

01;10
©1992 г.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА НЕУСТОЙЧИВОСТИ МОНОТРОННОГО ТИПА

А.А. Рухадзе, В.В. Северьянов

Развита линейная теория релятивистского монотрона с идеальным цилиндрическим резонатором и допредельным током пучка. В отличие от работ предшественников исследованы не только высокочастотные, но и относительно низкочастотные неустойчивости, которые, как показано, обладают максимальным инкрементом нарастания. Кроме того, учтены взаимодействия электронов пучка не только с попутной, но также и с встречной электромагнитной волной и двумя пучковыми волнами и установлено, что наиболее эффективно электроны пучка передают свою энергию именно встречной электромагнитной волне резонатора.

Введение

Теория монотронного генератора СВЧ, разработанная в 1940 г. [1], была основана на анализе уравнения движения нерелятивистского электрона в однородном высокочастотном поле. Ими установлено, что при углах пролета, близких к значениям

$$\frac{\omega L}{u} \approx \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \dots, \quad (1)$$

электронный пучок передает энергию электромагнитному полю, частота которого совпадает с одной из критических частот резонатора. Выводы теории были экспериментально подтверждены в [2], где были использованы сверхпроводящие резонаторы, обладающие высокой добротностью.

В работах [3,4] сделано обобщение теории монотрона на случай релятивистского пучка и частот генерации, далеких от критических. В них также решалось уравнение движения электрона в поле попутной электромагнитной волны, фазовая скорость которой близка к скорости света и, следовательно, к скорости релятивистских электронов. Такой подход не является строгим, поскольку игнорируется взаимодействие пучка с волнами пространственного заряда, а также со встречной электромагнитной волной, роль которого без достаточных оснований считается малой. Сделанные предположения не контролируются расчетом самосогласованного электромагнитного поля в резонаторе. В указанных работах не был установлен полный спектр частот генерации и осталась невыясненной

природа неустойчивости электронного пучка. В настоящей работе принята попытка построения строгой линейной теории монотрона. Ниже излагаются основы такой теории и дается анализ ее результатов.

Формулировка задачи

Рассмотрим наиболее простой вариант монотронного генератора в виде закороченного металлического цилиндра радиуса R и длины L , в котором распространяется холодный и однородный по сечению пучок релятивистских электронов с плотностью n_b , стабилизированный бесконечно сильным продольным магнитным полем. Пусть невозмущенный пространственный заряд пучка скомпенсирован неподвижными ионами. Боковая поверхность и торцы резонатора считаются идеально проводящими. Пучок входит в резонатор с заданными параметрами и беспрепятственно выходит из него, вынося с собой приобретенные в поле возмущения плотности и энергии. Предполагается также азимутальная симметрия электромагнитного поля.

При сделанных предположениях уравнение для продольной составляющей напряженности электрического поля в резонаторе имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[E_z + \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{u^2} \int_0^z (z - \xi) E_z \left(t - \frac{z - \xi}{u}, \xi \right) d\xi \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = - \frac{4\pi e}{u\gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} n_b \left(t - \frac{z}{u} \right), \quad (2)$$

где $\omega_b = (4\pi e^2 n_b / m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота электронов, u — невозмущенная скорость пучка, а $\gamma = (1 - (u^2/c^2))^{-1/2}$.

К уравнению (2) добавляются граничные условия

$$E_z \Big|_{r=R} = 0, \quad E_r \Big|_{z=0,L} = 0. \quad (3)$$

Остальные характеристики поля E_r , B_φ выражаются через E_z из уравнений Максвелла, в которых возмущения плотности пучка и его тока описываются формулами

$$\delta n_b = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{4\pi e u^2} \int_0^z (z - \xi) E_z \left(t - \frac{z - \xi}{u}, \xi \right) d\xi, \quad (4)$$

$$\delta j_{zb} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{4\pi u^2} \int_0^z (z - \xi) E_z \left(t - \frac{z - \xi}{u}, \xi \right) d\xi. \quad (5)$$

О начальных условиях будет сказано ниже.

Начнем отсчет времени с того момента, когда фронт пучка покинул пределы резонатора, а невозмущенный ток пучка после нарастания вышел на стационарный уровень. При этом первая часть уравнения (2) обращается в нуль, а ω_b перестает зависеть от z и t .

Решение уравнения (2) можно представить в виде

$$E_z(r, z, t) = \sum_{s=1}^{\infty} J_0(k_{\perp s} r) A_s(\omega, k_z) e^{-i\omega t + ik_z z}. \quad (6)$$

Здесь $k_{\perp s} = \mu_s/R$, μ_s — корни функции Бесселя $J_0(\mu_s) = 0$; k_z — продольное волновое число.

