

01;03
©1992

**МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
СЛОЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ,
РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО
ПРОВОДЯЩЕГО СТЕРЖНЯ,
ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ПРОПУСКАНИИ СИЛЬНО
СКИНИРОВАННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА**

С.Д.Самуйлов А.А.Семенов

Рассматривается магнитогиродинамическая (МГД) неустойчивость слоя проводящей жидкости, расположенной на поверхности твердого стержня, возникающая при пропускании по проводнику сильно скинированного электрического тока. Решается задача об устойчивости жидкого цилиндрического проводящего слоя радиуса r_0 , лежащего на поверхности абсолютно твердого проводящего цилиндрического стержня радиуса εr_0 в магнитном поле протекающего по проводнику электрического тока. Электрический ток считаем равномерно распределенным по слою толщиной $r_0(1 - \gamma)$, ($\gamma \leq \varepsilon$): ток течет по жидкому слою и части твердого стержня. Жидкость считаем невязкой и несжимаемой, будем учитывать поверхностное натяжение и инерцию жидкости. Проводимость жидкости и твердого стержня считаем одинаковой, удовлетворяющей условию "плохой" проводимости. Это явление может представлять интерес как фактор, ограничивающий нагрев поверхности материала, как начальная фаза разрушения проводника высокочастотным электрическим током. Можно использовать это явление для формирования поверхности с заданной шероховатостью, для тонкой доводки размера деталей и т.п. На его основе предложен способ получения мелкодисперсных гранул высокой чистоты из тугоплавких, химически активных в расплавленном состоянии материалов (сплавы титана, никеля, кобальта, вольфрама, карбиды и т.п.).

Воздействие потоков энергии большой плотности на материалы представляет большой научный и практический интерес. Один из видов такого воздействия — пропускание по поверхности материала электрического тока большой плотности. Воздействие электрического тока только на поверхность материала может быть достигнуто при сильно выраженном скин-эффекте (высокочастотный или импульсный ток), при этом на поверхности проводника может происходить плавление и даже испарение материала, а внутренняя часть проводника остается твердой [1].

В настоящей работе рассматривается магнитогиродинамическая (МГД) неустойчивость слоя проводящей жидкости, расположенной на поверхности твердого стержня, возникающая при пропускании по проводнику электрического тока. В результате развития неустойчивости жид-

ность происходит в движении, формируется волнообразная поверхность, силы упругости твердого стержня препятствуют развитию неустойчивости вглубь проводника, поэтому разрушения проводника как целого не происходит (в отличие от случая, когда проводник полностью расплавлен [2]). При достаточной скорости нарастания неустойчивости (инкременте) происходит отрыв части жидкости от поверхности материала в виде капель. Это явление может представлять интерес как фактор, ограничивающий нагрев поверхности материала, как начальная фаза разрушения проводника высокочастотным электрическим током. Можно использовать это явление для формирования поверхности с заданной шероховатостью, для тонкой доводки размера деталей путем диспергирования поверхностного слоя заданной толщины и т.п. На его основе предложен способ получения мелкодисперсных гранул высокой чистоты из тугоплавких, химически активных в расплавленном состоянии материалов (сплавы титана, никеля, кобальта, вольфрама, карбиды и т.п.) [3-5]. Способ заключается в том, что производятся послойное плавление и диспергирование заготовки. Высокая чистота материала обеспечивается тем, что исключен контакт жидкого металла с какими-либо конструктивными материалами, а в камере для гранулирования может быть создана любая атмосфера, в том числе высокий вакуум.

При сильно выраженном скин-эффекте плотность электрического тока спадает от поверхности вглубь проводника $j \sim e^{-(r-r_0)/\delta}$ (r_0 — радиус проводника, δ — толщина скин-слоя), а выделяемое джоулево тепло убывает более резко $q \sim j^2 \sim e^{2(r-r_0)/\delta}$. Плавление материала начинается с поверхности, толщина расплавленного слоя растет по мере пропускания тока, однако, поскольку неустойчивость развивается значительно быстрее, чем происходит отвод тепла, толщина расплавленного слоя значительно меньше глубины проникновения электрического тока. В дальнейшем для простоты рассмотрения будет считать, что толщина расплавленного слоя и глубина проникновения тока не меняются в процессе развития неустойчивости, а электрический ток равномерно распределен по слою толщиной δ .

