

01;04;12

©1992 г.

## ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ХОЛЛОВСКОГО ТОКА

*А.И.Бугрова, М.В.Козинцева, А.И.Морозов*

Рассматривается общий подход к проблеме индукционных измерителей на примере ускорителя с замкнутым дрейфом типа УЗДП и оценивается возникающая погрешность измерений.

### Введение

В работах [1,2] предложен метод определения величины азимутально-го дрейфового тока  $I_\theta$  и его осевого центра тяжести в плазменном ускорителе типа УЗДП [3] с помощью системы катушек, расположенных вне канала ускорителя. В дальнейшем этот метод использовался и для определения основных характеристик дрейфового тока [4-6]. Метод основан на регистрации величины эдс в катушках при изменении магнитного потока, создаваемого дрейфовым током электронов. Однако в указанных работах число измерительных катушек выбиралось "достаточно" случайно, а анализ ошибок метода отсутствовал.

Для анализа погрешности метода и выбора оптимального числа измерителей необходимо решать уравнение Лапласа с учетом магнитной системы, реального числа катушек и т.д., что делает поставленную задачу достаточно сложной. В настоящей работе предлагается общий подход к нахождению величины дрейфового тока, анализируется погрешность метода в этом случае и даются рекомендации по выбору оптимального числа катушек. Рассмотрение ведется в линейном приближении, без учета влияния магнитопровода. Предполагается, что холловский ток локализован в достаточно ограниченной области пространства.

### Сущность метода

Пусть холловский (дрейфовый) ток находится в кольцевом канале в пределах  $R_1 < r < R_2$  и  $0 < z < L$  и представлен токовым витком радиуса  $r_0$ . Измерительные катушки радиусом  $r_k$  располагаются соответственно на внешней либо внутренней стороне канала (рис. 1). При включении

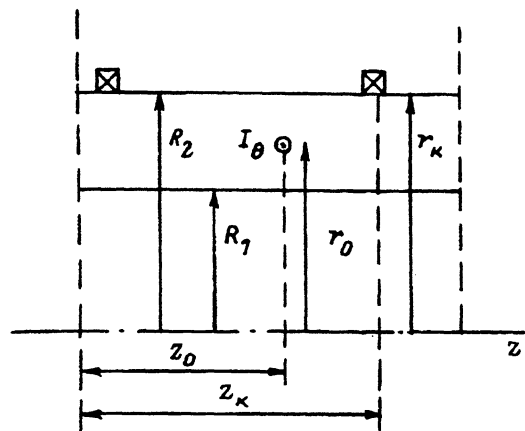


Рис. 1.

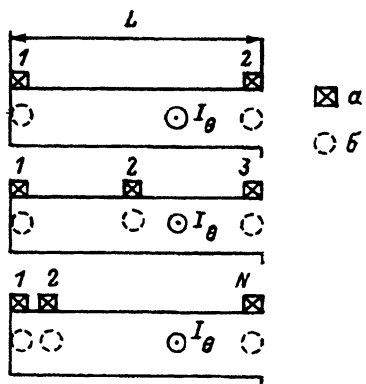


Рис. 2. Схема расположения измерительных катушек (а) и калибровочных витков (б).

(или выключении) ускорителя нарастающий (или убывающий) дрейфовый ток создает переменное полоидальное магнитное поле. В результате в каждой  $k$ -й катушке будет наведена эдс  $\varepsilon_k$ , связанная с потоком  $\Phi_k$ , пронизывающим эту катушку, уравнением

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k dt = \Phi_k. \quad (1)$$

В зависимости от величины азимутального тока и его местоположения сигналы  $\Phi_k$  будут различными. Зная набор значений  $\Phi_k$ , можно так или иначе восстановить параметры холловского тока  $I_\theta$  с некой точностью. В данном случае мы воспользуемся методом “калибровочных витков”. Поместим в разных точках канала некое количество витков и дадим на них поочередно некие импульсы тока. Число калибровочных витков считаем равным числу измерительных катушек  $N$ . На рис. 2 показано одно из возможных расположений калибровочных витков и измерительных катушек. Понятно, что в общем случае оно может быть произвольным. При каждом измерении будет получено  $N$  сигналов с  $N$  измерительных катушек. Эти сигналы обозначим  $\Psi_k(z_i)$  ( $1 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq i \leq N$ ), где  $k$  — номер измерительной катушки,  $i$  — номер позиции калибровочного витка. Теперь построим систему из  $N$  линейных уравнений, удовлетворяющих требованию

