

01

©1992 г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТКЛИКА БОЛОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НА ОСНОВЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО СВЕРХПРОВОДНИКА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ИМПУЛЬСОМ УФ ЛАЗЕРА

*М.М.Бонч-Осмоловский, Т.И.Галкина,
А.Ю.Клоков, А.Е.Индейкина,
Ю.С.Рязанцев, Ю.А.Сергеев, В.М.Шевцова*

Предложена математическая модель нестационарного процесса отклика болометрической структуры, состоящей из выращенной на подложке пленки высокотемпературного сверхпроводника (ВТСП), на облучение импульсным излучением лазера. Аналитически определена форма отклика в зависимости от амплитуды, длительности и формы импульса лазера. Показано соответствие результатов, полученных на основе предложенной модели, экспериментальным данным работы [1].

Ранее несколько отличающаяся от предложенной в настоящей работе модель отклика болометрической структуры на основе ВТСП на импульсное излучение исследовалась в работе [2] при помощи численных методов.

1. Модель болометрической структуры на основе ВТСП. Основные уравнения

Одним из возможных приложений ВТСП является использование пленок, например, из YBaCuO в качестве детекторов излучения — болометров в широкой области спектра при азотных температурах [3]. Пример такой болометрической структуры, состоящей из эпитаксиальной пленки YBaCuO толщиной 250 нм, выращенной на подложке (100) mgO толщиной 0.85 мм, исследован в работе [1]. В схематическом виде структура приведена на рис. 1. В экспериментах [1] болометр облучался импульсом УФ лазера, длительность импульса составляла 7.3 нс, длина волны 337 нм. Температурный интервал эксперимента составлял 65–80 К.

Перейдем теперь к составлению уравнений математической модели болометрической структуры. Предположим, что ВТСП пленка представляет собой полосу сверхпроводящего материала постоянного поперечного сечения толщиной h , шириной l и длиной L , расположенной на подложке. Поскольку толщина подложки существенно превышает толщину

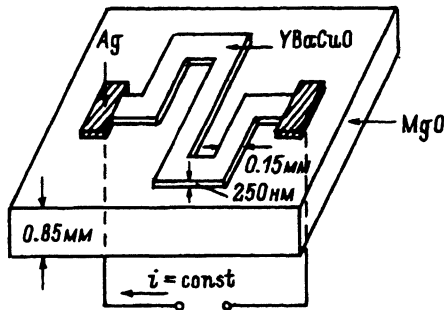
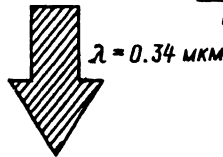
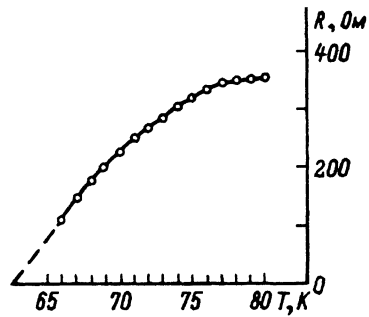


Рис. 1. Схема болометрической структуры.
На вставке зависимость сопротивления пленки $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ от температуры [1].

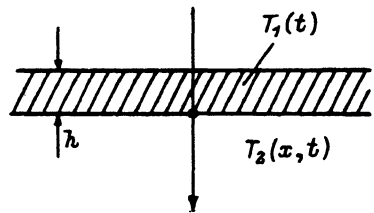


Рис. 2. К одномерной постановке задачи.
Заштрихованная область — ВТСП пленка; T_1 — температура пленки, T_2 — температура в подложке.

ВТСП пленки, то в качестве модельного предложения ниже будем использовать допущение о бесконечной толщине подложки (рис. 2). Необходимо отметить, что такое предположение становится непригодным при достаточно больших длительностях импульса излучения, когда характерная глубина прогрева подложки $\sqrt{\lambda\tau/(\rho_2c_2)}$ (где τ — характерная длительность импульса; λ , ρ_2 , и c_2 — соответственно теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость материала подложки) становится сравнимой с толщиной подложки. Полоска сверхпроводящего материала включена в электрическую цепь прибора, поддерживающего постоянный ток.