Рассматривается устойчивость жидкого цилиндрического проводящего слоя радиуса r_0 , лежащего на поверхности абсолютно твердого проводящего цилиндрического стержня радиуса ϵr_0 в магнитном поле протекающего по проводнику электрического тока. Электрический ток считаем равномерно распределенным по слою толщиной $r_0(1 - \gamma)$, ($\gamma \leq \epsilon$): ток течет по жидкому слою и части твердого стержня. Жидкость считаем невязкой и несжимаемой, будем учитывать поверхностное натяжение и инерцию жидкости. Проводимость жидкости и твердого стержня считаем одинаковой, удовлетворяющей условию “плохой” проводимости [6]

$$\frac{r_0 \sigma H_0}{c^2} \sqrt{\frac{4\pi}{\rho}} \ll 1,$$

(в системе СГС) здесь σ — проводимость, H_0 — напряженность магнитного поля на поверхности проводника, ρ — плотность жидкости, c — скорость света. Подобная задача решалась в работе [7], но в ней рассматривались лишь два случая распределения электрического тока по сечению проводника: 1) ток течет только по жидкому слою на поверхности проводника и 2) ток равномерно распределен по всему сечению проводника (по жидкому слою и твердому стержню). Однако для практики (в том случае,

когда жидкий слой создается за счет плавления проводника сильно скин-ированным током) наиболее интересен более общий случай: ток течет по тонкому поверхностному слою проводника, но глубина его проникновения в проводник существенно превышает толщину расплавленного слоя.

В этом случае движение жидкости описывается следующими уравнениями:

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\nabla P - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}], \quad (1)$$

ρ — плотность жидкости, ξ — ее смещение, P — давление, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

В невозмущенном состоянии напряженность магнитного поля и давление имеют следующие значения:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \begin{cases} 0, & r < \gamma r_0, \\ \frac{H_0}{1-\gamma^2} \left(\frac{r}{r_0} - \gamma^2 \frac{r_0}{r} \right), & \gamma r_0 \leq r \leq r_0, \\ H_0 \frac{r_0}{r}, & r \geq r_0, \end{cases} \quad (3)$$

H_0 — напряженность магнитного поля при $r = r_0$

$$P = \frac{H_0^2}{2\pi(1-\gamma^2)^2} \left\{ \frac{r_0^2 - r^2}{2r_0^2} + \gamma^2 \ln \frac{r}{r_0} \right\} + \frac{\alpha}{r_0}, \quad (4)$$

α — коэффициент поверхностного натяжения жидкого материала.

На равновесное состояние наложено малое возмущение

$$\begin{aligned} \xi^*(r, \varphi, z, t) &= \xi^*(r) \exp(im\varphi + ikz + i\omega t), \\ \mathbf{H}^*(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{H}^*(r) \exp(im\varphi + ikz + i\omega t), \\ \mathbf{P}^*(r, \varphi, z, t) &= \mathbf{P}^*(r) \exp(im\varphi + ikz + i\omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Напряженность возмущенного магнитного поля в центральной области проводника, по которой не течет электрический ток, можно представить в виде $\mathbf{H}_1^* = \text{grad} \Psi$, где Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \Psi = 0$, решение которого, ограниченное в точке $r = 0$, будет $\Psi(r) = mAr_0 I_m(kr)$ и соответственно

$$\begin{aligned} H_{1r}^*(r) &= mA x I_m'(kr), \\ H_{1\varphi}^*(r) &= im^2 A \frac{r_0}{r} I_m(kr), \\ H_{1z}^*(r) &= imAx I_m(kr). \end{aligned} \quad (6)$$

Для области проводника, по которой течет электрический ток, решение уравнения (2) запишется в виде

$$H_{2r}^*(r) = mBx I_m'(kr) + mCx K_m'(kr) + mD \frac{r_0}{r} I_m(kr) + mL \frac{r_0}{r} K_m(kr),$$

$$H_{2\varphi}^*(r) = im^2 B \frac{r_0}{r} I_m(kr) + im^2 C \frac{r_0}{r} K_m(kr) + iDx I_m'(kr) + iLx K_m'(kr),$$

$$H_{2z}^*(r) = imBx I_m(kr) + imCx K_m(kr). \quad (7)$$

Для области вне проводника

$$H_{3r}^*(r) = mMx K_m'(kr),$$

$$H_{3\varphi}^*(r) = im^2 M \frac{r_0}{r} K_m(kr),$$

$$H_{3z}^*(r) = imMx K_m(kr), \quad (8)$$

A, B, C, D, L, M — постоянные интегрирования; $x = kr_0$; $I_m(x)$; $K_m(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Уравнение (1) в линейном приближении относительно смещения запишется в виде

$$\rho\omega^2 \xi = \nabla P + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}_2 \text{rot} \mathbf{H}_2^*] + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H}_2^* \text{rot} \mathbf{H}_2]. \quad (9)$$