Нелокальный характер связи возмущений пучка с полем, выраженный формулами (4) и (5), приводит к тому, что решения интегродифференциального уравнения (2) представляют собой комбинации из четырех волн, имеющих одинаковую частоту, но различные значения продольного волнового числа K_z

$$e^{ik_z z} A_s = \sum_{\nu=1}^4 A_{s\nu} e^{ik_{z\nu} z}. \quad (7)$$

Комплексные амплитуды волн $A_{s\nu}$ связаны соотношениями

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{A_{s\nu}}{\omega - k_{z\nu} u} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^4 \frac{A_{s\nu}}{(\omega - k_{z\nu} u)^2} = 0, \quad (8)$$

а волновые числа $k_{z\nu}$ удовлетворяют характеристическому уравнению

$$k_{\perp s}^2 + \left(k_{z\nu}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[1 - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_{z\nu} u)^2} \right] = 0. \quad (9)$$

Граничные условия (3) приводят к дополнительным соотношениям между амплитудами $A_{s\nu}$

$$\sum_{\nu=1}^4 k_{z\nu} A_{s\nu} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^4 \frac{k_{z\nu} A_{s\nu} e^{ik_{z\nu} L}}{\omega^2 - k_{z\nu}^2 c^2} = 0. \quad (10)$$

Нетривиальные решения системы уравнений (8), (10) существуют, когда ее определитель равен нулю. Отсюда вытекает дисперсионное уравнение, определяющее спектр частот генерации электромагнитных волн,

$$\begin{aligned} & \left(e^{i(k_2 - k_1)L} - 1 \right) - \left(e^{i(k_3 - k_1)L} - 1 \right) \frac{\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \left(1 - \frac{k_2^2}{k_4^2} \right)}{\left(1 - \frac{k_1^2}{k_3^2} \right) \left(1 - \frac{k_3^2}{k_4^2} \right)} - \\ & - \left(e^{i(k_4 - k_1)L} - 1 \right) \frac{\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) \left(1 - \frac{k_2^2}{k_3^2} \right)}{\left(1 - \frac{k_1^2}{k_4^2} \right) \left(1 - \frac{k_4^2}{k_3^2} \right)} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из этих же уравнений следует формулы для комплексных амплитуд волн

$$\begin{aligned} \frac{A_{s1}}{A_{s4}} &= -\frac{k_1 (\omega - k_1 u)^2 (k_2 - k_4)(k_3 - k_4)}{k_4 (\omega - k_4 u)^2 (k_1 - k_2)(k_1 - k_3)}, \\ \frac{A_{s2}}{A_{s4}} &= -\frac{k_2 (\omega - k_2 u)^2 (k_1 - k_4)(k_3 - k_4)}{k_4 (\omega - k_4 u)^2 (k_2 - k_1)(k_2 - k_3)}, \\ \frac{A_{s3}}{A_{s4}} &= -\frac{k_3 (\omega - k_3 u)^2 (k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}{k_4 (\omega - k_4 u)^2 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Приведем также выражения для продольной и поперечной составляющих электрического поля в резонаторе и возмущений плотности заряда и тока пучка

$$E_{zs} = A_{s4} J_0(k_{\perp s} r) e^{-i\omega t} \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{A_{s\nu}}{A_{s4}} e^{ik_{\nu} z} + e^{ik_4 z} \right),$$

$$E_{rs} = iA_{s4} J_1(k_{\perp s} r) e^{-i\omega t} \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{A_{s\nu}}{A_{s4}} \frac{k_{\perp s} k_{\nu}}{k_{\nu}^2 - \omega^2/c^2} e^{ik_{\nu} z} + \frac{k_{\perp s} k_4}{k_4^2 - \omega^2/c^2} e^{ik_4 z} \right),$$

$$\delta n_b = in_b \gamma^{-3} \frac{e}{m} A_{s4} J_0(k_{\perp s} r) e^{-i\omega t} \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{A_{s\nu}}{A_{s4}} \frac{k_{\nu}}{(\omega - k_{\nu} u)^2} e^{ik_{\nu} z} + \frac{k_4}{(\omega - k_4 u)^2} e^{ik_4 z} \right),$$

$$\delta j_{zb} = i\omega \frac{e^2 n_b \gamma^{-3}}{m} A_{s4} J_0(k_{\perp s} r) e^{-i\omega t} \left(\sum_{\nu=1}^3 \frac{A_{s\nu}}{A_{s4}} \frac{e^{ik_{\nu} z}}{(\omega - k_{\nu} u)^2} + \frac{e^{ik_4 z}}{(\omega - k_4 u)^2} \right).$$

Формулы (12), (13) описывают решение краевой задачи (задачи на собственные значения), если входящие в них частота и продольные волновые числа k_{ν} удовлетворяют уравнениям (9), (11). Общее решение такой задачи получится в результате суммирования по всем собственным частотам. Амплитуды $A_{s4}(\omega)$ определяются начальным состоянием системы.

Спектр частот генерации

Строгий анализ характеристического уравнения (9), проведенный в работе [5], показал, что оно допускает решения с комплексными значениями частоты и продольного волнового числа и среди них такие, у которых мнимая часть частоты положительна. Это означает, что в принципе взаимодействие пучка с электромагнитным полем может приводить к превращению его кинетической энергии в энергию поля. Вопрос о возможности реализации этого процесса в рассматриваемой системе должен решаться на основе дисперсионного уравнения (11). Именно оно при заданных параметрах пучка и резонатора определяет спектр собственных частот и инкрементов нарастания амплитуд волн.

