1992 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 62, в.1
1992 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol.62, N 1

06


# ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ ТУННЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

*О. З. Олендский*

Рассмотрено прохождение частиц через систему двух потенциальных барьеров, к которым приложено напряжение $U$ и высота которых меняется со временем по гармоническому закону с частотой $\omega$. Осцилляция высот барьеров приводит к возникновению нескольких эквидистантных по энергиям каналов, соответствующих поглощению или потере частицей энергии, кратной $\hbar\omega$, зависимость коэффициентов прохождения от напряжения также имеет резонансный вид. Исследована зависимость резонансных кривых от частоты осцилляций барьеров $\omega$. Определены пути повышения эффективности взаимодействия туннелирующей частицы с колебаниями.

Микрочастица, туннелирующая через систему двух одинаковых одномерных прямоугольных потенциальных барьеров, может проходить их без уменьшения амплитуды своей волновой функции [1—3]. Это явление, получившее название резонансного туннелирования, происходит при совпадении энергии налетающей частицы с квазиуровнем энергии в яме между барьерами. При подаче напряжения на подобную структуру форма барьеров становится трапецеидальной, они смещаются относительно друг друга по энергетической шкале. В результате этого коэффициент прохождения уменьшается, однако соответствующим изменением параметров системы для определенных напряжений его опять можно сделать равным единице [4]. На практике это изменение параметров, зависящее от напряжения, может выразиться в увеличении ширины второго барьера.

Туннелируя, частица может возбуждать различные колебания и взаимодействовать с ними. Колебания могут происходить как в яме между барьерами, так и в самих барьерах. В данной работе на основе строгого квантово-механического анализа решается задача о прохождении микрочастицы, первоначально имеющей энергию $\varepsilon_F$, через два потенциальных барьера, к которым приложено напряжение $U$. Высота барьеров периодически осциллирует во времени с частотой $\omega$. Один из барьеров расположен в области $0 < x < a_1$, второй — в области $s + a_1 < x < s + a_1 + a_2$, где $a_1$, $a_2$, $s$ представляют собой соответственно толщину первого и второго барьеров и ширину ямы. Тогда в уравнении Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x,t)\,\Psi \tag{1}$$

$V(x,t)$ имеет вид

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t) + V_3(x,t) + V_4(x,t)\,, \tag{2}$$

$$V_1(x,t) = \begin{cases} V_1 - \dfrac{eU}{a_s}x + V_{01}\cos\omega t\,,\ 0 < x < a_1\,, \\ 0\,,\ x < 0\,,\ x > a_1\,, \end{cases} \tag{3}$$

$$V_2(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{eU}{a_s}x\,, \; a_1 < x < a_1 + s\,, \\ 0\,, \; x < a_1\,, \; x > a_1 + s\,, \end{cases} \tag{4}$$

$$V_3(x,t) = \begin{cases} V_2 - \dfrac{eU}{a_s}x + V_{02}\cos(\omega t + \varphi)\,, \; a_1 + s < x < a_s\,, \\ 0\,, \; x < a_1 + s\,, \; x > a_s\,, \end{cases} \tag{5}$$

$$V_4(x,t) = \begin{cases} -eU\,, \; x > a_s\,, \\ 0\,, \; x < a_s\,. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $a_s = a_1 + a_2 + s$; $V_1, V_2$ — высоты первого и второго барьеров; $V_{01}$ и $V_{02}$ — амплитуды модуляции на первом и втором барьерах; $\varphi$ — разность фаз; $m_0$ — масса частицы, $e$ — абсолютная величина заряда электрона. Условимся обозначать решения уравнения Шредингера в областях $x < 0$, $0 < x < a_1$, $a_1 < x < s + a_1$, $s + a_1 < x < a_s$, $x > a_s$ соответственно индексами 1, 2, 3, 4, 5. В области $x < 0$ решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\Psi_1(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta_{n0}\, e^{i\varkappa_n x} + A_n\, e^{-i\varkappa_n x} \right\} \exp\left( -i \frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{\hbar} t \right), \tag{7}$$

где $\varkappa_n = \dfrac{\sqrt{2m_0(\varepsilon_F + n\hbar\omega)}}{\hbar}$.