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \Psi_k(z_i) = \eta_i \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq N). \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_k$  — некоторые “весовые множители”,  $\eta_i$  — значение искомой величины, в нашем примере тока  $I_i$  в  $i$ -м калибровочном витке. При измерении полной величины холловского тока нужно потребовать, чтобы при всех  $z_i$  величины  $\eta_i$  были равны заданным значениям тока  $I_i$ . Используя полученные при калибровке значения  $\Psi_k(z_i)$ , находим, решая систему (2), весовые множители  $\alpha_k$ . По найденным значениям  $\alpha_k$  можно определить с

некоторой точностью величину холловского тока с помощью выражения

$$I_{\theta} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \Psi_k(z_0), \quad (3)$$

где  $\Psi_k(z_0)$  — сигналы в измерительных катушках, наводимые дрейфовым током.

В предложенной схеме измерений предполагается, что можно представить искомую величину в виде линейной комбинации  $\Psi_k(z_0)$ , т.е. задача рассматривается в линейном приближении. Оно заведомо справедливо, если в ускорителе отсутствуют ферромагнетики. В реальных условиях УЗДП магнитопровод сделан из железа, но он работает в режиме, далеком от насыщения.

### Источники ошибок

Рассматриваемая задача определения полного тока заведомо корректна, так как общий ток в канале может быть измерен (например, поясом Роговского). Однако при использовании дискретного набора катушек возникают свои трудности. Так, в реальных условиях распределение холловского тока по  $r$  и по  $z$  неизвестно, случайный выбор положения витков при калибровке заведомо порождает погрешность. Назовем ее погрешностью по координате. Очевидно, что эта ошибка в идеальных условиях будет тем меньше, чем больше число катушек. Однако сигналы, снимаемые с катушек (другими словами, значения  $\Psi_k(z_i)$ ), измеряются с определенной точностью. Это вносит погрешность в определение весовых множителей  $\alpha_k$ . Назовем погрешность в определении  $\alpha_k$ , возникающую из-за неточности измерения сигнала, приборной. С ростом  $N$  значения  $\Psi_k(z_i)$  для соседних измерительных катушек все меньше отличаются друг от друга. Это приводит к тому, что определитель системы (2) при увеличении  $N$  стремится к нулю, а значит, влияние точности измерения сигнала возрастает.

### Математическая схема

В отличие от реального эксперимента, в котором холловский ток “размазан” в пространстве, расчет проведен (рис. 1) для случая “линейных токов”.

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой совпадает с осью канала длиной  $L$ . Холловский ток величины  $I_{\theta}$  радиуса  $r_0$ , плоскость которого находится в сечении  $z_0$ , создает через катушку радиуса  $r_k$ , расположенную в сечении  $z_k$ , магнитный поток [7]

$$\Psi_k(z_0) = \frac{2\mu_0 I_{\theta}}{g} \sqrt{r_0 r_k} \{ (1 - q^2) K(g) - E(g) \}, \quad (4)$$

где

$$g^2 = \frac{4r_k r_0}{(r_k + r_0)^2 + (r_k - z_0)^2}. \quad (5)$$

Здесь  $K(g)$ ,  $E(g)$  — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Пусть число калибровочных витков и измерительных катушек равно

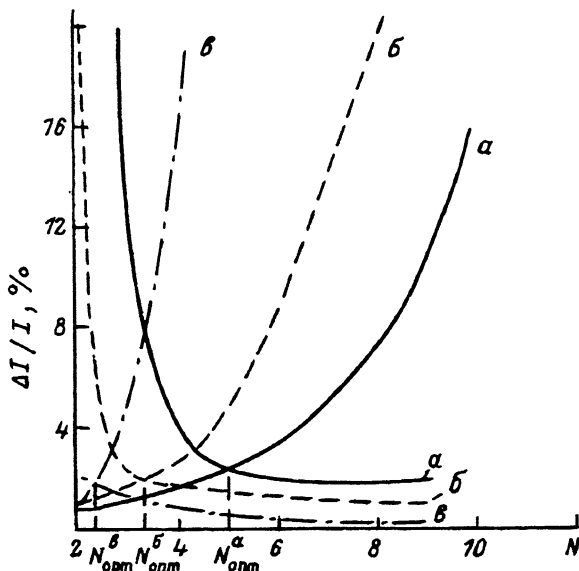


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности от числа катушек.