Численное решение дисперсионного уравнения (11), проведенное на ЭВМ ЕС-1045 при значениях параметров пучка $\alpha_s^2 = \omega_b^2 \gamma^{-3} / k_{\perp s}^2 u^2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ (ток пучка намного меньше пирсовского тока [6]) и $\gamma = 10$,

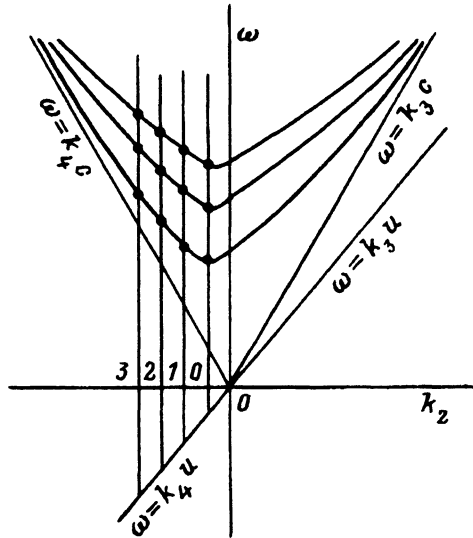


Рис. 1.

Вертикальные прямые — $n = 0, 1, 2, \dots$; точки — собственные частоты системы. Формула (15) квантует расстояние от этих точек до прямой $\omega = k_4 u$, формула (14) — длины отрезков на отрицательной части оси k_z .

показало, что действительно у системы имеется дискретный набор собственных частот с положительными мнимыми частями. Результаты решения опубликованы в работе [7]. В данной работе будет дан анализ этих результатов.

Прежде всего выясним, при каких условиях возможен нулевой баланс обмена энергий между пучком и полем. Иными словами, установим, когда мнимые части собственных частот строго равны нулю. Ясно, что при этом между параметрами пучка и резонатора должна существовать определенная связь, поскольку левая часть дисперсионного уравнения (11) комплексна и, следовательно, оно квантует значения двух вещественных величин, например частоты и длины резонатора.

а) Стационарные волны. Для всех найденных решений уравнения (11) выполняется формула

$$\operatorname{Re} k_4 L = -n' \pi, \quad (14)$$

где k_4 — продольное волновое число встречной электромагнитной волны, n' близко к целому числу $n' = n + \lambda_n(\omega_b, \gamma)$, причем $n = 0, 1, 2, \dots$

Если мнимая часть частоты равна нулю, то справедливо также равенство

$$(\omega - k_4 u) \frac{L}{u} = m' \pi, \quad (15)$$

в котором m' также складывается из целого числа и малого слагаемого, зависящего от параметров пучка. Значения m' будут установлены ниже.

На рис. 1 показаны собственные моды гладкого волновода в присутствии электронного пучка. Точками отмечены собственные частоты резонатора длины L с нулевыми инкрементами. Рис. 1 дает лишь грубое представление о наборе собственных частот, соответствующих стационарным решениям ($\operatorname{Im} \omega = 0$). На самом деле для каждой волноводной моды будет свой набор вертикальных прямых, но в связи с малостью параметра α_s^2 они будут близки к представленным на рисунке.

Формулы (14), (15) вместе с характеристическим уравнением (9) позволяют определить дискретные значения частоты, продольного волнового

числа и длины системы, если воспользоваться найденными в результате численного решения уравнения (11) числами n' и m' . Почленное деление (15) на (14) дает квантованные значения фазовой скорости встречной электромагнитной волны

$$\frac{u}{\varphi} = \frac{k_4 u}{\omega} = \left(1 - \frac{n'}{m'}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Из уравнения (9) в результате подстановки $k_4 = \omega/\varphi$ следует точная формула

$$\frac{\omega}{k_{\perp s} u} = \left[\left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{u^2}{\varphi^2} \right)^{-1} + \alpha_s^2 \left(1 - \frac{u}{\varphi} \right)^{-2} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

С помощью (14), (16), (17) легко находятся указанные выше величины

$$\frac{\omega}{k_{\perp s} u} = \left(1 - \frac{n'}{m'}\right) \left[\frac{1}{u^2/c^2 \left(1 - 2\frac{n'}{m'}\right) - \left(\frac{n'}{m'}\gamma^{-1}\right)^2} + \alpha_s^2 \right]^{1/2}, \quad (18)$$

$$k_{\perp s} L = m' \pi \left[\frac{1}{u^2/c^2 \left(1 - 2\frac{n'}{m'}\right) - \left(\frac{n'}{m'}\gamma^{-1}\right)^2} + \alpha_s^2 \right]^{-1/2}. \quad (19)$$

Чтобы собственные частоты системы были выше критических частот волновода, квантовое число m' должно удовлетворять неравенству

$$m' > \left(1 + \frac{c}{u}\right) n'. \quad (20)$$

Из рис. 1 явствует, что наименьшая из собственных частот системы, соответствующая s -й моде волновода, реализуется, когда групповая скорость электромагнитных волн равна нулю

$$\omega_{s \min} = \left[k_{\perp s}^2 c^2 + \omega_b^2 \gamma^{-3} - \frac{\omega_b^4 \gamma^{-6} / k_{\perp s}^2 c^2 u^2}{1 + 3\alpha_s^2 u^4 / c^4} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

При этом

$$|k_{4s}|_{\min} = \frac{\alpha_s^2 u^3 / c^3 \sqrt{1 + \alpha_s^2 u^2 / c^2}}{1 + 3\alpha_s^2 u^4 / c^4} k_{\perp s}. \quad (22)$$

В результате подстановки (21), (22) в формулу (15) находим длины резонатора, соответствующие указанным частотам,

$$k_{\perp s} L_{s \min} = \frac{m\pi \frac{u}{c} (1 - \alpha_s^2 u^4 / c^4)}{\sqrt{1 + \alpha_s^2 u^2 / c^2}}, \quad m = 2, 4, \dots \quad (23)$$

Для упомянутых выше значений α_s^2 и γ наименьшие из этих длин равны

$$k_{\perp s} L_{s \min} = 6.025.$$

В системах меньшей длины пучок не будет генерировать данные частоты.

