны и определяется лишь геометрией задачи, то есть формой ячейки решетки и углом падения волны. Для иростоты излагается алгоритм построения неравномерной асимптотики решения для простой геометрии решетки – эшелетта.

2. При переотражении падающей плоской волны в прямолинейных гранях каждой ячейки эшелетта образуются пучки плоских волн, а из-за дифракций на ребрах решетки – цилиндрические краевые волны. Эти краевые волны излучаются и непосредственно и после переотражений в гранях ячейки эшелетта. Кроме того, краевые волны первичной дифракции вновь попадают на ребра и порождают новые краевые волны дифракций более высокой кратности.

Краевые волны, образующиеся на краях ячеек, пробегая вдоль вершин решетки, порождают волноводнополутеневые (ВПТ) поля [2, 3], обусловливающие взаимодействие между ячейками и специфический дифракционный эффект в решетках – эффект Вуда.

В силу периодичности решетки решение удовлетворяет условию Флоке и тем самым сводится к определению полей в одной ячейке.

Диаграмма направленности F ячейки связана с амплитудой A_m дифракционных спектров простым соотношением

$$A_m = F(\varphi_m, \Phi) \times \Gamma(\varphi_m, \Phi, kd), \tag{1}$$

где

$$\Gamma(\varphi, \Phi, kd) = \sum_m \delta(\varphi - \varphi_m), \tag{2}$$

определяется условием Брэгга

$$\sin\varphi_m - \sin\Phi = m\frac{\lambda}{d}, \tag{3}$$

Φ – угол падения, λ – длина волны, $k\frac{2\pi}{\lambda}$, m – порядок дифракционного спектра.

3. Лучевые поля в каждой ячейке решетки будем характеризовать компонентами четырех векторов V_N^+, v_N^+, V_N^-, v_N^-. Компоненты V_N^+, v_N^+ – амплитуды падающих лучевых полей в точках решетки, где происходит образование новых лучевых полей – отраженных или краевых. N – номер ячейки, границы N-й ячейки N-я и N+1-я вершины эшелетта. Физический смысл компонент двух двугих векторов V_N^-, v_N^--й – амплитуды ненаправленных источников цилиндрических волн, описывающие поля вдоль лучей, приходящих в бесконечно удаленную точку наблюдения в направлении φ (вектор V_N^-) или попадающих затем внутрь ячейки (вектор v_N^-) в места, где образуются дифракционные или отраженные поля. Вектора V_N^+, V_N^- описывают поля падающие на решетку извне или удаляющиеся от решетки, вектора v_N^+, v_N^- – поля внутри ячейки.

В силу периодичности решетки связь N-ой и $N+M$-ой ячеек описывается матрицей $\| T_M \|$, зависящей лишь от M

$$\begin{vmatrix} V_N^- \\ v_N^- \end{vmatrix} = \| T_M \| \cdot \begin{vmatrix} V_{N+M}^+ \\ v_{N+M}^+ \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

где блоки A_M, B_M, C_M, D_M матрицы $\| T_M \|$,

$$\| T_M \| = \left\| \begin{array}{c|c} A_M & B_M \\ \hline C_M & D_M \end{array} \right\|, \qquad (5)$$

описывают соответственно преобразования внешних подходящих волн V_{N+M}^+ во внешние уходящие V_N^- (блок A_M) и во внутренние уходящие v_N^- (блок C_M), а также внутренних подходящих волн v_{N+M}^+ во внешние уходящие V_N^- (блок B_M) и внутренние уходящие волны v_N^- (блок D_M).

В силу условия Флоке

$$\begin{vmatrix} V_N^{\mp} \\ v_N^{\mp} \end{vmatrix} = e^{-ikdN\sin\varphi} \begin{vmatrix} V_0^{\mp} \\ v_0^{\mp} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Суммируявлияние всех ячеек на нулевую (далее нижний нулевой индекс для простоы опускаем) выразим v^- через V^+ и v^+

$$v^- = \| \tilde{C} \| V^+ \| \tilde{D} \| v^+, \qquad (7)$$

где

$$\| \tilde{C} \| = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \| C_M \| e^{-ikdM\sin\varphi}, \qquad (8)$$

$$\| \tilde{D} \| = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \| D_M \| e^{-ikdM\sin\varphi}. \qquad (9)$$

Для всех лучей (за исключением ВПТ полей, скользящих вдоль вершин решетки) в приближении ГО

$$v^+ = \| \sigma \| v^-, \qquad (10)$$

где матричные элементы $\| \sigma \|$ можно записать в эйкональной форме, Из (7)-(10) следует, что определение вектора v^- сводится к решению СЛАУ конечного порядка

$$\left\{ \| E \| - \| \tilde{D} \| \cdot \| \sigma \| \right\} v^- = \| \tilde{C} \| V^+, \qquad (11)$$

где $\| E \|$ – единичная матрица.