Поскольку для данных работы [1] характерная глубина прогрева за время импульса излучения в пленку $\sqrt{\lambda_1\tau/(\rho_1c_1)}$, где λ_1 , ρ_1 и c_1 — соответственно теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость мате-

риала ВТСП, значительно превышает толщину пленки, то будем считать, что в течение всего рассматриваемого нестационарного процесса сверхпроводящая пленка имеет одинаковую по всему объему температуру T . Запишем уравнение баланса тепла в полоске в виде

$$\rho_1 c_1 h l L \frac{dT_1}{dt} = Q_1 - Q_2 + Q_3 + Q_4. \quad (1.1)$$

Здесь t — время, Q_1 — тепловыделение в полоске из-за поглощения, Q_2 — отвод тепла через поверхность контакта полоска-подложка, Q_3 — омический нагрев при прохождении тока в цепи, Q_4 — теплопотери из-за теплоотвода с открытой поверхности полоски ВТСП. Установим теперь вид слагаемых Q_i в правой части уравнения (1.1). Будем прежде всего считать, что теплопотери с поверхности пренебрежимо малы, т.е. $Q_4 \simeq 0$. В предположении, что поглощение падающего излучения в ВТСП материале подчиняется закону Бугера–Ламберта, для оценки тепловыделения в полоске из-за поглощения излучения имеем

$$Q_1 = I_0 (1 - e^{\alpha h}) l L, \quad (1.2)$$

где $I = I_0(t)$ — заданная плотность потока энергии излучения, проходящего через внешнюю поверхность полоски ВТСП; α — коэффициент поглощения.

При записи (1.2) предполагается также, что из нижней поверхности ВТСП пленки излучение выходит без отражения. При больших значениях коэффициента поглощения, таких что $\alpha h \gg 1$,

$$Q_1 \simeq I_0 l L. \quad (1.3)$$

При внутреннем отражении излучения от задней поверхности пленки приближенное соотношение (1.3) тем более выполняется.

Второе слагаемое в (1.1) может быть записано в виде

$$Q_2 = Ll \left[\lambda(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad (1.4)$$

где $T_2 = T_2(x, t)$ — температура в подложке; x — координата, направленная перпендикулярно границе между пленкой и подложкой (положительное направление оси — в сторону подложки, $x = 0$ соответствует границе между ВТСП пленкой и подложкой (рис. 2)); λ — коэффициент теплопроводности подложки, зависящий в общем случае от температуры T_2 .

При записи соотношения (1.4) и ниже принята одномерная модель распространения тепла в подложке, приближенно справедливая в случае, когда толщина ВТСП пленки существенно меньше ее ширины и длины, а ширина пленки значительно меньше толщины подложки (в условиях эксперимента [1] $h = 0.25$ мкм, $l = 15$ мкм, длина полоски L порядка нескольких мм.).

Учитывая, что полоска ВТСП материала включена в цепь прибора, поддерживающего постоянный ток $i_0 = \text{const}$, третье слагаемое в (1.1) запишем в виде

$$Q_3 = \frac{i_0^2 L r(T_1)}{lh}, \quad (1.5)$$

где $r(I_1)$ — удельное сопротивление сверхпроводящего материала. Зависимость сопротивления ВТСП материала от температуры приведена на вставке к рис. 1.

Будем ниже в соответствии с экспериментальными данными полагать большим коэффициент поглощения излучения ВТСП материала. Используя выражения (1.3)–(1.5) для Q_1 , Q_2 , Q_3 , ($Q_4 = 0$), запишем уравнение баланса тепловой энергии в полоске ВТСП в виде

$$\rho_1 c_1 h \frac{dT_1}{dt} = I_0(t) + \left[\lambda(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right]_{x=0} + \frac{i_0^2 L r(T_1)}{lh}. \quad (1.6)$$

Это уравнение должно быть дополнено уравнением для распределения температуры в подложке T_2 , имеющем в принятом одномерном приближении вид,

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right]. \quad (1.7)$$

Отметим, что при численном исследовании отклика болометрической структуры на импульсное излучение в [2] не использовалось предположение об однородности температуры в пленке, тепловой баланс которой описывается аналогичным (1.7) уравнением переноса тепла. Полученные ниже результаты, а также результаты [2] показывают, что такое усложнение модели для параметров систем [1,2], неоправдано.