В области $x > a_s$ имеем следущее решение:

$$\Psi_5(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left[ -i \left\{ \frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{\hbar} t - p_n(x - a_s) \right\} \right], \tag{8}$$

$p_n = \sqrt{2m_0(\varepsilon_F + n\hbar\omega + eU)}\,/\,\hbar$. Первый член в (7) описывает падающую на структуру частицу, второй — совокупность отраженных ( при $\varepsilon_F + n\hbar\omega > 0$ ) или локализованных в области барьеров (при $\varepsilon_F + n\hbar\omega > 0$) волн. Аналогично (8) описывает прошедшие через структуру (при $\varepsilon_F + n\hbar\omega + eU > 0$) или локализованные в области барьеров ( при $\varepsilon_F + n\hbar\omega + eU < 0$ ) состояния.

В яме между барьерами решение уравнения Шредингера описывается функциями Эйри Ai(x) и Bi(x) [5]

$$\Psi_3(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n \,\mathrm{Ai}\left( -\frac{x + a_s\theta_2(n)}{x_0} \right) + \right.$$

$$\left. + D_n\, Bi\left( -\frac{x + a_s\theta_2(n)}{x_0} \right) \right\} \exp\left( -i \frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{\hbar} t \right), \tag{9}$$

где $\theta_2(n) = \dfrac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{eU}$, $x_0 = \left( \dfrac{a_s\hbar^2}{2m_0 eU} \right)^{1/3}$.

В области барьеров волновая функция принимает вид

$$\Psi_2(x,t) = \exp\left( -i \frac{V_{01}}{\hbar\omega} \sin\omega t \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ E_n \,\mathrm{Ai}\left( -\frac{x + a_s\theta_1(n)}{x_0} \right) + \right.$$

$$+ G_n \,\mathrm{Bi}\left(-\frac{x + a_s \theta_1(n)}{x_0}\right)\Bigg\}\exp\left(-i\frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{\hbar}t\right), \tag{10}$$

$$\Psi_4(x,t) = \exp\left[-i\frac{V_{02}}{\hbar\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg\{H_n \,\mathrm{Ai}\left(-\frac{x + a_s \Theta_3(n)}{x_0}\right) +$$

$$+ Q_n \,\mathrm{Bi}\left(-\frac{x + a_s \theta_3(n)}{x_0}\right)\Bigg\}\exp\left(-i\frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{\hbar}t\right), \tag{11}$$

$$\theta_1(n) = \frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega - V_1}{eU}, \quad \theta_3(n) = \frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega - V_2}{eU}.$$

Обычные условия непрерывности волновой функции и ее первой пространственной производной приводят к следующей бесконечной системе линейных уравнений с комплексными коэффициентами для определения $C_n$:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm}^{(+)} C_m = \delta_{n0}. \tag{12}$$

Коэффициенты $A_n$ выражаются через $C_n$

$$A_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm}^{(-)} C_m. \tag{13}$$

Здесь

$$F_{nm}^{(\pm)} = \frac{\pi^3}{2}\sum_{l,k,j} J_{n+j}\left(\frac{V_{01}}{\hbar\omega}\right) J_{j+k}\left(\frac{V_{01}}{\hbar\omega}\right) J_{k+l}\left(\frac{V_{02}}{\hbar\omega}\right) J_{l+m}\left(\frac{V_{02}}{\hbar\omega}\right) \times$$

$$\times e^{i(m-k)\varphi} f_{nm}^{(\pm)}(l,k,j), \tag{14}$$

$J_n(x)$ — функция Бесселя $n$-го порядка,

$$f_{nm}^{(\pm)}(l,k,j) = f_m^a(l,k,j)\,\mathrm{Ai}\left(z_0(j)\right) - f_m^b(l,k,j)\,\mathrm{Bi}\left(z_0(j)\right) \pm$$

$$\pm i\frac{1}{x_0 æ_n}\left\{f_m^a(l,k,j)\,\mathrm{Ai}'\left(z_0(j)\right) - f_m^b(l,k,j)\,\mathrm{Bi}'\left(z_0(j)\right)\right\},$$

$$f_m^a(l,k,j) = f_m^c(l,k,j)\,S_1\left(z_2(k), z_1(j)\right) + f_m^d(l,k) S_2\left(z_2(k), z_1(j)\right),$$