Вообще следует различать “короткие” и “длинные” системы в том смысле, что в первых из них за пролетное время электрона L/u не успевают развиться ленгмюровские колебания пучка $\omega_b^2 \gamma^{-3} (L^2/u^2) \ll 1$. Для таких систем

$$m' \approx \left(1 + \frac{c}{u}\right) n', \quad (24)$$

а n' особенно близки к целым числам $1, 2, 3, \dots$. Так, для первой из “коротких” систем $n' = 1 - \alpha_s^4 = 1 - 6.25 \cdot 10^{-4}$, а $m' = 2(1 + 2\alpha_s^2) = 2(1 + 5 \cdot 10^{-2})$. Разность

$$m' - \left(1 + \frac{c}{u}\right) n' \approx 1.96 \cdot 10^{-1}.$$

При этом $\omega_{1,2s} \approx 2.44k_{\perp s}u$, $k_{\perp s}L_{1,2s} = 1.4185$, $\omega_b^2 \gamma^{-3} (L^2/u^2) = 5 \cdot 10^{-2}$. У второй “короткой” системы $n \approx 2$, $m' \approx 4$, $\omega_{2,4s} = 4.36k_{\perp s}u$, $k_{\perp s}L_{2,4s} = 1.48668$, $\omega_b^2 \gamma^{-3} (L^2/u^2) = 5.5 \cdot 10^{-2}$.

В “длинных” системах приближенное равенство (24) не выполняется, а числа n' , m' заметно отличаются от целых значений

$$n' = \frac{5}{4} \frac{u^3}{c^3} \left[1 - 6\pi \frac{u^2}{c^2} \cdot 10^{-5}\right],$$

$$m' = 4 \left[1 + \alpha_s^2 - \alpha_s^6 \gamma^2\right], \quad \omega_{1,4s} = 1.20k_{\perp s}u,$$

$$k_{\perp s}L_{1,4s} = 8.03, \quad \omega_b^2 \gamma^{-3} (L^2/u^2) = 1.61.$$

Аналогично у другой из “длинных” систем

$$n' = \frac{9}{4} \frac{u}{c} (1 - \alpha_s^2 \gamma^{-2}), \quad m' = 6 \left[1 - (\alpha_s^2/2)(1 - \gamma^{-1})\right],$$

$$\omega_{2,6s} = 1.246k_{\perp s}u, \quad k_{\perp s}L_{2,6s} = 9.6541, \quad \omega_b^2 \gamma^{-3} (L^2/u^2) = 2.33.$$

Из сравнения приведенных данных, а также из последующих рассуждений следует, что в “коротких” системах генерация начинается с более высоких частот и они далеко отстоят друг от друга, в то время как в “длинных” системах генерируются также и частоты, близкие к критическим, с малыми взаимными расстояниями.

Приведем приближенные выражения для длин двух из упомянутых систем

$$k_{\perp s}L_{1,2s} = \pi (1 + \alpha_s^2) \left[8\alpha_s^2 \frac{u^2}{c^2} (1 + \alpha_s^2) - (1 - \alpha_s^2)^2 \gamma^{-2}\right]^{1/2},$$

$$k_{\perp s}L_{1,4s} = 2\sqrt{2}\pi \frac{u}{c} \left[1 - \alpha_s^2 \left(\frac{c}{u} \gamma - 3\right)\right]^{1/2}.$$

Точность первой из них 0.16%, второй — $7 \cdot 10^{-2}\%$. Необходимо отметить, что одной и той же частоте (определенному значению n'/m') соответствует бесконечный набор длин системы (с различными m').

Деление систем на “короткие” и “длинные” связано с наименьшими значениями длин, характерных для данной частоты.

б) Волны с нарастающими амплитудами. Если длина резонатора не совпадает с какой-либо из рассмотренных выше длин, соответствующих стационарным волнам, то дисперсионное уравнение имеет дискретный набор решений с комплексными частотами и продольными волновыми числами у всех четырех волн данной частоты. Такие волны, взаимодействуя с пучком, не только перераспределяют энергию между электронами, но и отбирают энергию у пучка. При этом из резонатора в единицу времени выходит меньшее число ускоренных электронов по сравнению с числом замедленных. Наличие мнимых частей у продольных волновых чисел означает, что амплитуды волн неоднородны по длине резонатора. Именно это обстоятельство обуславливает неустойчивость пучка. В системе координат, движущейся со скоростью пучка, на электроны действует осциллирующая сила, амплитуда которой изменяется с течением времени, что и приводит в среднем к его обмену энергией с полем. Из характеристического уравнения (9) строго следует устойчивость пучка в электромагнитном поле с вещественными значениями продольных волновых чисел