Предполагая, что до падения импульса излучения на болометр система находится в равновесном состоянии при температуре T^0 , запишем начальные и граничные условия для системы уравнений (1.6) и (1.7) в виде

$$t = 0, \quad T_1 = T_2 = T^0, \quad (1.8)$$

$$x = 0, \quad T_1 = T_2; \quad x \rightarrow \infty, \quad T_2 \rightarrow T^0. \quad (1.9)$$

При постановке граничных условий в модели [2] использовалось предположение о существовании скачка температуры на границе между ВТСП пленкой и подложкой (тем самым неявно вводилось предположение о существовании переходного слоя на границе между двумя областями). Адекватность такой модели ниже не обсуждается, однако следует отметить, что величина скачка температуры оказывается существенно меньше характерной температуры системы и практически не оказывает влияния на кривые болометрического отклика на импульсное излучение (как следует из результатов [2], скачок температуры может оказать небольшое влияние на кривые отклика лишь при гелиевых температурах для очень коротких — (порядка наносекунды) импульсов падающего излучения).

Решение задачи (1.8)–(1.9) позволяет найти распределение температуры в подложке $T_2(x, t)$ и зависимость от времени температуры сверхпроводящей пленки $T_1(t)$. Отклик болометрической структуры на импульс излучения $I_0(t)$ определяется (в приближении болометрического механизма) зависимостью от времени падения напряжения на ВТСП полоске

$$V(t) = i_0 L l^{-1} h^{-1} r(T_1(t)). \quad (1.10)$$

Для решения задачи (1.6)–(1.10) должна быть задана зависимость от времени мощностью падающего излучения $I_0(t)$. Форма импульса излучения приведена на вставке к рис. 3 по данным работы [1].

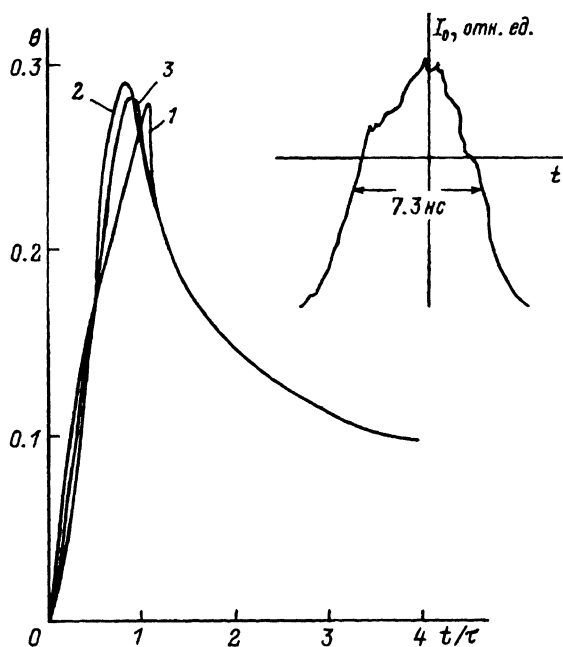


Рис. 3. Временная зависимость безразмерного перегрева ВТСП пленки.
 $\theta = (T_1 - T_0)/(T_0 E_a)$. На вставке форма импульса излучения УФ лазера [1].

2. Основные предположения. Оценка параметров

Ниже будем искать аналитические решения задачи (1.6)–(1.9). Введем следующие предположения.

1. Коэффициент теплопроводности подложки не зависит от температуры, т.е.

$$\lambda = \text{const.} \quad (2.1)$$

Заметим, что при численном исследовании модели [2] коэффициент теплопроводности подложки предполагался зависящим от температуры, причем $\lambda \sim T_2^{0.22}$; такая слабая зависимость λ от T_2 практически не оказывает влияния на ход кривых отклика, и для аналитического исследования модели настоящей работы естественно использовать предположение (2.1)