$$f_m^b(l,k,j) = f_m^c(l,k)\,S_3\left(z_2(k) z_1(j)\right) + f_m^d(l,k)\,S_1\left(z_1(j), z_2(k)\right),$$

$$f_m^c(l,k) = f_m^r(l)\,S_1\left(z_4(l), z_3(k)\right) + f_m^u(l)\,S_2\left(z_4(l), z_3(k)\right),$$

$$f_m^d(l,k) = f_m^r(l)\,S_3\left(z_4(l), z_3(k)\right) + f_m^u(l)\,S_1\left(z_3(k), z_4(l)\right),$$

$$f_m^r(l) = \mathrm{Bi}'\left(z_5(l)\right) + ix_0 p_m \mathrm{Bi}\left(z_5(l)\right),$$

$$f_m^u(l) = \mathrm{Ai}'\left(z_5(l)\right) + ix_0 p_m \mathrm{Ai}\left(z_5(l)\right),$$

$$S_1(x,y) = \mathrm{Ai}(x)\,\mathrm{Bi}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\,\mathrm{Bi}(y),$$

$$S_2(x,y) = \mathrm{Bi}'(x)\,\mathrm{Bi}(y) - \mathrm{Bi}(x)\,\mathrm{Bi}'(y),$$

$$S_3(x,y) = \mathrm{Ai}(x)\,\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\,\mathrm{Ai}(y),$$

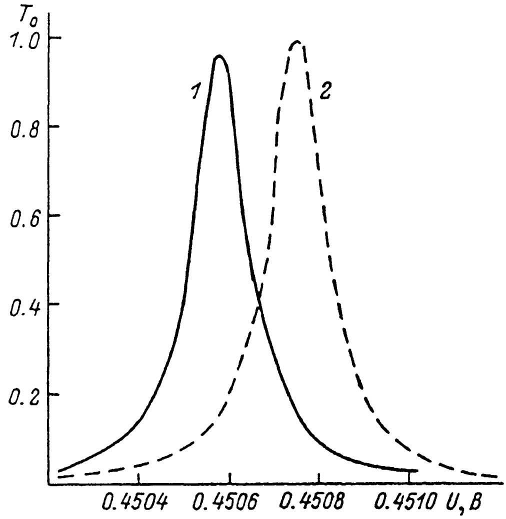


Рис. 1. Зависимость $T_0$ от напряжения $U$.
$\hbar\omega$, эВ: *1* — 0.1, *2* — 0 (статический случай).

$$z_0(j) = -\frac{a_s}{x_0}\theta_1(j)\,,\ z_1(j) = -\frac{a_1 + a_s\theta_1(j)}{x_0}\,,$$

$$z_2(k) = -\frac{a_1 + a_s\theta_2(k)}{x_0}\,,\quad z_3(k) = -\frac{a_1 + s + a_s\theta_2(k)}{x_0}\,,$$

$$z_4(l) = -\frac{a_1 + s + a_s\theta_3(l)}{x_0}\,,\quad z_5(l) = -\frac{a_s}{x_0}\left\{1 + \theta_3(l)\right\},$$

$$\mathrm{Ai}'(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{Ai}(x)\,,\ \mathrm{Bi}'(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{Bi}(x)\,. \tag{15}$$

Если положить $a_2$, $s$, $V_{02}$, $V_2$ равными нулю, то формулы (12)—(15) переходят, как и следовало ожидать, в формулы для туннелирования частицы через трапецеидальный барьер, высота которого меняется со временем по гармоническому закону [6].