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 k_{\nu} u.$$

Особо важную роль в механизме неустойчивости играет встречная электромагнитная волна, фазовая и групповая скорости которой направлены навстречу пучку. У этой волны реальная и мнимая части волнового числа k_4 отрицательны, причем $|\operatorname{Im} k_4|$ всегда больше, чем у остальных трех волн с положительными $\operatorname{Re} k_{\nu}$ и $\operatorname{Im} k_{\nu}$. Следовательно, в упомянутой выше системе координат со стороны продольной составляющей поля этой волны действует осциллирующая сила, амплитуда которой нарастает с течением времени, причем наиболее быстро по сравнению с другими волнами. Помимо того, как показывают расчеты, сама амплитуда этой волны даже на входе в резонатор является наибольшей.

Из сказанного в данном разделе становятся очевидными две формулы

$$\Delta\omega \approx -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial L}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega}} \Delta L, \quad (25)$$

$$\Delta\omega \approx \frac{d\omega}{dk_{\nu}} \Delta k_{\nu} = v_{гр\nu} \Delta k_{\nu}, \quad (26)$$

где $\Lambda(\omega, L)$ — левая часть дисперсионного уравнения (11); ΔL — отклонение длины резонатора от какой-либо из длин, соответствующих стационарным волнам (оно считается малым); Δk_{ν} — комплексные отклонения продольных волновых чисел от вещественных значений этих чисел для стационарных волн; $v_{гр\nu}$ — их групповые скорости.

Обе формулы полностью подтверждаются численными расчетами. Мнимые части $\Delta\omega$ — инкременты нарастания амплитуд волн.

Расположение частот генерации и продольных волновых чисел встречной электромагнитной волны на комплексной плоскости k_z при заданной длине резонатора наглядно иллюстрирует рис. 2. На нем точками показаны реальные части частот генерации и контуры, на которых расположены решения дисперсионного уравнения.

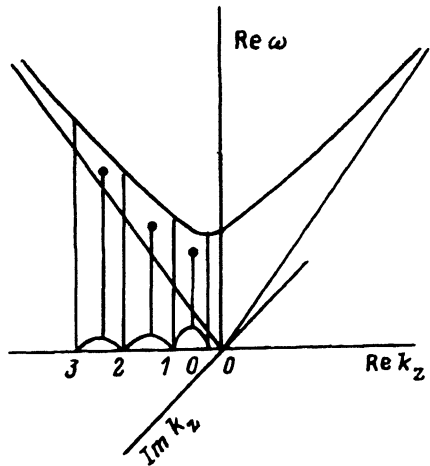


Рис. 2.

в) Максимальные инкременты нарастания амплитуд волн. Расчеты показывают, что при изменении длины резонатора происходит плавное изменение инкремента нарастания амплитуд волн, который, возрастая от нулевого значения, проходит через максимум и убывает до нуля. Естественно поставить вопрос о длине резонатора, соответствующей максимальному инкременту. При решении этого вопроса вернемся к формулам квантования (14), (15), в которых теперь фигурируют реальные части комплексных величин ω и k_4 . Однако если квантовое число n' по-прежнему близко к целочисленным значениям $0, 1, 2, \dots$, то число m' , соответствующее оптимальным углам пролета электрона, близко к полужелтым значениям $5/2, 9/2, 13/2, \dots$.

В силу того что во всех случаях максимальные инкременты составляли не более двух процентов от реальной части частоты, оказываются приближенно справедливыми и формулы (16), (18), (19). Необходимые при вычислении инкрементов неустойчивости выражения для групповой скорости электромагнитных волн имеют вид

$$v_{гр} = \frac{c^2}{\omega} \frac{1 + 3\alpha_s^2 u^4 / c^4}{1 + \alpha_s^2 u^2 / c^2} \left(k + \frac{\alpha_s^2 \frac{u^3}{c^3} \sqrt{1 + \alpha_s^2 u^2 / c^2}}{1 + 3\alpha_s^2 u^4 / c^4} k_{\perp s} \right),$$

$$v_{гр} \approx \frac{c^2}{\omega} k \quad (27)$$

при $|k|u \ll \omega$ и $|k|u \approx \omega$ соответственно.

Имеется, однако, другая возможность получения важной информации о природе неустойчивости. А именно с помощью анализа установленных в результате численного расчета значений ω , k и L удается найти эмпирические формулы для основных величин, обладающие высокой точностью. Приведем их для трех рассмотренных выше "длинных" систем

$$\frac{\omega}{k_{\perp s} u} = 1.0156765 + i8.1017689 \cdot 10^{-3}, \quad k_{\perp s} L_{1s} = 7.0499794,$$

$$\frac{k_4}{k_{\perp s}} = -0.10388142 - i9.6808475 \cdot 10^{-2},$$

$$k_{\perp s} L_{1s} = \sqrt{5} \pi \left(1 + \frac{c^3}{u^3} \sqrt{2\alpha_s^2 \gamma^{-3}} \right)^{1/2}, \quad 2.7 \cdot 10^{-4}\%,$$