2. Изменение температуры ВТСП пленки в результате воздействия излучения достаточно мало, так что зависимость $r(T_1)$ может быть представлена в виде разложения

$$r(T_1) = r(T^0) + (dr/dT)_{T=T^0}(T_1 - T^0). \quad (2.2)$$

Введем безразмерные переменные

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad x' = \sqrt{\frac{\rho_2 c_2}{\lambda \tau}} x,$$

$$T'_1 = \frac{T_1}{T^0}, \quad T'_2 = \frac{T_2}{T^0}, \quad I'_0(t') = \frac{Ll\tau}{E^*} I_0(t'). \quad (2.3)$$

Здесь E^* — суммарная энергия импульса излучения, поглощенного ВТСП пленкой; величина $\sqrt{\lambda\tau/(\rho_2c_2)}$ характеризует глубину проникновения тепла в подложку.

С учетом допущений 1 и 2 запишем в безразмерных переменных задачу (1.6)–(1.9) в виде (штрихи у безразмерных переменных здесь и ниже опущены)

$$\frac{dT_1}{dT} = E_a I_0(t) + \kappa \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=0} + H(T_1 - 1),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2},$$

$$t = 0, \quad T_1 = T_2 = 1; \quad x = 0, \quad T_2 = T_1; \quad x \rightarrow \infty, \quad T_2 = 1,$$

$$E_a = \frac{E^*}{\rho_1 c_1 h l L T^0}; \quad \kappa = \frac{\sqrt{\rho_2 c_2 \lambda \tau}}{\rho_1 c_1 h}; \quad H = \frac{i_0^2 L \tau}{\rho_1 c_1 l h^2}.$$

Приведем оценки безразмерных параметров (2.5), входящих в задачу (2.4). В соответствии с экспериментальными данными [1] при температуре $T^0 \simeq 70$ К имеем следующие величины размерных параметров: $E^* = 5.4 \cdot 10^{-8} - 1.6 \cdot 10^{-6}$ Дж, $\rho_1 = 3.6$ г/см³, $\rho_2 = 3.6$ г/см³, $c_1 = 0.143$ Дж·г⁻¹·К⁻¹, $c_2 = 0.114$ Дж·г⁻¹·К⁻¹, $h = 2.5 \cdot 10^{-5}$ см, $l = 1.5 \cdot 10^{-2}$ см, $L = 0.2$ см, $\lambda = 1.2$ Дж·см⁻¹·с⁻¹·К⁻¹, $\tau = 7.3$ нс, $r(T^0) = 4.13 \cdot 10^{-4}$ Ом·см (полное сопротивление ВТСП пленки при температуре $T^0 = 70$ К $R = (L/lh)r(T^0) = 220$ Ом), $(dr/dt)_{T=T^0} = 4.13 \cdot 10^{-5}$ Ом·см·К⁻¹ ($(dr/dt)_{T=T^0} = 220$ Ом/К), $i_0 = 0.3$ мА. При данных значениях размерных величин получаем следующие значения безразмерных параметров: $E^* = 0.0113 - 0.336$, $\kappa = 2.65$, $H = 1.55 \cdot 10^{-5}$.

3. Решение уравнений математической модели. Отклик болометра на импульсное лазерное излучение

Решение краевой задачи (2.4) позволяет определить зависимость от времени температуры ВТСП пленки. Применяя преобразование Лапласа по времени и краевой задаче (2.4), найдем лапласовский образ $T_1^*(s)$ функции $T_1(t)$ в виде

$$T_1^* = \frac{1}{s} + \frac{E_a I_0^*(s)}{a_1 + a_2} \left(\frac{1}{\sqrt{s} - a_1} - \frac{1}{\sqrt{s} + a_2} \right),$$

$$a_1 = \sqrt{1/4\kappa^2 + H} - 1/2\kappa, \quad a_2 = \sqrt{1/4\kappa^2 + H} + 1/2\kappa,$$

$I_0^*(s)$ — лапласовский образ плотности энергии падающего импульса $I_0(t)$.

Для того чтобы найти обратное преобразование функции $T_1^*(s)$ в явном виде и тем самым определить $T_1(t)$, будем аппроксимировать плотность энергии падающего излучения $I_0(t)$ более простой функцией $J_0(t)$, так что

$$\int_0^1 J_0(t) dt = \int_0^1 I_0(t) dt = 1,$$

последнее условие означает, что суммарная энергия падающего излучения $J_0(t)$ совпадает с энергией $I_0(t)$.