Из (7)—(11) следует, что усредненная по периоду колебаний производная по времени от плотности вероятности $\rho = \Psi\Psi^*$ равна нулю, и поэтому

$$\sum_n (J_n + R_n) = 1\,. \tag{16}$$

$T_n$ и $R_n$ являются коэффициентами прохождения и отражения для канала с номером $n$

$$T_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega + eU}{\varepsilon_F}}\,|C_n|^2\,h(\varepsilon_F + n\hbar\omega + eU), \tag{17}$$

$$R_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_F + n\hbar\omega}{\varepsilon_F}}\,|A_n|^2\,h(\varepsilon_F + n\hbar\omega), \tag{18}$$

$h(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

На рис. 1 приводится зависимость $T_0$ от $U$, рассчитанная по формулам (12)—(18), для случая $V_1 = V_2 = 1.8$ эВ, $a_1 = 1$ нм, $a_2 = 1.3$ нм, $s = 3$ нм, $\varepsilon_F = 1.0$ эВ,

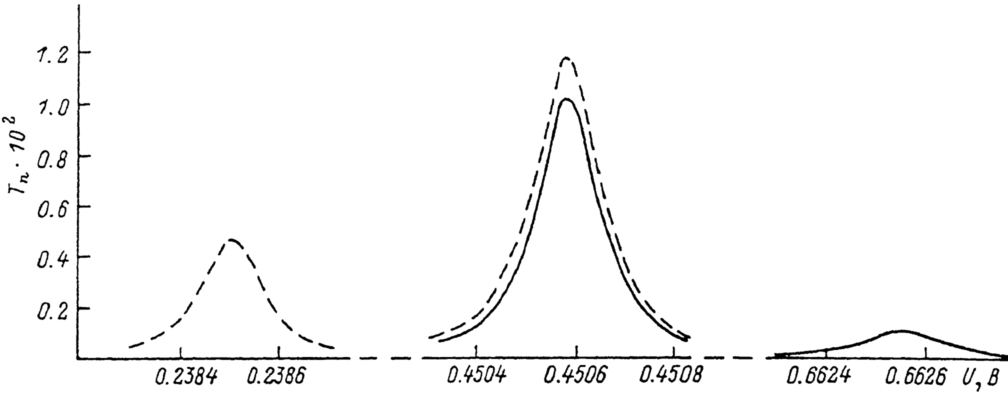


Рис. 2. Зависимость $T_n$ от $U$.

$\hbar\omega = 0.1$ эВ , $V_{01}/(\hbar\omega) = V_{02}/(\hbar\omega) = 0.5$ , $\varphi = 0$ , $m_0 = m_e$ , $m_e$ — масса электрона. Там же для сравнения приведена и кривая для статических барьеров ($V_{01} = V_{02} = 0$) с теми же параметрами. На рисунке показаны участки кривых вблизи наибольшего максимума. Видно, что для основного канала ($n = 0$ , прохождение без излучения или поглощения частицей квантов колебаний) наложение осцилляций на барьеры изменяет зависимость коэффициента прохождения от напряжения. В исследуемом диапазоне энергий модуляции $0 \le \hbar\omega \le 0.15$ эВ увеличение $\hbar\omega$ (при неизменности $V_{01}/(\hbar\omega)$ и $V_{02}/(\hbar\omega)$) приводит к уменьшению значения $T_0$ в максимуме и его смещение в область меньших напряжений. Так, при $\hbar\omega = 0.01$ эВ максимальное значение $T_0^{\max} = 0.9938$ достигается при $U_{\max} = 0.45075$ В. При $\hbar\omega = 0.15$ эВ эти величины принимают значения $T_0^{\max} = 0.9111$, $U_{\max} = 0.45036$ В. Отметим, что изменение резонансной кривой существенно зависит также от $V_{01}/(\hbar\omega)$ и $V_{02}/(\hbar\omega)$.

Прохождение частицы по каналу с $n \neq 0$ с излучением (для $n < 0$) или поглощением (для $n > 0$ ) частицей квантов колебаний определяется величинами $V_{01}/(\hbar\omega)$ , $V_{02}/(\hbar\omega)$ , $\varepsilon_F$ , $\omega$, а также параметрами барьеров. На рис.2 приведена зависимость $T_n$ от напряжения для $n = 1$ (штриховая линия) и $-1$ (сплошная линия). Величина $T_1$ проходит через максимумы при напряжениях $U_<$ и $U_{\max}$ , а величина $T_{-1}$ — при $U_{\max}$ и $U_>$ , где $U_< < U_{\max} < U_>$. Величины $T_n$ в максимуме на несколько порядков превосходят нерезонансные значения и зависят от $\varepsilon_F$, $\hbar\omega$, $V_{01}/(\hbar\omega)$, $V_{02}/(\hbar\omega)$ . Величины $\Delta_< = U_{\max} - U_<$ и $\Delta_> = U_> - U_{\max}$ не равны друг другу, и $\Delta = \Delta_< - \Delta_> > 0$ . Последнее неравенство усиливается ростом $\hbar\omega$ . В интервале $0 \le \hbar\omega \le 0.15$ эВ резонансные значения $T_1^{\max}$ и $T_{-1}^{\max}$, достигаемые при $U_{\max}$, возрастают с увеличением частоты модуляции и неизменностью $V_{01}/(\hbar\omega)$ и $V_{02}/(\hbar\omega)$. Характер этой зависимости приведен на рис. 3.