$$\operatorname{Re}(\omega - k_4 u) = \left[\frac{\sqrt{5}}{2} + 6\alpha_s^2 \gamma^{-2} + \alpha_s^2 \gamma^{-3} - 4\alpha_s^2 \gamma^{-5} \right] k_{\perp s} u, \quad 10^{-6}\%,$$

$$\operatorname{Im} k_4 u = -6\omega_b \gamma^{-5/2} \frac{u}{c} (1 + \alpha_s^2), \quad 5.8 \cdot 10^{-2}\%,$$

$$\frac{\omega}{k_{\perp s} u} = 1.0695074 + i1.5167069 \cdot 10^{-2}, \quad k_{\perp s} L_{2s} = 9.705691,$$

$$\frac{k_4}{k_{\perp s}} = -0.3492046 - i0,47594403 \cdot 10^{-1}, \quad (28)$$

$$k_{\perp s} L_{2s} = 3\pi \left[1 + (\alpha_s^2 \gamma)^2 - 8\alpha_s^2 \gamma^{-2} \right]^{1/2}, \quad 2 \cdot 10^{-6}\%,$$

$$\operatorname{Re}(\omega - k_4 u) = \sqrt{2} \left(1 + 2\frac{c}{u} \sqrt{\alpha_s^2 \gamma^{-4}} \right) k_{\perp s} u, \quad 2.7 \cdot 10^{-4}\%,$$

$$\operatorname{Im} k_4 u = -3\omega_b \gamma^{-5/2} \left(\frac{c}{u} \right)^{1/2}, \quad 8.6 \cdot 10^{-2}\%,$$

$$\frac{\omega}{k_{\perp s} u} = 1.1621138 + i1.5779623 \cdot 10^{-2}, \quad k_{\perp s} L_{3s} = 11.480402,$$

$$\frac{k_4}{k_{\perp s}} = -0.57396727 - i3.2033640 \cdot 10^{-2}, \quad (29)$$

$$k_{\perp s} L_{3s} = \sqrt{13} \pi \left[1 + \alpha_s^2 + (2\alpha_s^2 \gamma^{-4})^{1/2} \right]^{1/2}, \quad 10^{-4}\%,$$

$$\operatorname{Re}(\omega - k_4 u) = \left\{ \sqrt{3} + \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_s^2 \gamma^{-2} \left[1 + \alpha_s^2 \frac{u}{c} (1 + \alpha_s^2)^2 \right]} + \right. \\ \left. + \alpha_s^2 \gamma^{-3} (1 + \alpha_s^2)^2 \right\} k_{\perp s} u, \quad 10^{-6}\%,$$

$$\operatorname{Im} k_4 u = -2\omega_b \gamma^{-5/2} \sqrt{1 + \alpha_s^2 \frac{u}{c} (1 + \alpha_s^2)^2}, \quad 4.3 \cdot 10^{-4}\%. \quad (30)$$

Из приведенных формул вытекает, что при исчезающе малой плотности пучка оптимальные длины резонатора стремятся к предельным значениям

$$k_{\perp s} L \rightarrow \sqrt{5}\pi, \sqrt{9}\pi, \sqrt{13}\pi, \dots$$

Частоты же генерации

$$\frac{\omega}{k_{\perp s} u} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{9}, \sqrt{2} - \frac{1}{3}, \sqrt{3} - \frac{4}{7},$$

$$(\omega - k_4 u) \frac{L}{u} \rightarrow \frac{5}{2}\pi, \quad \sqrt{2 \cdot 9}\pi, \quad \sqrt{3 \cdot 13}\pi, \dots,$$

что заметно отличается от значений, приведенных в формуле (1).

Реальные части продольного волнового числа встречной волны приближаются к значениям

$$\operatorname{Re} \frac{k_u}{k_{\perp s}} \rightarrow -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}.$$

Мнимые части частоты и волнового числа этой волны стремятся к нулю. Отсюда следует, что данная неустойчивость всегда является коллективным эффектом.

Инкременты нарастания амплитуд волн в этих трех случаях одного и того же порядка, пропорциональны квадратному корню из тока пучка и $\gamma^{-5/2}$. Близость значений второго и третьего инкрементов друг к другу наводит на мысль о том, что имеется максимум у инкремента как функции номера частоты генерации. Для получения общих закономерностей проведем глубокий анализ приведенных выше результатов численного эксперимента. Из формул (28), (29) вытекают приближенные равенства

$$k_{\perp s} L = \sqrt{4n + 1}\pi, \quad n = 1, 2, 3, \quad (31)$$

$$\operatorname{Re}(\omega - k_4 u) = \sqrt{n} k_{\perp s} u, \quad n = 2, 3, \quad (32)$$

$$\operatorname{Im} k_4 u = -\frac{6}{n} \omega_b \gamma^{-5/2}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Нет никаких оснований для нарушения этих формул при более высоких значениях числа n . Учитывая малость пучкового слагаемого в характеристическом уравнении (9) для встречной волны, можно в формулу (32) подставить

$$\operatorname{Re} k_4 u = -\sqrt{\omega^2 \frac{u^2}{c^2} - k_{\perp s}^2 u^2 \left(1 + \frac{\alpha_s^2}{n}\right)}, \quad (34)$$