Ниже рассмотрены три аппроксимации функции $I_0(t)$ функцией $J_0(t)$, соответствующие импульсам прямоугольной, треугольной и параболической формы. В первом случае функция $I_0(t)$ аппроксимируется функцией $J_0(t)$ вида

$$J_0 = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Аппроксимация функции $I_0(t)$ треугольным импульсом имеет вид

$$J_0 = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 4 - 4t, & 1/2 < t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Параболическая аппроксимация импульса падающего излучения $I_0(t)$ задается в виде

$$J_0 = \begin{cases} 6(t - t^2), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Функции отклика температуры ВТСП пленки $T_1(t)$ на импульсное излучение получены в Приложении.

На рис. 3 приведена временная зависимость безразмерного отклонения температуры ВТСП пленки от равновесного значения T^0

$$\theta(t) = \frac{T_1(t) - T^0}{T^0 E_a}. \quad (3.6)$$

Кривые 1-3 соответствуют начальным импульсам прямоугольной, треугольной и параболической форм. Из рис. 3 видно, что форма отклика температуры слабо зависит от выбора начального импульса в прямоугольной, треугольной или параболической формах. Наибольшее отклонение кривых отклика температуры обнаруживается в окрестности максимального значения температуры ВТСП пленки, в то время как при достаточно больших временах (практически при безразмерных временах $t \gtrsim 2$) ход температурной кривой вообще не зависит от формы начального импульса и определяется только значением энергии падающего излучения E_a (при $t \rightarrow \infty$ температура ВТСП пленки спадает как $1/\sqrt{t}$).

В условиях эксперимента отклик болометрической структуры на импульс лазерного излучения определяется в виде зависимости падения напряжения $V(t)$ на ВТСП полоске от времени. По найденной функции $T_1(t)$ и известной из экспериментальных данных зависимости удельного сопротивления сверхпроводника от температуры зависимости $V(t)$ находятся из соотношения (1.12).

На рис. 4 и 5 приведена рассчитанная с помощью параболической аппроксимации (3.5) импульса падающего излучения $I_0(t)$, зависимость от времени величины

$$v(t) = (V(t) - V(0)) / V_{\max}, \quad (3.7)$$

где $V(0)$ — падение напряжения на ВТСП пленке в стационарном состоянии болометрической структуры (до падения импульса излучения),

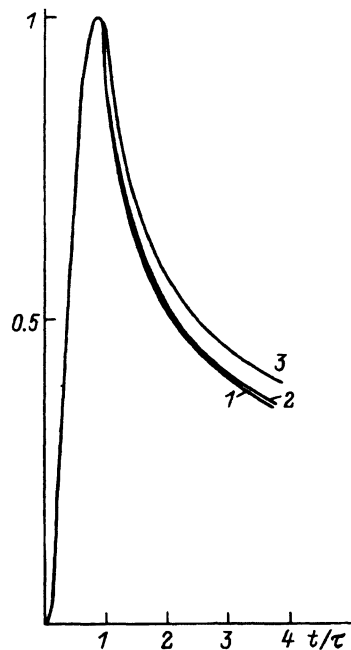


Рис. 4. Нормированный отклик болометрической структуры (случай линеаризированной зависимости сопротивления ВТСП пленки от температуры).

V_{\max} — максимальное значение отклика $V(t)$ болометрической структуры. Кривые 1-3 на рис. 4 и 5 соответствуют значениям суммарной энергии импульса излучения, поглощенного ВТСП пленкой, $E^* = 5.4 \cdot 10^{-8}$, $9.2 \cdot 10^{-7}$, $1.6 \cdot 10^{-6}$ Дж; значения остальных параметров приведены в п.2. При построении кривых на рис. 4 зависимость сопротивления сверхпроводника от температуры представлена в линеаризованном около значения $T = T^0 = 70$ К виде $((dr/dT)_{T=T^0} = \text{const} = 4.13 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{см}\cdot\text{K}^{-1})$. Кривые (штриховые) на рис. 5 построены с учетом нелинейной зависимости сопротивления YBaCuO в области азотных температур; указанная зависимость для интервала $T_1 = 65 - 80$ К приведена на вставке к рис. 1.