В силу (5), (6), (11)

$$V^- = \| \tilde{A} \| V^+ + \| \tilde{B} \| \cdot \| \sigma \| v^-, \qquad (12)$$

где матрицы $\| \tilde{A} \|$, $\| \tilde{B} \|$ определены аналогично (8), (9).

4. Компоненты блоков $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$, описывающие связи внутри одной ячейки и смежных с нею ячеек определяются актом

однократной дифракции и пропорциональны коэффициентам дифракции Келлера, т.е. $D_{\nu\mu}$, где ν, μ – соответствуют направлению падения волны V_ν^+ или v_ν^+ и источнику V_μ^- или v^-, в напавлении μ.

В отличие от них, слагаемые матриц, связанные с взаимодействием ячеек, определяются актом полуторакратной дифракции [2, 3], т.е. содержит участок длины Md вдоль прямой, касающейся вершин, и описываются произведением

$$D_{\nu 2} D_{1\mu} \frac{e^{ikdM(1+\sin\varphi)}}{\sqrt{kd} \quad M^{3/2}} \tag{13}$$

для ВПТ поля падающего слева, и произведением

$$D_{\nu 1} D_{2\mu} \frac{e^{ikdM(1-\sin\varphi)}}{\sqrt{kd} \quad M^{3/2}} \tag{14}$$

для ВПТ поля, падающего справа.

Здесь 1 и 2 – направления вдоль прямой, соединяющей вершины, 2 – направо от вершины, а 1 – налево.

Множитель $M^{-3/2}$ в (13) и (14) связан с ослаблением ВПТ поля при распространении вдоль прямой, соединяющей вершины, в M раз по сравнению с обычной цилиндрической волной [2,3].

Для учета взаимодействия всех ячеек необходимо суммировать по M в (13) и (14), в результате соответствующие слагаемые блоков будут содержать функции $U(1+\sin\varphi)$ и $U(1-\sin\varphi)$, где $U(x)=\sum_{M=1}^{\infty}\frac{e^{ikdMx}}{\sqrt{kd}\cdot M^{3/2}}$ неравномерная асимптотика функции Вайнштейна, описывающая дифракционное взаимодействие ячеек – эффект Вуда [2].

5. Диаграмма направленности F одной ячейки является линейной комбинацией компонент V^-

$$F=\sum_q e^{ik(\vec{\rho}\vec{\rho}_q)} V_q^-, \tag{15}$$

где $\vec{\rho}_q$ – радиус-вектор амплитуды q-й краевой волны, записанной относительно фазового центра излучения ячейки.

Поскольку границы ячейки образованы двумя смежными вершинами решетки, каждую из них с равным правом можно отнести и к ячейке, расположенной справа, и к ячейке, расположенной слева. Так как при расчете необходимо учитывать излучение краевых волн обеих вершин, их диаграммы направленности необходимо разделить на две части – часть, соответствующую ячейке слева от вершины, и часть, соответствующую ячейке справа. Это разбиение производится по полюсам слагаемых неравномерной асимптотики диаграмм этих краевых волн. Часть диаграммы, полюса которой соответствуют границам свет-тень лучевых полей, образованных волнами, падающими слева (справа) от вершины относим к ячейке слева (справа).

Заметим, что в приведенном алгоритме размерности блоков $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ зависят от угла наблюдения φ, а блоков $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$ от угла падения Φ, что, как и в других случаях применения неравномерной асимптотики ГТД, приводит к разрывам функции F.

Переход к равномерной по φ и Φ асимптотике решений производится методом асимптотической сшивки [2].

Подчеркнем, что пренебрежение в сумме по M слагаемых с $|M| > 1$ и отбрасывание в (11) слагаемого с $\tilde{D}$, а в (12) с $\tilde{B}$, соответствует приближению Кирхгофа.

Список литературы

[1] Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн, т. 1. Дифракционные решетки. Ки.: Наук. думка, 1986.

[2] Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.

[3] Боровиков В.А. Дифракция на открытом конце волновода с фланцем. В сб.: Теория дифракции и распространения волн. Москва-Ереван: ВНИИРИ. 1973, Т. 1, С. 208.

Поступило в Редакцию
26 сентября 1989 г.