Так как жидкость несжимаема, из уравнения (9) получаем

$$\Delta P_2^* = -\frac{1}{2\pi} \text{rot} \mathbf{H}_2 \text{rot} \mathbf{H}_2^*. \quad (10)$$

Поскольку $\gamma \leq \varepsilon$, решение уравнения (10) запишется в виде

$$P_2^* = \frac{1}{k} \rho\omega^2 [Q I_m(kr) + R K_m(kr)] - \frac{ixH_0r}{2\pi(1-\gamma^2)r_0} [D I_m'(kr) + L K_m'(kr)]. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), получаем

$$\begin{aligned} \xi_r(r) = & Q I_m'(kr) + R K_m'(kr) + \frac{im^2 H_0}{2\pi\rho\omega^2(1-\gamma^2)r} B I_m(kr) + \\ & + \frac{im^2 H_0}{2\pi\rho\omega^2(1-\gamma^2)r} C K_m(kr) + \frac{iH_0}{2\pi\rho\omega^2(1-\gamma^2)r_0} D \left[x I_m'(kr) - \right. \\ & \left. - \left(m^2 + \frac{k^2 r^2 + \gamma^2 x^2}{2} \right) \frac{r_0}{r} I_m(kr) \right] + \frac{iH_0}{2\pi\rho\omega^2(1-\gamma^2)r_0} \times \\ & \times L \left[x K_m'(kr) - \left(m^2 + \frac{k^2 r^2 + \gamma^2 x^2}{2} \right) \frac{r_0}{r} K_m(kr) \right], \quad (12) \end{aligned}$$

Q, R — постоянные интегрирования.

Граничные условия могут быть получены при учете непрерывности напряженности магнитного поля, неразрывности течения жидкости, непрерывности потока импульса на возмущенной поверхности. В результате получается система из девяти уравнений относительно девяти неизвестных $A, B, C, D, L, M, Q, R, \xi^*(r_0)$. Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравнявая нулю определитель системы, получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 = & -\frac{H_0^2}{\pi(1-\gamma^2)^2r_0^2} \left\{ 1 - \frac{1+\gamma^2}{2}\Psi_m^{-1}(x, \varepsilon x) + \frac{x^2}{2}\Psi_m(x, \gamma x) \times \right. \\ & \times [1 + \gamma^2 - (\varepsilon^2 + \gamma^2)E_m(x, \gamma x)E_m(x, \varepsilon x)E_m^{-1}(\varepsilon x, \gamma x)] - \\ & - \Psi_m(x, \gamma x)\Psi_m^{-1}(\varepsilon x, \gamma x)E_m(x, \varepsilon x)E_m(x, \gamma x)E_m^{-1}(\varepsilon x, \gamma x) + \\ & + m^2 \left[1 - E_m(x, \varepsilon x)E_m(x, \gamma x)E_m^{-1}(\varepsilon x, \gamma x) + I_m(x)K_m(x) - I_m(\varepsilon x)K_m(x) \times \right. \\ & \times E_m(x, \varepsilon x) - I_m(\gamma x)K_m(x)E_m(x, \gamma x) + I_m(\gamma x)K_m(\varepsilon x)E_m(x, \varepsilon x) \times \\ & \left. \left. \times E_m(x, \gamma x) \right] \right\} + \frac{\alpha}{r_0^3}\Psi_m^{-1}(x, \varepsilon x)(1-x^2-m^2), \end{aligned} \quad (13)$$

здесь $E_m(y, z) = \{z[I'_m(z)K_m(y) - I_m(y)K'_m(z)]\}^{-1}$,

$$\Psi_m(y, z) = \frac{I'_m(z)K_m(y) - I_m(y)K'_m(z)}{y[I'_m(y) - K'_m(z) - I'_m(z)K'_m(y)]}.$$