$1$  — максимальная погрешность по координате  $E_k$ ,  $2$  — приборная погрешность  $E_{п1}$ ,  $\epsilon = 1\%$ ;  $L = 40$  мм;  $R_1$ , мм:  $a - 20$ ,  $б - 27$ ,  $в - 127.5$ ;  $R_2$ , мм:  $a - 25$ ,  $б - 36$ ,  $в - 145$ ;  $L/(R_2 - R_1)$ :  $a - 8$ ,  $б - 4.4$ ,  $в - 2.3$ .

$N$ . Задача определения коэффициентов  $\alpha_k$  сводится к решению системы уравнений (2), которая в безразмерном виде (обозначение безразмерных величин опущено) примет вид

$$\begin{aligned} 1 &= \Pi(\alpha_1 \Psi_{11} + \alpha_2 \Psi_{12} + \dots + \alpha_N \Psi_{1N}), \\ 1 &= \Pi(\alpha_1 \Psi_{21} + \alpha_2 \Psi_{22} + \dots + \alpha_N \Psi_{2N}), \\ 1 &= \Pi(\alpha_1 \Psi_{N1} + \alpha_2 \Psi_{N2} + \dots + \alpha_N \Psi_{NN}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Pi = \alpha_0 \cdot h$  — критерий подобия;  $\alpha_0$ ,  $h$  — характерные масштабные величины.

Для различных  $N$  данная система решалась на ЭВМ методом вращения [8]. Затем, используя полученные  $\alpha_k$ , по известным  $\Psi_k(z_0)$  рассчитывается по формуле (3) величина холловского тока.

### Погрешность по координате

Как уже указывалось, погрешность по координате вызвана тем, что положение калибровочного витка не совпадает с положением холловского тока. Графики изменения максимальной относительной погрешности по координате  $E_k = \Delta I_\theta / I_\theta$  от числа катушек для различных значений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  приведены на рис. 3. Видно, что чем меньше расстояние между измерительными катушками (т.е. чем больше их число), тем меньше будет эта погрешность. Отметим, что если область локализации холловского тока находится вне зоны измерений, охватываемой крайними катушками, то погрешность по координате достигает  $\sim 100\%$  при удалении его от крайней катушки на расстояние  $\sim L$ .

Вид критерия подобия  $\Pi = \alpha_0 \cdot h$  и наличие в УЗДП характерных размеров  $L$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  позволили предположить, что погрешность по координате (рис. 3) определяется параметром

$$b = \frac{L}{R_2 - R_1}. \quad (7)$$

Зависимость погрешности по координате от числа катушек можно в первом приближении интерполировать формулой

$$E_k = \frac{L}{R_2 - R_1} e^{-\beta N} = be^{-\beta N}, \quad (8)$$

где  $\beta \simeq 1.4$ .

Следует заметить, что эффект распределения дрейфового тока в пространстве приведет к уменьшению абсолютной величины этой ошибки.

### Ошибка, вызванная “занулением” детерминанта

Пусть погрешность измерения сигнала равна  $\varepsilon$ . Выше отмечалось, что приборная ошибка определения тока, вызванная неточностью определения весовых множителей  $\alpha_k$ , будет возрастать с увеличением числа катушек  $N$ . Вообще говоря, она находится из соотношения

$$E_n = \frac{\Delta I_\theta}{I_\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{I_\theta - \alpha_k^m \Psi_k^l(z_0)}{I_\theta}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (9)$$

Здесь  $n$  — число расчетов весовых множителей при заданной приборной погрешности  $\varepsilon$  измерения сигналов  $\Psi_k(z_i)$ ;  $\alpha_k^m$  — значения весовых множителей, полученные в  $m$ -м расчете ( $m \leq n$ ) системы (6);  $\Psi_k^l(z_0)$  — значение сигнала в  $l$ -м расчете.