в результате чего определяются частоты генерации с максимальными инкрементами

$$\omega_{sn} = \sqrt{n} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_s^2}{n^2}}{1 + \sqrt{u^2/c^2 - \gamma^{-2}/n - \alpha_s^2 \gamma^{-2}/n^2}} k_{\perp s} u. \quad (35)$$

Теперь нетрудно найти и групповую скорость встречной волны

$$v_{гр} \approx c^2 \frac{k_4}{\omega} \approx -c \sqrt{1 - \frac{(1 + c/u)^2 n}{(n + 1)^2}}. \quad (36)$$

Почленное умножение (33) на (36) приводит к формуле для инкрементов нарастания амплитуд волн

$$\text{Im } \omega_{sn} = 6\omega_b \gamma^{-5/2} \frac{c}{u} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{(1+c/u)^2}{n(n+1)^2}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (37)$$

Используя стандартную процедуру определения экстремумов функций, легко находим из (37), что наибольший из инкрементов соответствует $n = 3$. При выбранных ранее значениях параметров α_s и γ получается $\text{Im } \omega_{s3} = 1.5770351 \cdot 10^{-2} k_{\perp s} u$, что лишь на $5.9 \cdot 10^{-2}\%$ отличается от точного значения, приведенного в первой из формул (30).

Уместно отметить, что точность формул (36) и (37) повышается с ростом n . Так, при $n = 2$ значение инкремента, вычисленного по формуле (37), отличается от точного на 2.64%. Это обусловлено тем, что с удалением частот генерации от критических частот резонатора групповая скорость встречной волны приближается к использованному в (36) значению $c^2 k_4 / \omega$.

Итак, вопрос о максимальных значениях инкрементов нарастания амплитуд волн можно считать исчерпанным, поскольку для $n = 1, 2, 3$ мы имеем их точные значения, а для $n > 3$ они хорошо описываются формулой (37).

Из полученных в результате проведенного анализа формул следует, что имеются два пути продвижения в область коротких волн: увеличение числа n при фиксированном номере s волноводной моды либо переход к более высоким модам при фиксированном n . Первый путь связан с уменьшением инкремента, который с ростом n вначале убывает медленно, а затем при $n \gg 1$ изменяется по закону $1/n$. При этом частота генерации и длина резонатора возрастают пропорционально \sqrt{n} , т.е. сравнительно медленно. Второй же путь не приводит к уменьшению инкремента, поскольку номер волноводной моды s вообще не входит в формулу (37). Вместе с тем увеличение числа s вызывает более резкое возрастание частоты генерации, нежели увеличение n , поскольку она, согласно формуле (35), пропорциональна $k_{\perp s} = \mu_s / R$. Оптимальная длина резонатора, равная

$$L_{sn} = \frac{R\pi}{\mu_s} \sqrt{4n+1}, \quad (38)$$

также сильнее зависит от s , чем от n . Ясно, что у нас имеется некоторая свобода выбора, связанная с тем, что изменение n от 3 до 5.6 не приводит к сильному уменьшению инкремента и вместе с тем позволяет варьировать ω_{sn} и L_{sn} при выбранном значении s .

В заключение данного раздела обратим внимание на сильную зависимость инкремента от энергии электронов, а именно $\text{Im } \omega \sim \gamma^{-5/2}$. Эта зависимость показывает, что инкремент данной неустойчивости может достигать больших значений. Даже при использованном в численных расчетах неблагоприятном значении $\gamma = 10$ получаем для $R = 2.4$ см, $n = 3$, $\tau = 20$ нс (τ — время инжекции пучка)

$$\text{Im } \omega \cdot \tau = 1.6 \cdot 10^{-2} k_{\perp s} u \tau \approx 4.8 \cdot 10^8 \tau = 9.6, \quad (39)$$

что равносильно возрастанию амплитуды волн в $1.5 \cdot 10^4$ раз. Уменьшение γ в 5 раз привело бы к увеличению инкремента в $5^{5/2} = 56$ раз.

Принятый в данной работе способ описания электродинамической системы автоматически учитывает изменение относительной роли волн различной природы при переходе от низких частот генерации к высоким. Поэтому в линейной задаче продольная структура поля в резонаторе не представляет особого интереса. Однако в связи с тем, что до сих пор при анализе физических процессов в подобных системах используется подход, основанный на решении уравнения движения электронов, здесь уместно привести значения комплексных амплитуд электромагнитных и пучковых волн, полученные в результате численного эксперимента. Это позволит проконтролировать законность тех допущений, которые делаются при записи уравнения движения частиц.