Анализ дисперсионного уравнения. Для длинноволновых возмущений $\lambda \gg r_0$ ($x \rightarrow 0$) при $m = 0$

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 \approx & -\frac{H_0^2x^2(1-\varepsilon^2)}{8\pi(1-\gamma^2)^2r_0^2} \left[1 - \varepsilon^2 - 4\gamma^2 - 2\gamma^4 - \right. \\ & \left. - \frac{4(2\varepsilon^2 + \gamma^2)\gamma^2}{1-\varepsilon^2} \ln \varepsilon \right] - \frac{\alpha(1-\varepsilon^2)}{2r_0^3}, \end{aligned} \quad (14)$$

при $m \geq 1$

$$\rho\omega^2 \approx -\frac{H_0^2(1-\varepsilon^{2m})}{2\pi(1-\gamma^2)^2r_0^2(1+\varepsilon^{2m})} [1 - m(1-\gamma^2)], \quad (15)$$

форма жидкого слоя неустойчива относительно возмущений с модой $m < < \frac{1}{(1-\gamma^2)}$, относительно возмущений более высоких мод форма жидкого слоя устойчива.

Для коротковолновых возмущений $\lambda \ll (1-\varepsilon)r_0$ ($x \rightarrow \infty$)

$$\rho\omega^2 \approx -\frac{H_0^2}{2\pi(1-\gamma^2)r_0^2} \left[1 - \frac{2m^2 + 1 - (2m^2 - 1)\gamma^2}{2(1-\gamma^2)x} \right] + \frac{\alpha x^3}{r_0^3}, \quad (16)$$

$$x_{\max} \approx \left\{ \frac{H_0^2 [2m^2 + 1 + (2m^2 + 1)\gamma^2] r_0^2}{12\pi\alpha(1 - \gamma^2)^2} \right\}^{1/4} \quad (17)$$

— безразмерное волновое число, соответствующее максимальному инкременту нарастания неустойчивости ω_{\max} ,

$$\rho\omega_{\max}^2 \approx -\frac{H_0^2}{2\pi r_0^2(1 - \gamma^2)} + \left\{ \frac{4\alpha H_0^6 [2m^2 + 1 - (2m^2 - 1)\gamma^2]^3}{27\pi^3 r_0^9 (1 - \gamma^2)^6} \right\}^{1/4} \quad (18)$$

— форма жидкого слоя неустойчива относительно возмущений мод

$$m < \left[\sqrt{\frac{r_0 H_0^2}{\pi\alpha(1 - \gamma^2)}} - \frac{1 + \gamma^2}{2(1 - \gamma^2)} \right]^{1/2},$$

относительно возмущений более высоких мод форма жидкого слоя устойчива.

Если величина магнитного давления значительно больше поверхностного натяжения

$$\left(f = \frac{4\pi\alpha}{H_0^2 r_0} \rightarrow 0 \right), \text{ то } \rho\omega_{\max}^2 \approx -\frac{H_0^2}{2\pi r_0^2(1 - \gamma^2)}, \quad (19)$$

$$x_{\text{кр}} = \left[\frac{H_0^2 r_0}{2\pi\alpha(1 - \gamma^2)} \right]^{1/3} \quad (20)$$

— критическое безразмерное волновое число.

Жидкий слой устойчив относительно возмущений его формы для $x > x_{\text{кр}}$.

Частные случаи: 1) электрический ток течет только по жидкому слою; полагая в (13) $\gamma = \varepsilon$, получаем выражение совпадающее с результатом, приведенным в работе [7]; 2) электрический ток равномерно распределен по всему сечению как жидкого слоя так и твердого стержня; полагая $\gamma \rightarrow 0$, получаем выражение, совпадающее с соответствующим результатом работы [7]; 3) полагая в (13) $\gamma \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем известное выражение для инкремента нарастания неустойчивости жидкого цилиндра [2].