Из полученных результатов следует, что учет конечности теплоемкости ВТСП пленки позволяет объяснить наблюдаемую в экспериментах и отсутствующую в простейшей модели зависимость формы отклика от энергии нагревающего импульса.

Приведенные на рис. 4 и 5 результаты неплохо описывают экспериментальные данные [1]; последнее свидетельствует о том, что отклик исследованной в [1] структуры на импульсное излучение УФ лазера имеет болометрическую природу. Вместе с тем кривые, приведенные на рис. 5, соответствуют экспериментальным данным [1] лучше, чем кривые на рис. 4. В частности, результаты рис. 5 воспроизводят экспериментально обнаруженное в работе [1] образование "хвоста" кривой отклика, что подтверждает сделанный в [1] вывод о необходимости учета нелинейности зависимости сопротивления сверхпроводящего материала от температуры.

Авторы благодарны А.И.Головашкину за интерес к работе.

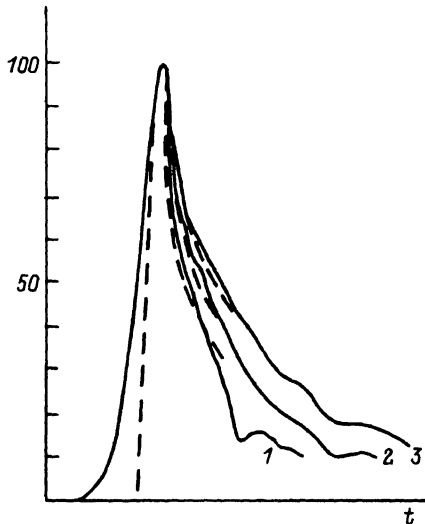


Рис. 5. Нормированный отклик болометрической структуры (случай нелинеаризованной зависимости сопротивления ВТСП пленки от температуры) (штриховые линии).

1-3 — экспериментальные данные [1].

Приложение

1. Прямоугольный импульс. Для аппроксимации (3.3) функции $I_0(t)$ лапласовский образ функции $J_0(t)$ находим в виде

$$J_0^*(s) = s^{-1}(1 - e^{-s}). \quad (\text{П.1})$$

Обратное преобразование функции (3.1) для найденной функции $I_0^*(s) \simeq J_0^*(s)$ позволяет определить зависимость от времени температуры ВТСП пленки

$$T_1 = 1 + \frac{E_a}{a_1 + a_2} [\varphi(t) - \Phi(t)],$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \varphi(t-1), & t \geq 1, \end{cases} \quad (\text{П.2})$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{a_1} \left\{ e^{a_1^2 t} \left[\operatorname{erf}(a_1 \sqrt{t}) + 1 \right] - 1 \right\} + \frac{1}{a_2} \left\{ e^{a_2^2 t} \operatorname{erfc}(a_2 \sqrt{t}) - 1 \right\}. \quad (\text{П.3})$$

В разделе 2 дана оценка безразмерных параметров, показывающая, что $H \ll 1$; следовательно, параметры a_1 и a_2 могут быть записаны в приближенном виде

$$a_1 = H/\kappa \ll 1, \quad a_2 = \kappa.$$

Соответственно выражение для функции $\varphi(t)$, пригодное при временах $t \ll \kappa/H = O(10^5)$, принимает более простой вид

$$\varphi(t) = \kappa^{-1} \left[e^{\kappa^2 t} \operatorname{erfc}(\kappa \sqrt{t}) - 1 \right] + 2\sqrt{t/\pi}. \quad (\text{П.4})$$

2. Треугольный импульс. Образ функции $J_0(t)$, заданной аппроксимацией (3.4), имеет вид

$$J_0^*(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 - 2e^{-s/2} + e^{-s} \right). \quad (\text{П.5})$$

Зависимость от времени температуры ВТСП пленки находится по (П.5) в форме

$$T_1 = 1 + \frac{4E_a}{a_1 + a_2} [\psi(t) - \Psi_1(t) + \Psi_2(t)],$$

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2, \\ 2\psi(t - 1/2), & t \geq 1/2, \end{cases}, \quad (\text{П.6})$$