Однако мы определим эту ошибку по-другому. Очевидно, что разброс значений детерминанта будет определять разброс значений  $\alpha_k$ . Пусть с  $N$  катушек получено  $N$  сигналов для  $k$ -й позиции калибровочного витка  $1 \leq k \leq N$ . Будем считать эти значения точными. Детерминант системы (6) будет иметь вид

$$(Det)_{N0} = \begin{vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{1N} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N1} & \Psi_{N2} & \dots & \Psi_{NN} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Моделирование приборной ошибки, допущенной при измерении сигналов  $\Psi_{ki}$ , проведем с помощью генератора случайных чисел, считая ее равномерной в пределах  $\pm \varepsilon$ . Тогда детерминант вида (10), рассчитанный с использованием значений сигналов  $\Psi_{ki}$ , измеренных с погрешностью  $\varepsilon$ , можно представить в виде

$$(Det)_{Nl} = (Det)_{N0} + \Delta_{Nl}. \quad (11)$$

Просчитав детерминант  $(Det)_{Nl}$  несколько ( $M$ ) раз, определим среднеквадратичную приборную погрешность как

$$E_n = \frac{\Delta I_\theta}{I_\theta} = \frac{\sqrt{\sum_{\varepsilon=1}^M [(Det)_{Nl} - (Det)_{N0}]^2}}{M(Det)_{N0}} = \frac{\sqrt{\sum_{\varepsilon=1}^M \Delta_{Nl}^2}}{M(Det)_{N0}}. \quad (12)$$

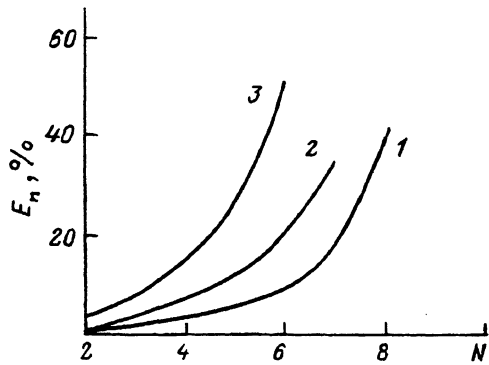


Рис. 4. Изменение приборной погрешности от числа катушек при  $L = 40$  мм,  $R_1 = 27$  мм,  $R_2 = 36$  мм.  
 $\varepsilon$ , %: 1 — 1, 2 — 2, 3 — 5.

Изменение величины  $E_n$  от числа катушек при  $\varepsilon$ , равных 1, 2 и 5%, показано на рис. 4. Видно, что приборная погрешность при фиксированном числе катушек возрастает пропорционально  $\varepsilon$ .

Графики зависимости погрешности при  $\varepsilon = 1\%$  для различных  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  приведены на рис. 3. Как видно, приборная погрешность при постоянных  $\varepsilon$  и  $N$  определяется величиной

$$a = \frac{R_1}{L}. \quad (13)$$

Зависимость приборной ошибки от размеров системы и числа катушек можно интерполировать формулой

$$E_n = \varepsilon \frac{R_1}{L} e^{\gamma N} = \varepsilon a e^{\gamma N}, \quad (14)$$

где  $\gamma \simeq 0.4$ .

### Определение оптимального числа катушек

Поскольку в экспериментах имеют место оба вида ошибок, то, очевидно, оптимальное число катушек при заданной точности измерения сигнала определится точкой пересечения кривых  $E_k(N)$  и  $E_n(N)$ , что и показано на рис. 3. Однако оптимальное число катушек можно найти, проанализировав на экстремум уравнение  $E_k = E_n$ ,

$$be^{-\beta N} = \varepsilon \cdot a e^{\gamma N}. \quad (15)$$

Продифференцировав и приравняв к нулю это выражение, получим

$$N_{\text{опт}} = \frac{1}{\beta + \gamma} \ln \frac{\beta b}{\varepsilon a \gamma} = \frac{1}{\beta + \gamma} \ln \frac{\beta}{\varepsilon \gamma} \frac{L^2}{R_1(R_2 - R_1)}. \quad (16)$$

Для случаев, приведенных на рис. 3, уравнение (16) дает  $N_{\text{опт}}^a = 4.79$ ,  $N_{\text{опт}}^b = 4.2$ ,  $N_{\text{опт}}^c = 2.7$ , что находится в удовлетворительном соответствии с результатами, полученными из расчета. Кривые, связывающие параметры  $a$  и  $b$  для заданных  $N_{\text{опт}}$ , приводятся на рис. 5.