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 1 и 2 приведены зависимости безразмерного инкремента нарастания неустойчивости

$$\Omega = -4\pi\rho \frac{r_0^2}{H_0^2} \omega^2$$

от безразмерного волнового числа x для общего случая (рассчитанные по формуле (13)) и для всех трех частных случаев. Из рисунка видно, что при большой толщине расплавленного слоя (равной половине радиуса проводника $\varepsilon = 0.5$) наличие твердого стержня мало влияет на инкремент нарастания неустойчивости (кривые 1-3). В случае тонкого расплавленного слоя (толщиной $0.1r_0$; $\varepsilon = 0.9$) (кривые 4-7) наличие твердого

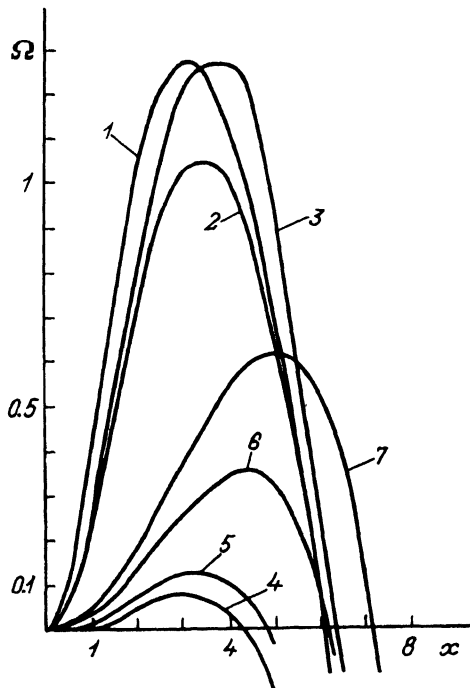


Рис. 1. Зависимость безразмерного инкремента нарастания неустойчивости Ω от безразмерного волнового числа x , $f = 0.01$.

1 — для жидкого цилиндра $\gamma = \epsilon = 0$, для жидкого слоя толщиной $0.5r_0$ ($\epsilon = 0.5$); 2 — $\gamma = 0$, 3 — $\gamma = \epsilon = 0$; для жидкого слоя толщиной $0.1r_0$ ($\epsilon = 0.9$); 4 — $\gamma = 0$, 5 — $\gamma = 0.5$, 6 — $\gamma = 0.8$, 7 — $\gamma = \epsilon = 0.9$.

стержня резко уменьшает величину инкремента, а его максимум смещается в область коротких длин волн. В то же время инкремент в этом случае сильно зависит от толщины слоя, по которому течет ток, с уменьшением толщины этого слоя инкремент резко нарастает, а его максимум смещается в сторону коротких волн. С ростом величины пропускаемого по проводнику электрического тока (магнитного давления, параметра l') инкремент нарастания неустойчивости формы тонкого слоя растет быстрее, чем инкремент неустойчивости жидкого цилиндра, а его максимум сильно сдвигается в сторону коротких длин волн.

Рассматриваемый нами случай произвольной глубины проникновения электрического тока в проводник является более общим по отношению к тем, которые рассматривались в [7]. Результаты расчетов, выполненных в работе [7], не позволяют анализировать зависимость инкремента неустойчивости от толщины расплавленного слоя и глубины проникновения электрического тока в проводник, так как здесь глубина проникновения тока всегда равна толщине расплавленного слоя. В то же время анализ полученных выражений и графиков показывает, что, как и следовало ожидать, уменьшение толщины расплавленного слоя уменьшает инкремент нарастания неустойчивости, а уменьшение глубины проникновения тока его увеличивает.

Для практики наиболее интересен случай, когда по проводнику пропускается электрический ток большой величины ($f \rightarrow 0$), так как в этом случае формируется мелкомасштабная шероховатая поверхность, обра-