Приводимые ниже значения амплитуд получены в результате подстановки в формулы (12) значений ω и k_{ν} . При этом индексы 1 и 2 относятся к медленной и быстрой пучковым волнам соответственно, а индекс 3 отмечает попутную электромагнитную волну. Частоты генерации и соответствующие им инкременты определены в формулах (28) и (29), которые соответствуют значениям параметров $\alpha_s^2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 10$ и имеют $n = 1, 2$,

$$n = 1, \quad \frac{A_1}{A_4} = 7.77 \cdot 10^{-2} \exp(i \cdot 0.13),$$

$$\frac{A_2}{A_4} = -6.80 \cdot 10^{-4} \exp(i \cdot 0.35),$$

$$\frac{A_3}{A_4} = 0.79 \exp(i \cdot 0.265); \quad (40)$$

$$n = 2, \quad \frac{A_1}{A_4} = 8.72 \cdot 10^{-2} \exp(i \cdot 2.83 \cdot 10^{-2}),$$

$$\frac{A_2}{A_4} = -7.84 \cdot 10^{-4} \exp(i \cdot 3.64 \cdot 10^{-2}),$$

$$\frac{A_3}{A_4} = 0.84 \exp(i \cdot 1.56 \cdot 10^{-2}); \quad (41)$$

$$n = 3, \quad \alpha_s^2 = 2.6 \cdot 10^{-2}, \quad \gamma = 10, \quad \frac{\omega}{k_{\perp s} u} = 1.1618648 + i \cdot 1.6182782 \cdot 10^{-2},$$

$$\frac{A_1}{A_4} = 0.104 \exp(i \cdot 2.03 \cdot 10^{-2}),$$

$$\frac{A_2}{A_4} = -9.28 \cdot 10^{-4} \exp(i \cdot 2.94 \cdot 10^{-2}),$$

$$\frac{A_3}{A_4} = 0.86 \exp(i \cdot 1.37 \cdot 10^{-3}). \quad (42)$$

Сравнение данных (40)–(42) показывает, что во всех случаях наибольшей является амплитуда встречной электромагнитной волны A_4 . При увеличении частоты генерации слабо возрастает амплитуда попутной

электромагнитной волны, оставаясь несколько меньшей, чем A_4 . Вначале медленно, а затем быстро возрастает амплитуда медленной пучковой волны, в связи с чем ее отбрасывание при высоких и даже умеренных частотах не может быть оправдано. Амплитуда же быстрой пучковой волны, медленно возрастая, остается значительно меньшей, чем амплитуды всех остальных волн. Отсюда, однако, нельзя сделать заключения о возможности неучета этой волны. Дело в том, что пучковые волны вызывают по сравнению с электромагнитными значительно бóльшую модуляцию плотности заряда и тока пучка (при $n = 1$ в 275 и в 40 раз соответственно). Вклад всех четырех волн в модуляции азимутального магнитного поля примерно одинаков.

Заключение

Выше нами была исследована задача возбуждения электромагнитных волн в идеальном цилиндрическом резонаторе конечной длины, пронизываемом нейтрализованным по заряду релятивистским электронным пучком с допредельным током. Решалась начальная задача временного развития возмущений типа (7). При этом было показано, что такие возмущения колеблются с некоторой частотой ω , а амплитуды нарастают во времени. По своей природе развивающаяся неустойчивость, известная как монотронная, аналогична периодической неустойчивости Пирса [6] и обусловлена неоднородностью амплитуд воздействующих на электроны волн. Определены дискретные спектры частот колебаний и инкременты нарастания амплитуд в зависимости от плотности электронов пучка, их энергии и геометрических размеров резонатора. Максимальным инкрементом нарастания обладают относительно низкочастотные (длинно-волновые) колебания, частоты которых близки к критическим частотам резонатора. Указаны пути повышения возбуждаемых в системе частот без существенного уменьшения инкрементов нарастания, а поэтому и эффективности.

Результаты проведенного нами анализа количественно отличаются от полученных в работах [3,4]. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, в работах [3,4] учитывалось взаимодействие электронов пучка только с одной попутной электромагнитной волной, в то время как мы учитывали взаимодействие со всеми существующими в системе четырьмя волнами, две из которых пучковые, а две электромагнитные (одна попутная и одна встречная). Более того, наиболее эффективно пучок передает энергию именно встречной волне, а поэтому неучет этой волны приводит к значительному уменьшению инкремента развития неустойчивости. Во-вторых, в работах [3,4] исследовалось возбуждение высокочастотных волн, частоты которых намного выше критических частот резонатора. У таких волн мнимая часть продольного волнового числа в соответствии с формулой (33) мала, и поэтому их инкремент невелик. На наш взгляд, сложившееся в последние годы мнение о невысокой эффективности монотрона как генератора или усилителя электромагнитного излучения недостаточно обосновано. Необходимо продолжить экспериментальное и теоретическое исследование линейного и нелинейного режимов работы этого прибора.

Авторы признательны Ю.В. Бобылеву за предоставление нам результатов численного моделирования.

Список литературы

- [1] Müller J.J., Rostas E., Helvet J.E. // Phys. Acta. 1940. Vol. 13. P. 435-450.
- [2] Biguard F., Grivet P., Septiet A. // IEEE Trans. 1968. Vol1M=17. № 4. P. 354-358. За-
рубежная радиоэлектроника. 1969. № 10. С. 123-131.
- [3] Юлпатов В.К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. № 12. С. 1784-1788.
- [4] Сморгонский А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. № 1. С. 150-155.
- [5] Северьянов В.В. // Кр. сообщ. по физике ФИАН. 1991. № 11/12. С. 14-17.
- [6] Кужлев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в
плазме. М.: Наука, 1990.
- [7] Бобылев Ю.В., Северьянов В.В. // Кр. сообщ. по физике ФИАН. 1992. № 3/4. С. 29-
35.

Институт общей физики
Москва

Поступило в Редакцию
20 января 1992 г.