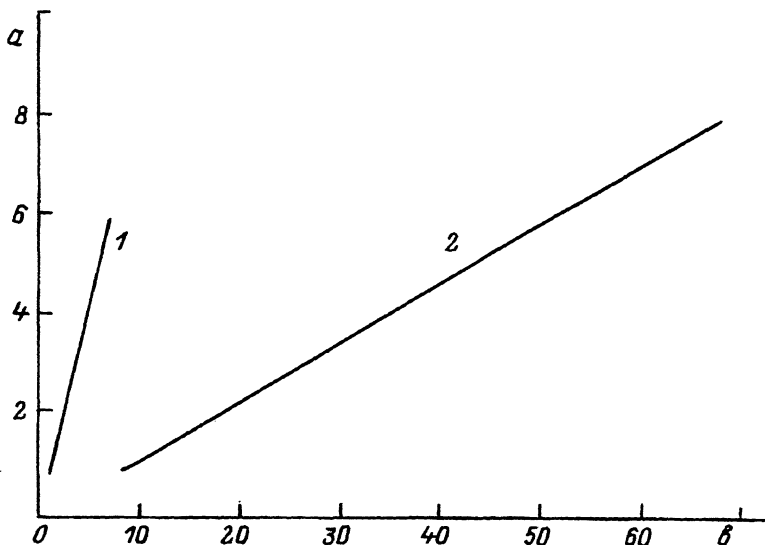


Рис. 5. Зависимости, связывающие параметры  $\alpha$  и  $\theta$  для заданных  $N_{\text{опт}}$ .  
 $N_{\text{опт}}$ : 1 — 3, 2 — 4.

### Об измерении других параметров холловского тока

Предложенный метод может быть применен не только для определения величины холловского тока, но также и для нахождения других его основных характеристик: центра тяжести по  $r$  или  $z$ , распределения холловского тока по длине канала и т.д. Так, для определения координаты центра тяжести по  $z$  вместо системы (6) должна быть решена система вида

$$\sum \alpha_k^z \Psi_k(r_i, z_i) = (z_i - z_*) \quad (17)$$

при калибровочном токе  $I = 1$  А. Здесь  $z_*$  — координата “априорного” центра тяжести. Решая эту систему при известных  $r_i, z_i, \Psi_k(r_i, z_i)$  находим  $\alpha_k^z$ . В общем случае, когда речь идет о произвольном токе, задача сводится к решению системы

$$z_i - z_* = \frac{\sum \alpha_k^z \Psi_k(r_i, z_i)}{\sum \alpha_k^0 \Psi_k^0(r_i, z_i)}. \quad (18)$$

Совершенно аналогично можно найти и координату центра тяжести тока по  $r$ , и его распределение по длине канала.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить В.К.Харчевникова за ценные дискуссии.

### Список литературы

- [1] Демьяненко В.Н., Зубков И.П., Лебедев С.В., Морозов А.И. // ЖФТ. 1978. Т. 48. Вып. 3. С. 634–637.
- [2] Бугрова А.И., Версоцкий В.С., Харчевников В.К. // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 10. С. 2238–2241.
- [3] Морозов А.И., Есинчук Ю.В., Тилинин Г.Н. и др. // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 1. С. 54–63.
- [4] Бугрова А.И., Морозов А.И., Харчевников В.К. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 6. С. 1067–1071.

- [5] Баркалов Е.Е., Веселовзоров А.Н., Субботин М.Л. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 2. С. 171-172.
- [6] Бугрова А.И., Версоцкий В.С., Харчевников В.К. // Тр IV Всесоюз. конф. по плазменным ускорителям и ионным инжекторам. М., 1978. С. 37-38.
- [7] Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978.
- [8] Набор программ для ЭЦВМ. Т. 1-2. Киев: Наукова думка, 1973.

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступило в Редакцию  
10 января 1992 г.

---