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ \psi(t - 1), & t \geq 1, \end{cases}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{a_1^3} \left\{ e^{a_1^2 t} \left[\operatorname{erf}(a_1 \sqrt{t}) + 1 \right] - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{a_2^3} \left\{ e^{a_2^2 t} \operatorname{erfc}(a_2 \sqrt{t}) - 1 \right\} + \frac{2\sqrt{t}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - t \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right). \quad (\text{П.7})$$

При $H \ll 1$ выражение (П.7) упрощается и для времен $t \ll \sqrt{\kappa/H} = 0(10^3)$ приобретает следующую форму:

$$\psi(t) = \frac{1}{\kappa^3} \left[e^{\kappa^2 t} \operatorname{erfc}(\kappa \sqrt{t}) - 1 \right] + \frac{2}{\kappa^2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{t}{\kappa} + \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}. \quad (\text{П.8})$$

3. Параболический импульс. Функция $J_0(t)$ задается в виде (3.5), лапласовский образ которого

$$J_0^*(s) = \frac{1}{s^2} (1 + e^{-s}) - \frac{2}{s^3} (1 - e^{-s}). \quad (\text{П.9})$$

Выполняя обратное преобразование функции (3.1) с учетом найденной аппроксимации функции $I_0^*(s)$ в виде (П.9), получим температуру ВТСП пленки в зависимости от времени в виде

$$T_1 = 1 + \frac{6E_a}{a_1 + a_2} \left[\Omega_1(t) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ \Omega_2(t - 1), & t \geq 1, \end{cases} \right] \quad (\text{П.10})$$

$$\Omega_i(\tau) = \left\{ e^{a_1^2 \tau} \left[\operatorname{erf}(a_1 \sqrt{\tau}) + 1 \right] - 1 \right\} \left[\frac{1}{a_1^3} + (-1)^i \frac{1}{a_1^5} \right] +$$

$$+ \left\{ e^{a_2^2 \tau} \operatorname{erfc}(a_2 \sqrt{\tau}) - 1 \right\} \left[\frac{1}{a_2^3} + (-1)^i \frac{2}{a_2^5} \right] +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left[\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} + (-1)^i \left(\frac{2}{a_2^4} - \frac{2}{a_1^4} \right) \right] - \tau \left[\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} + (-1)^i \left(\frac{2}{a_3^2} + \frac{2}{a_1^3} \right) \right] +$$

$$+(-1)^i \frac{8\tau^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - (-1)^i \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \right) \quad i = 1, 2. \quad (\text{П.11})$$

Приближенное выражение функций $\Omega_i(\tau)$ при $H \ll 1$, пригодное при $t \ll (\kappa/H)^{1/3} = 0(10^2)$, следует из (П.10), (П.11) в виде

$$\begin{aligned} \Omega_i(\tau) = & \left[e^{\kappa^2 \tau} \operatorname{erfc}(\kappa\sqrt{\tau}) - 1 \right] \left[\frac{1}{\kappa^3} + (-1)^i \frac{2}{\kappa^5} \right] + \\ & + 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left[\frac{1}{\kappa^2} - (-1)^i \frac{1}{\kappa^4} \right] - \tau \left[\frac{1}{\kappa} + (-1)^i \frac{2}{\kappa^3} \right] + \\ & + \frac{4\tau^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[1 - (-1)^i \frac{2}{\kappa^2} \right] - (-1)^i \frac{\tau^2}{\kappa} + (-1)^i \frac{16\tau^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Список литературы

- [1] Бонч-Осмоловский М.М., Варлашкин А.В., Виноградов Е.А. и др. // СФХТ. 1989. Т. 2. № 9. С. 45-49.
 [2] Flik M.I., Phelan P.E., Tien C.L. // Cryogenics. 1990. Vol. 30. P. 1118-1127.
 [3] Веркин Б.И., Бандурян Б.В., Бондаренко А.В. и др. // Физика низких температур. 1989. Т. 14. № 7. С. 705-709.

Физический институт им.П.Н.Лебедева
 Институт проблем механики
 Москва

Поступило в Редакцию
 18 июля 1991 г.