Дополнительного увеличения значений $T_n$ при $U_<$ и $U_>$ можно достичь, изменяя ширину одного из барьеров. На рис. 4 приводится зависимость максимальных значений $T_1^<$ и $T_{-1}^>$, достигаемых при $U_<$ и $U_>$, от ширины второго барьера.

Видно, что для наиболее эффективного поглощения частицей кванта колебаний необходимо уменьшить ширину второго барьера (по сравнению с максимальным резонансом в статическом случае), а для наиболее эффективного испускания увеличить ее.

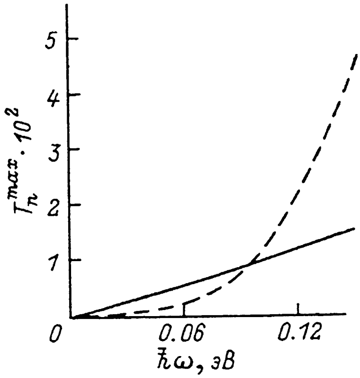


Рис. 3. Зависимость $T_n^{\max}$ от $\hbar\omega$. Штриховая линия — $n = 1$, сплошная — $n = -1$..

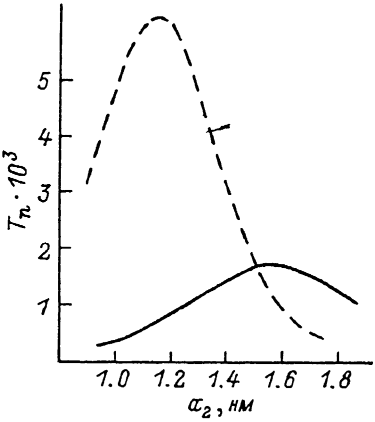


Рис. 4. Зависимость максимальных значений $T_1^<$ и $T_{-1}^>$ от ширины второго барьера $a_2$. Штриховая и сплошная линии — то же, что и на рис. 3.

## Заключение

Для частицы, туннелирующей через два барьера, к которым приложено напряжение $U$, а высоты гармонически изменяются во времени с частотой $\omega$, коэффициент прохождения без излучения или поглощения кванта колебаний имеет резонансную зависимость от $U$. С увеличением частоты модуляции $\omega$ резонансное значение коэффициента прохождения уменьшается, а резонансная кривая смещается в область меньших напряжений. Для прохождения с излучением или поглощением частицей кванта колебаний коэффициенты прохождения также имеют резонансную зависимость от напряжения. Резонансы имеют место для прохождения с поглощением при $U_<$ и $U_{\max}$, для прохождения с излучением при $U_{\max}$ и $U_>$, где $U_< < U_{\max} < U_>$, а $U_{\max}$ — напряжение, при котором достигается максимум коэффициента прохождения без излучения или поглощения. $U_>$ расположено ближе к $U_{\max}$, чем $U_<$; эта несимметричность возрастает с ростом $\omega$. Дополнительного увеличения коэффициентов прохождения при $U_<$ и $U_>$ можно добиться, варьируя величину барьеров.

### Список литературы

[1] *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Наука, 1965. 728 с.
[2] *Иогансен Л. В.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. Вып. 2. С. 207—213.
[3] *Иогансен Л. В.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. Вып. 1. С. 270—277.
[4] *Ricco B., Azbel M. Y.* // Phys. Rev. B. 1984. Vol. 29. N 4. P. 1970—1981.
[5] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
[6] *Кузнецов В. С.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 3. С. 45—49.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина
Минск

Поступило в Редакцию
16 апреля 1991 г.