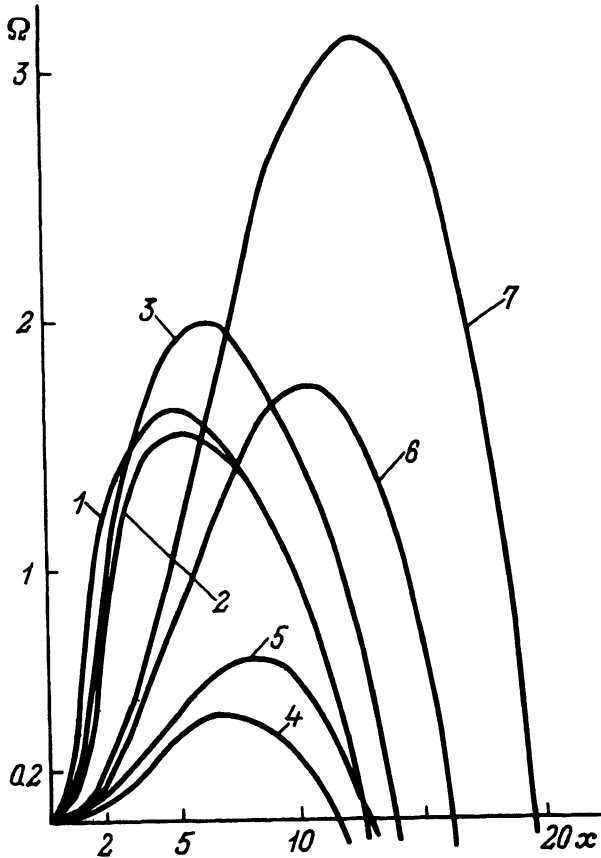


Рис. 2. Зависимость безразмерного инкремента нарастания неустойчивости Ω от безразмерного волнового числа x , $f = 0.001$.

1 — для жидкого цилиндра $\gamma = \epsilon = 0$, для жидкого слоя толщиной $0.5r_0$ ($\epsilon = 0.5$); 2 — $\gamma = 0$, 3 — $\gamma = \epsilon = 0$; для жидкого слоя толщиной $0.1r_0$ ($\epsilon = 0.9$); 4 — $\gamma = 0$, 5 — $\gamma = 0.5$, 6 — $\gamma = 0.8$, 7 — $\gamma = \epsilon = 0.9$.

зуются мелкодисперсные гранулы. Этот случай хорошо описывается коротковолновым приближением (16), длина волны неустойчивости не зависит от толщины расплавленного слоя, а зависит лишь от глубины проникновения электрического тока в проводник

$$\lambda = 2\pi r_0 \left\{ \frac{24\pi^2 \alpha \delta^2}{H_0^2 r_0^3} \right\}^{1/4}, \quad (21)$$

δ — глубина проникновения электрического тока [М] (формулы (21)–(23) в СИ).

Появляется возможность на основе нашего решения уточнить формулы, приведенные в [3–5], для размера гранул и величины электрического тока, при которой начинается процесс гранулирования

$$d_{\text{гр}} = 5 \left(\frac{\alpha d^3 a^4 \delta^2}{\mu_0 I^2} \right)^{1/8}, \quad (22)$$

$$I \geq \left(\frac{\delta^6 \alpha^7 d^{21}}{a^{20}} \right)^{1/14}, \quad (23)$$

где d — диаметр проводника, a — толщина расплавленного слоя на его поверхности.

Таким образом, рассматриваемая в данной работе задача описывает общий и в то же время наиболее близкий к практике случай произвольной глубины проникновения электрического тока в проводник. Полученное решение позволяет правильно описывать зависимость инкремента от толщины расплавленного слоя на поверхности проводника и глубины проникновения электрического тока в проводник, уточнить формулы для вычисления длины волны неустойчивости, а также формулы, описывающие размер гранул и величину тока, при которой начинается процесс гранулирования.

Список литературы

- [1] Лев М.Л., Перегуд Б.П., Федичкина З.В. // ЖТФ, 1976. Т. 46. Вып. 1. С. 125–137.
- [2] Абрамова К.Б., Златин Н.А., Перегуд Б.П. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. Вып. 6. С. 2007–2022.
- [3] Абрамова К.Б., Перегуд Б.П., Самуйлов С.Д., Семенов А.А. // А.С. № 1367296.БИ. 1990. № 27. С. 303.
- [4] Абрамова К.Б., Перегуд Б.П., Самуйлов С.Д., Семенов А.А. // А.С. № 1468665.БИ. 1989. № 12. С. 47.
- [5] Абрамова К.Б., Воронин А.В., Самуйлов С.Д., Семенов А.А. // Тез. докл. III Всесоюз. конф. по металлургии гранул. М., 1991. С. 46–48.
- [6] Вандакуров Ю.В., Колесникова Э.Н. // ЖТФ. 1967. Т. 37. № 11. С. 1984–1992.
- [7] Самуйлов С.Д., Семенов А.А. // Магнитная гидродинамика. 1987. № 3. С. 47–55.

Физико-технический
институт им.А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
19 августа 1991 г.